Redefinindo figuras: o método do ponto fantasma

João Gilberti

Introdução

Em geometria, quando estamos tentando marcar ângulos ou tentando provar concorrências/colinearidades, pode ser que a figura fique muito difícil e confusa. Quando acontecer isso, às vezes vale a pena redefinir um ponto de outra forma para simplificar a figura e ganhar propriedades mais fortes. Saber quando redefinir vem puramente de prática em problemas de geometria.

Vou tentar passar certa prática para vocês nesse material, trazendo exemplos de quando redefinir é uma boa ideia e a motivação por trás junto com problemas de treino para o leitor entender melhor a técnica, do simples ao avançado.

Um exemplo que vale quase sempre a pena tentar redefinir é para provar uma colinearidade estranha. Por exemplo: "..., se essa reta r toca o círculo em P, prove que P, Q, R são colineares". Neste caso, vale a pena redefinir P' como QR interseção r e mostrar que P' pertence ao círculo.

Duas dicas antes de começarmos:

Colinearidades: Muitas vezes, provar que 3 pontos são colineares sem métodos comuns, principalmente quando os pontos não estão relacionados tão diretamente, pode não ser uma boa ideia, por isso redefinir pode ser uma boa ideia.

Pontos conhecidos: Tente sempre tornar a figura para o mais simples possível, isto é, tente sempre tornar o problema análogo a algo que você consiga trabalhar. Sempre que existe um ou mais pontos estranhos na figura, tentar provar um enunciado que não envolve esses pontos mas que é equivalente ao problema pode ser interessante.

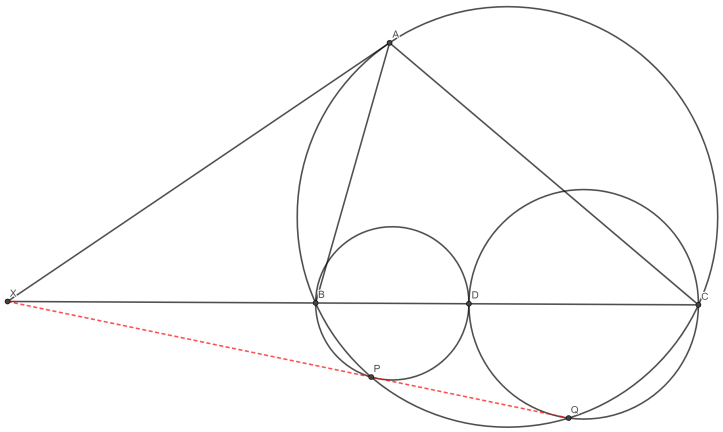
Exemplos resolvidos

Atenção: os problemas a seguir são de exemplo, portanto o que vale a pena fazer é, caso você não conheça a técnica ainda, desenhe um esboço da figura e tente identificar quais pontos vamos redefinir. Não passe muito tempo nisso, os problemas de prática estão lá para isso!

1. (TST China) Seja ABC um triângulo escaleno. A bissetriz de A toca BC em D. Os círculos de diâmetro DB, DC tocam (ABC) em P, Q, respectivamente. A tangente por A a (ABC) toca BC em X. Prove que X, P, Q são colineares.

Solução: Antes, vamos marcar alguns ângulos. Note que $\angle PBC + \angle PQC = 180$, pois $PQBC$ é cíclico. Ademais, $\angle PBC = 90 - \angle PDB$ e $\angle PQC = \angle PQD + 90$. Isso implica que $\angle PDB = \angle PQD$ o que implica (PQD) é tangente a BC.

