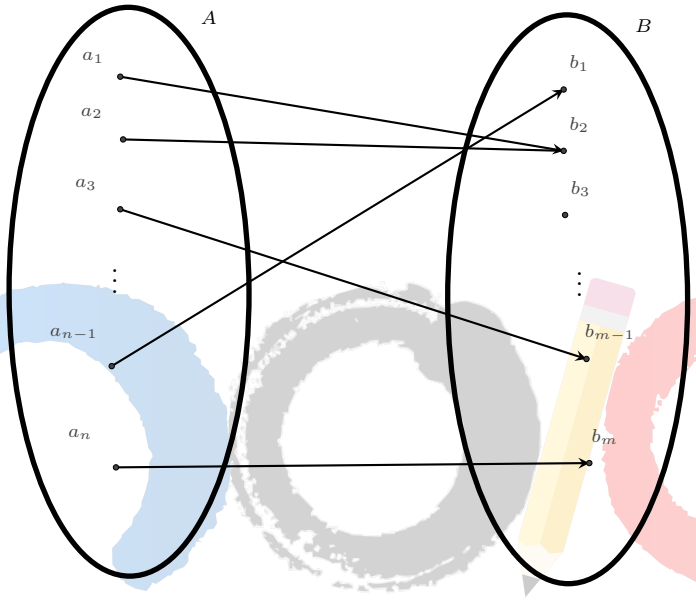
Equações Funcionais

Por Gabriel Bastos, João Lemos, Luca Zanardi e Matheus Alencar

1 O que é uma função?

Uma função entre dois conjuntos A, B $f : A \to B$ é definida como uma associação de elementos do conjunto A para o conjunto B em que cada elemento de A é associado a exatamente um de B. Chamamos A do **domínio** de f e B de **contradomínio** de f. Um jeito fácil de entender uma função é ver um exemplo visual:



Aqui, definimos uma função $f : A \to B$, onde $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ e $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$. No exemplo, definimos $f(a_1) = b_2, f(a_2) = b_2, f(a_3) = b_{m-1}, f(a_{n-1}) = b_1, f(a_n) = b_m$.

Veja que podem existir elementos em B que não foram associados por nenhum elemento de A, como b_3 no exemplo, assim como podem existir elementos de B que foram associados mais de uma vez por um elemento de A, como b_2 no exemplo. Tudo que importa é que cada elemento de A tenha exatamente um elemento associado em B por f!

Finalmente, além desses dois nomes para A e B, definimos um terceiro conjunto: $Im(f)$. Esse é o conjunto de elementos de B que foram associados por pelo menos um elemento de A. Ou seja,

$$Im(f) = \{b \mid b \in B, \exists\ a \in A \text{ tal que } f(a) = b\}$$

2 Como funciona uma equação funcional?

Uma equação funcional não é nada além de uma equação comum, com uns f's no meio. geralmente o que um problema gira em volta é de achar todas as funções que cumpram o enunciado. Dada a generalidade de uma função parece estranho existirem poucas que cumpram certas restrições, né? Mas essa é a parte legal de equações funcionais. Geralmente quando elas caem em olimpíadas elas não tem soluções estranhas! Vejamos um problema para começar o nosso estudo:

(Exemplo 1): Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Ache todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x+y) + xy = f(x)f(y)$$

Para todo par de reais x,y.

Como pode ser possível achar soluções pra uma equação como essa sem nenhuma informação sobre f? Bom, o segredo é que só de uma equação existir já temos muito informação sobre a função. Vejamos o que podemos fazer aqui:

Primeiro, vamos tentar brincar um pouco com a função: O que acontece se fizermos $x = y = 0$? Teremos:

$$f(0+0) + 0^2 = f(0)^2 \implies f(0)^2 = f(0) \implies f(0) = 0 \text{ ou } 1$$

Já reduzimos $f(0)$ pra dois valores diferentes com isso. Assim, testemos esses valores dividindo-os em casos!

Caso 1: $f(0) = 0$

Assim, se fizermos $y = 0$ na nossa equação original, teremos que

$$f(x) + x \cdot 0 = f(x)f(0) = 0 \implies f(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

Assim, temos uma possível solução!

NOTA IMPORTANTE: Sempre que você achar uma possível solução para uma equação funcional é possível que ela não funcione como solução pra equação original, assim, durante uma solução é importante que você escreva explicitamente se a função realmente funciona ou não! Continuando...

$f(x) = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$ não funciona, pois, se funcionasse, $0+xy = f(x+y)+xy = f(x)f(y) = 0, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$. Logo xy sempre vai ser $0 \to$ Um absurdo! Assim, esse caso não tem solução.