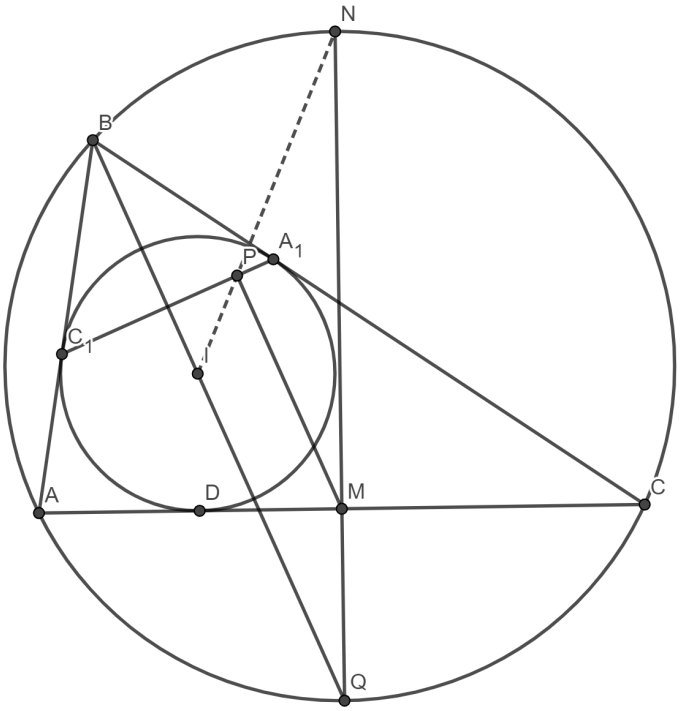
Agora, para nos livrarmos da inconveniente colinearidade, redefina X' como PQ interseção BC. Note que podemos supor sem perdas que $AB < AC$. Note que por potência de ponto de X em (PQD): $X'P.X'Q = X'D^2 = Pot_{(ABC)}X'$.



Agora perceba que a potência de um ponto com relação a (ABC) aumenta conforme um ponto se afasta de B e de C por algum lado específico da figura: isso implica que X' é o ponto em BC (mais próximo de B) tal que $Pot_{(ABC)}X' = X'D^2$, onde D é o pé da bissetriz.
Note que agora se provarmos que $Pot_{(ABC)}X = XD^2$ acabaremos pois daí $X = X'$. Para isso, como $Pot_{(ABC)}X = XA^2$, precisamos de $XA = XD$, o que é verdade, pois $\angle XAD = A/2 + C = \angle XDA$. ■

2. (TST 3 Cone Sul 2021 P3) Seja ABC um triângulo com $BA \neq BC$. Sejam M o ponto médio de AC e I o incentro de ABC. Sejam A_1, C_1 pontos nos quais o incírculo de ABC toca os lados BC, BA, respectivamente. Seja P o pé da perpendicular de M a A_1C_1. A mediatriz de AC toca PI em N. Prove que B, N, A, C estão num mesmo círculo.

Solução:
Note que a interseção da mediatriz de AC com o círculo (ABC) é bem conhecida: é o ponto médio do arco maior AC. Esse ponto tem muitas propriedades boas que perdemos quando queremos provar que ele está na reta IP. Logo, redefina boa parte da figura: seja N' o ponto médio do arco e $P' = IN' \cap A_1C_1$. Queremos $MP' \perp A_1C_1$. Mas note que $BI \perp A_1C_1$, então só precisamos de MP' paralelo a BI. Mas note que MN' toca BI no ponto médio do arco AC de baixo. Chame esse ponto de Q.



Note então que $BN'||A_1C_1$, e sendo $R = A_1C_1 \cap BI$, por teorema de Tales:

$$N'P/P'I = BR/RI,$$

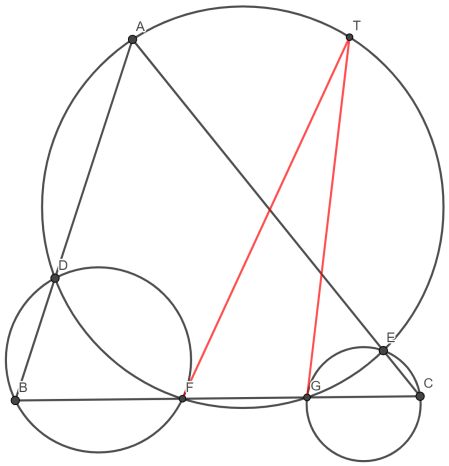
e além disso

$$N'M/MQ = N'P/P'I.$$

Daí só precisamos que $N'M/MQ = BR/RI$, e portanto reduzimos o problema a algo que conhecemos melhor. Note que os triângulos BA_1I e $N'AQ$ são semelhantes (marcação de ângulos fácil) e R e M são os pés das alturas dos vértices relativos, e portanto a razão é igual.

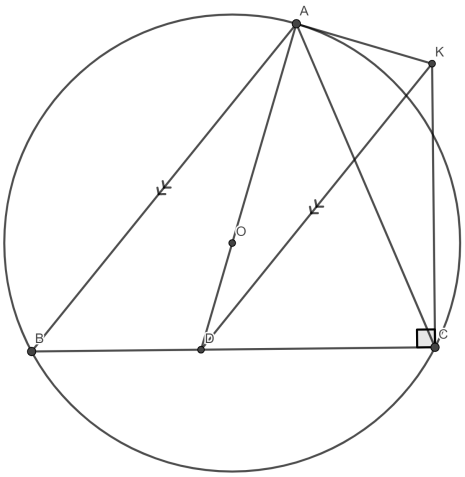
3. (G1 2019) Seja ABC um triângulo. Um círculo γ passando por A toca AB, AC em D, E respectivamente. Esse mesmo círculo toca BC em F, G, com B, F, G, C colineares nesta ordem. A tangente por F ao círculo (BFD) toca a tangente por G a (CGE) em T. Prove que $AT||BC$.

Solução:
A principal observação do problema é conjecturar que $T \in \gamma$. Após conjecturar isso, vemos que se AT é paralelo a BC, então $ATGF$ seria um trapézio isósceles. Trapézios isósceles num geral são fáceis de marcar ângulo. Pensando nisso, redefina a figura:
Considere T' tal que $AFGT'$ é um trapézio isósceles. Queremos que $T = T'$, então basta provar que $T'F$ e $T'G$ são tangentes a (BDF) e (CEG), respectivamente. De fato, note que $\angle DFT' = \angle 180 - \angle DAT' = \angle ABC = \angle DBF$, então $\overline{T'F}$ é tangente a (BDF). Da mesma forma $\overline{T'G}$ é tangente a (CEG).
Portanto, T' é o encontro das tangentes, e portanto $T' = T$. Como $AT'FG$ é trapézio isósceles, $AT||BC$.



4. Seja ABC um triângulo de circumcentro O. Um ponto K é tal que $\angle KCB = 90$ e KA é tangente a (ABC). A paralela por K a AB toca BC em D. Prove que A, O, D são colineares.

Solução:
A colinearidade é a parte mais estranha do problema. Note que se $D' = AO \cap BC$, então D' é menos estranho que D, e precisamos provar só que $D'K$ é paralelo a AB, que é bem menos estranho que a colinearidade. Redefinindo dessa forma, note que $\angle D'AK = \angle D'CK = 90$, e isso implica que $AD'CK$ é cíclico. Mas para provar o paralelismo, precisamos que $\angle KD'C = \angle BAC$. Mas isso é verdade já que $\angle KD'C = \angle KAC = \angle BAC$, pois KA é tangente a (ABC). Portanto $D'K||AB$ e $D' \in BC$, logo $D' = D$.