Caso 2: $f(0) = 1$

Se $x = 1, y = -1$, Conseguimos:

$$f(1-1) + 1 \cdot (-1) = f(1)f(-1) \implies 0 = f(0) - 1 = f(1)f(-1) \implies f(1) = 0 \text{ ou } f(-1) = 0.$$

Assim, seja $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(k) = 0 \implies x = k, y \mapsto y - k$

(Não se assuste com a seta, ela só significa que estamos trocando y por $y - k$)

$$f(y) + k(y-k) = f(k)f(y-k) = 0 \implies f(y) = k^2 - ky$$

Como temos duas possibilidades para k (1 ou -1), basta ver as duas: $f(y) = 1 - y \;\forall\; y \in \mathbb{R}$ ou $f(y) = 1 + y, \;\forall\; y \in \mathbb{R}$. Se você testar vai ver que essa funções funcionam! Deixamos como tarefa de casa para você!

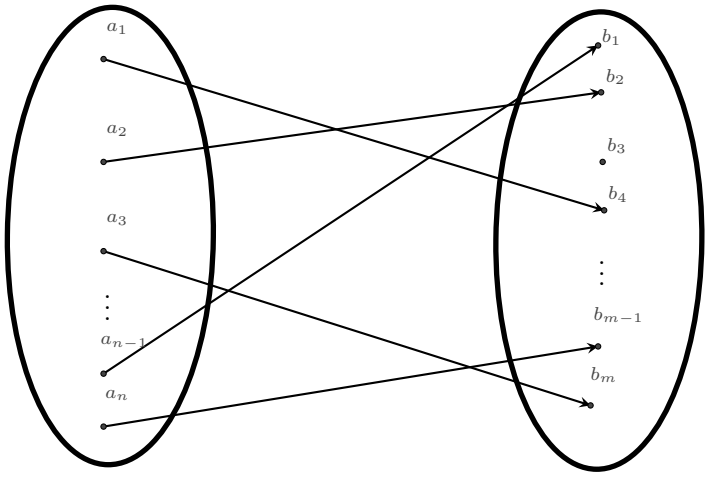
3 Ideias comuns

Agora que você já entende como funciona uma equação funcional, é importante saber que existem ideias comuns para resolver equações funcionais "feijão com arroz" de olimpíadas. Desse modo, nada tão natural quanto tentar começar a entender quais são tais ideias.

Primeiro, vamos dar algumas definições e como elas podem ser usadas para o nosso auxílio.

3.1 Injetividade, Sobrejetividade e Bijetividade

Primeiramente, o que é um função injetiva? Lembra da nossa imagem inicial mandando flechas de um conjunto pro outro? então, agora vamos imaginar que nenhuma flecha esteja ligada ao mesmo cara em B também, ou seja, que cada associação é única:



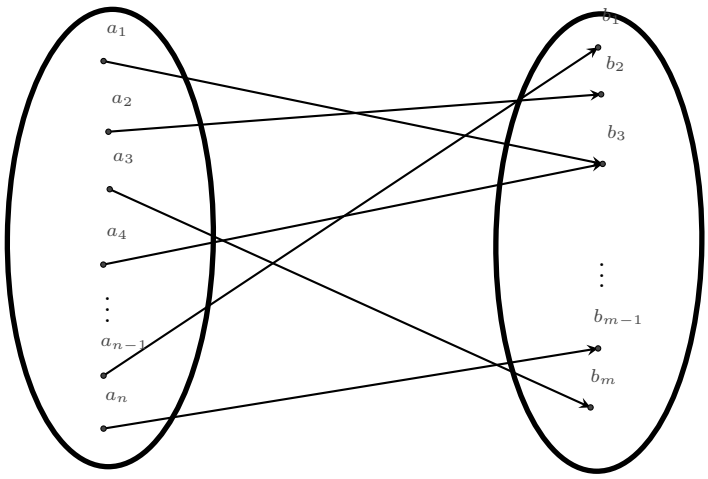
(Note que, como na figura, ainda podem existir elementos de B que nunca foram associados a um elemento de A.)

Veja que essa condição com essa definição geométrica estranha pode ser fraseada de um jeito mais simples da seguinte forma:

Definição 1 (Injetividade): Sejam $x, y \in A$. A função $f : A \to B$ é injetiva (ou injetora) se, e somente se, $f(x) = f(y) \implies x = y$

Portanto, uma propriedade legal que temos logo de cara de funções injetivas é que podemos *"cortar"* f's na função.

Para nossa próxima definição, vejamos o que é uma função sobrejetora: É uma função em que: Nos lembrando de novo da imagem inicial, tem todos os elementos de B associados ao menos uma vez:



(Lembre-se de não confundir com injetividade, ou seja, ainda podem existir dois elementos de A associados ao mesmo elemento em B)

Assim, de novo, para uma definição mais formal:

Definição 2 (Sobrejetividade): A função $f : A \to B$ é sobrejetiva (ou sobrejetora) se, e somente se, Dado $b \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = b$.