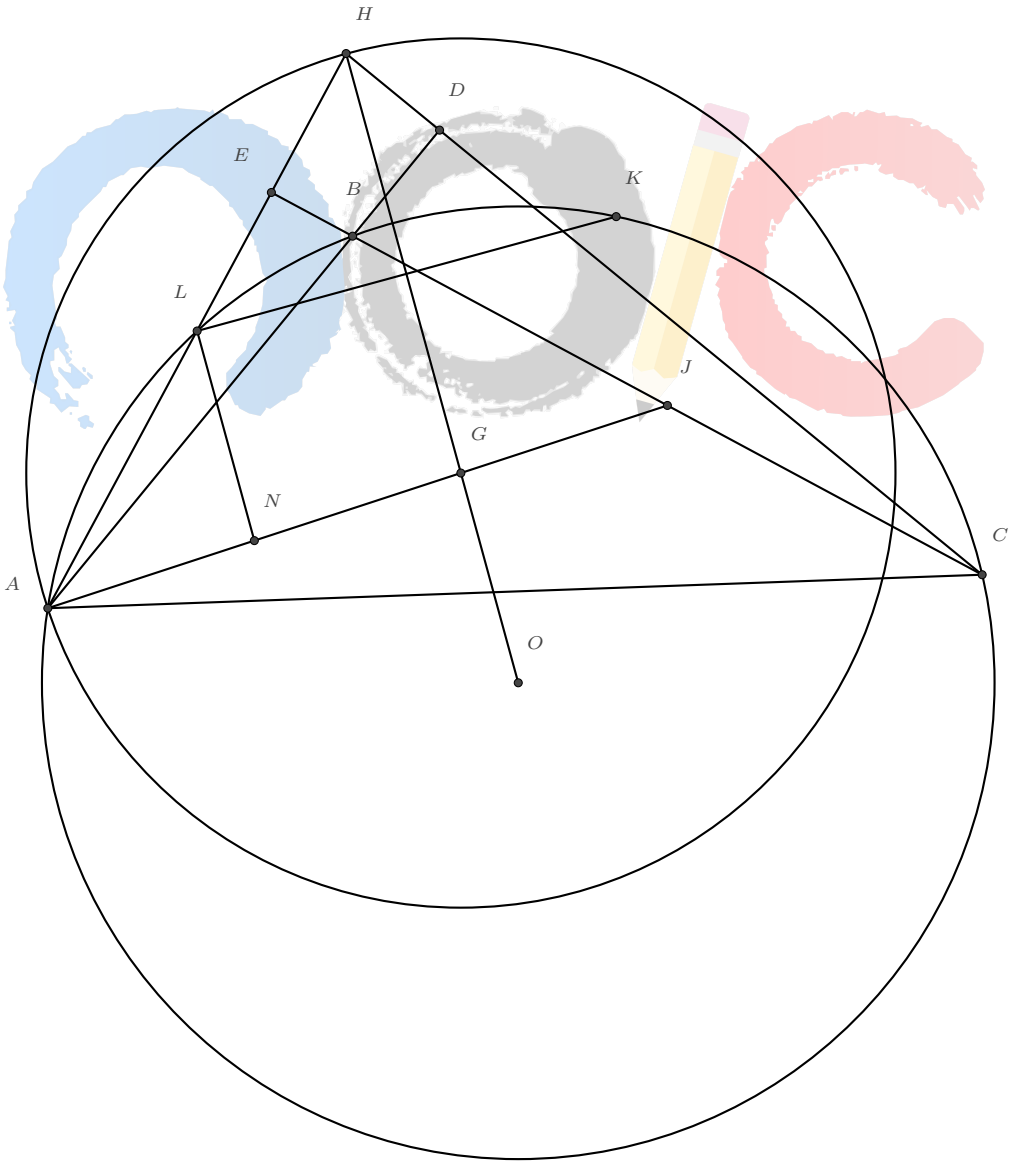


5. (Balkan Shortlist 2020 G2) Sejam G, H o baricentro e o ortocentro de ABC que tem um ângulo obtuso em $\angle B$. Seja ω o círculo de diâmetro AG. ω intercepta $\odot(ABC)$ novamente em $L \neq A$. A tangente a ω em L intersecta $\odot(ABC)$ em $K \neq L$. Dado que $AG = GH$, prove $\angle HKG = 90^o$.