Assim, podemos achar elementos que foram associados a qualquer cara de B. Geralmente problemas olimpícos usarão isso para achar elementos específicos que fazem parte da imagem de f. Como 0, 1 ou números muito grandes.

Por último mas não menos importante, essa definição é normalmente utilizada para diminuir o número de vezes que você precisaria escrever as palavras *Sobrejetiva* e *Injetiva* em uma solução de problemas olimpícos. Também temos uma função *Bijetiva*! Que é uma função *Sobrejetiva* e *Injetiva* ao mesmo tempo!

Agora que já sabemos as definições dessa seção, vejamos alguns problemas e propriedades legais de funções *Injetivas, Sobrejetivas e Bijetiva*:

Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y$$

Tomando $x = 0$, temos que

$$f(f(y)) = f(0)^2 + y$$

Porém, veja que isso implica que a imagem de f é sobrejetora, já que $y + f(0)^2$ é uma função sobrejetora!
Assim, seja c tal que $f(c) = 0$:
Tomando $x = c$,

$$\implies f(f(y)) = y$$

Uma involução! Assim, como já visto antes, temos que f é bijetora!
Além disso, já tínhamos que

$$f(f(y)) = y + f(0)^2$$

Logo, $f(0)^2 = 0 \implies f(0) = 0$. Tomando $y = 0$:

$$\implies f(xf(x)) = f(x)^2$$

Se trocarmos $x \mapsto f(x)$

$$\implies f(x)^2 = f(xf(x)) \overset{(*)}{=} f(f(x)f(f(x))) = f(f(x))^2 = x^2$$

$(*)$: é verdade pois $f(f(x)) = x$
Finalmente, temos que $f(x) = \pm x$, para todo x. Isso nos dá poucas soluções, certo? Errado!
Veja que o que provamos é para o f em específico de um x, não um valor geral para todo x.
De fato, normalmente em problemas de olimpíadas não vão existir soluções estranhas, mas, ainda assim, podem existir soluções desse tipo de equação que "misturam" valores. Então, em tese, poderiam existir alguns valores em que $f(x) = x$ e outros em que $f(x) = -x$. Para conseguirmos eliminar essas possíveis soluções que misturam os resultados de f, suponha que existam a, b tais que $f(a) = a$ e $f(b) = -b$. Tomando $x = a, y = b$

$$\implies f(a^2 - b) = a^2 + b \implies a^2 + b = \pm(a^2 - b)$$

Em ambos os casos a ou b têm que ser 0 (Confira!), que é o único caso em que $f(x) = \pm x$ não faz diferença no sinal. Logo, não existe uma solução f que misture os dois casos. Finalmente, temos que

$$f(x) = x \ \forall \ x \in \mathbb{R} \text{ ou } -x \ \forall \ x \in \mathbb{R}$$

Completando assim o problema. (Deixamos testar os casos para casa, mas eles funcionam!)
Às vezes, estudar equações do tipo $f(x) = x$, $f(x) = f(-x)$, etc. pode ser útil para descobrir propriedades interssantes sobre f, em especial se temos ideia de quais funções satisfazem a condição dada (por exemplo, se queremos mostrar que $f(x) = 1/x$ é a única solução para uma funcional, e obtermos x tal que $f(x) = x$, vamos querer provar que $x = \pm 1$). O próximo exemplo ilustra essa ideia.

Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(xf(y) + f(x)) = 2f(x) + xy$$

para todos x, y reais.