Solução:
Com uma boa figura e após marcarmos alguns ângulos, podemos ver que se L é o ponto médio de AH o problema acaba, em vista que

$$\angle KLG + \angle LGH = \angle LAG + \angle LGA = 90^\circ$$

, e daí $LK \perp HG$, e como HG passa pelo circumcentro O de (ABC), K é o reflexo de L por HG (pois $K \in (ABC)$). Mas daí $\angle HKG = \angle HLG = 90$ e terminamos.
Agora, provemos que L é ponto médio de AH, para isso, usaremos ponto fantasma: Seja M o ponto médio de BC e D o pé da altura de A a BC. Além disso, defina o "ponto fantasma" L' como o ponto médio de AH. A condição $AG = HG$ implica que $\angle AL'G = 90^\circ$. Mas então $\frac{AL'}{DL'} = \frac{AG}{MG} = 2$, então H é o reflexo de L' sobre BC, que está em (ABC) (isso é um lema conhecido, tente provar!). Portanto, $L = L'$, e o problema está terminado pelo parágrafo acima.



Problemas para prática!

Problemas Fáceis:

1. Seja ABC um triângulo e M o ponto médio de BC. O círculo que passa por A e M e é tangente a BC toca (ABC) em D. Prove que $AD||BC$.

2. Seja ABC um triângulo. A mediatriz de AC toca a bissetriz de B em X, e a mediatriz de AB toca a bissetriz de C em Y. Prove que X, Y, B, C estão sobre um mesmo círculo.

3. (Pitot) Prove que um quadrilátero convexo $ABCD$ é circunscritível (tem um círculo tangente internamente aos seus 4 lados) se, e somente se, $AB + CD = AD + BC$.

Problemas Médios

4. Seja ABC um triângulo. D, E são pontos em AB, AC, respectivamente. Seja $F = BE \cap CD$. Prove que os incírculos de BFC e de ABC são tangentes se, e somente se $ADFE$ é circunscritível.

5. Em um triângulo ABC com $\angle A = 50$, D é o pé da altura de A em BC. Prove que se P é um ponto na altura tal que $DP.DA = DB.DC$, então determine $\angle BPC$.

6. As cordas AB e CD de um círculo ω se encontram no ponto E de forma que $AD = AE = EB$. Seja F um ponto do segmento CE tal que $ED = CF$. A bissetriz do ângulo AFC encontra o arco DAC no ponto P. Prove que A, E, F e P são concíclicos.

7. Seja $\triangle ABC$ um triângulo e ω seu circumcírculo. Seja M o ponto médio de BC e D a interseção entre a simediana de A e ω. A reta DM intersecta ω em P. Prove que $AP \parallel BC$.

Problemas Difíceis

8. (Irã 2017 3 Round P3) Seja ABC um triângulo acutângulo. Seja M o ponto médio de BC e seja H o ortocentro de ABC. Seja $F \equiv BH \cap AC$ e $E \equiv CH \cap AB$. Suponha que X seja um ponto em EF tal que $\angle XMH = \angle HAM$ e A, X estejam no lado distinto de MH. Prove que AH bisecta MX.

9. (APMO 2013 P5) Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em um círculo ω, e seja P um ponto sobre a extensão de AC tal que PB e PD sejam tangentes a ω. A tangente em C intercepta PD em Q e a reta AD em R. Seja E o segundo ponto de interseção entre AQ e ω. Prove que B, E, R são colineares.

10. Dado um triângulo ABC tal que seu incírculo é tangente aos lados BC, AC, AB nos pontos D, E, F, respectivamente; BE e CF intersectam o incírculo novamente nos pontos P e Q, respectivamente. Se EF intersecta a BC no ponto R, mostre que P, Q, R são colineares.

11. (Índia EGMO TST 3 2021) Num triângulo acutângulo ABC de incentro I e circuncírculo γ, F está em AB tal que $IF \perp AB$. A bissetriz externa de $\angle ACB$ toca AB em L. O ponto K está no arco menor BC de γ tal que $\angle CKI = \angle IKL$. KI toca γ novamente em D. Prove que $\angle ACF = \angle DCB$.