Solução:
Note que $x \mapsto x + 1$ satisfaz as condições do enunciado. Vamos provar que essa é a única solução da equação do problema.
1. f é uma bijeção.
Prova: Se $f(a) = f(b)$, faça $y = a$ e $y = b$ na equação original; obtemos $f(xf(a) + f(x)) = 2f(x) + xa$ e $f(xf(b) + f(x)) = 2f(x) + xb$. Como $f(a) = f(b)$, igualando os lados direitos das equações acima obtemos $xa = xb$ para todo x real. Logo, $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$. Assim, f é injetiva.
Para mostrar que f é sobrejetiva, basta ver que, fixado x, o lado direito da equação original vira uma função linear em y. Logo, f deve ser sobrejetiva.
2. $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(-1) = 0$, $f(-2) = -1$ e $f(-3) = -2$.
Prova: Tome c tal que $f(c) = 0$ (que existe pela sobrejetividade de f). Se $c = 0$, faça $y = 0$ para obter $f(f(x)) = 2f(x)$. Como f é sobrejetora, isso nos diz que $f(x) = 2x$ para todo x. Mas essa função não satisfaz a condição do enunciado. Logo, $c \neq 0$. Tomando $x = c$, obtemos $f(cf(y)) = cy$ (*). Fazendo $y = 0$, temos $f(cf(0)) = 0$. Como f é injetiva, $c = cf(0) \Rightarrow f(0) = 1$ pois $c \neq 0$. Agora, tomando $y = c$ em (*), temos $f(cf(c)) = c^2 \Rightarrow f(0) = c^2 \Rightarrow c = \pm 1$. Fazendo $x = 0$ na equação original, temos $f(f(0)) = 2f(0) \Rightarrow f(1) = 2$. Logo, $c = -1$ e $f(-1) = 0$.
Fazendo $x = -1$ na equação original, temos $f(-f(y)) = -y$ (**). Tomando $y = 1$, obtemos $f(-f(1)) = -1 \Rightarrow f(-2) = -1$. Além disso, $y = -1$ na equação original nos dá $f(f(x)) = 2f(x) - x$, e $x = 1$ nos dá $f(2) = 2f(1) - 1 = 3$. Fazendo $y = 2$ em (**) obtemos $f(-3) = -2$.
3. $f(x) = x + 1$ para todo x real.
Prova: Tomando $y = -2$ na equação original, obtemos $f(f(x) - x) = 2(f(x) - x)$. Assim, vamos ver quais são os t que são solução de $f(t) = 2t$. Se $f(t) = 2t$, faça $x = t$. Ficamos com $f(tf(y) + 2t) = 4t + ty$. Tomando $y = -3$, temos que $f(0) = 4t - 3t \Rightarrow t = 1$. Logo,

$f(t) = 2t \Rightarrow t = 1$. Assim, como $f(f(x) - x) = 2(f(x) - x)$, temos $f(x) - x = 1 \Rightarrow f(x) = x + 1$ é a única solução da equação original.

3.2 Paridade e Periodicidade

algo muito comum de se pensar pensando em problemas de funcionais geralmente é como seria bom se pudéssemos eliminar termos específicos da equação. e um dos termos que mais aparecem numa equação quando tentamos fazer isso é o $f(-x)$. Desse modo, é natural pensar modos de trabalhar com esse tipo de situação. Um dos mais comuns é tentando provar algo sobre a paridade de uma função!
Paridade pode ser um nome esquisito se você já o viu em outro canto, ele não era pra significar algo sobre números pares ímpares? Então, para funções temos a seguinte definição:

Definição 3: Se, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que $f(-x) = -f(x)$, chamamos a função f de ímpar.
E se, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que $f(x) = f(-x)$, chamamos a função f de par.

Tentar achar algo sobre a paridade de uma função é sempre um passo útil nos problemas que veremos nesse capítulo, e, por enquanto, pode parecer uma definição um pouco esquisita, mas vejamos como podemos usar ela:

3.3 Aditividade e Multiplicidade

Enquanto passeamos por funções nos reais, é muito natural de se pensar numa certa função simples, inocente e com soluções aparentemente fáceis:

$$\boxed{f(x + y) = f(x) + f(y)}$$

Bonita, não? Essa equação funcional é conhecidade popularmente como equação de Cauchy! Assim como os problemas já vistos antes, vamos tentar achar propriedades legais sobre uma função desse tipo:
Primeiro, como em todo bom problema de equações funcionais, é importante saber algumas funções que cumprem o enunciado: Veja que, claramente, $f(x) = x$ é uma função que funciona para este enunciado. Assim, é natural tentar achar quais $f(x) = ax + b$, ou seja, funções lineares, funcionam:

$$\begin{aligned} f(x + y) = f(x) + f(y) &\iff a(x + y) + b = ax + b + ay + b = a(x + y) + 2b \\ &\implies b = 2b \implies b = 0 \end{aligned}$$

Assim, as únicas soluções lineares possíveis são $f(x) = ax$, para algum $a \in \mathbb{R}$. Além disso, com um pouco mais de trabalho você poderá notar que essa equação não tem soluções que são funções quadráticas (Você pode tentar fazer isso em casa!). Isso nos leva a imaginar que as únicas soluções são essas mesmo: $f(x) = ax$. Vamos tentar provar isso!
Para começarmos, é fácil ver que $f(0) = 0$, já que, fazendo $x = y = 0$ na equação original conseguiremos que

$$2f(0) = f(0) \implies f(0) = 0$$

Além disso, se fizermos $y = -x$, teremos:

$$f(x) + f(-x) = f(0) = 0 \implies f(x) = -f(-x)$$

Ou seja, f é ímpar!
Agora, como poderemos possivelmente chegar que $f(x) = ax$? Bem, por desencargo de consciência, a partir de agora chamaremos $f(1) = a$. Veja que, tomando $x = y = 1$, temos que

$$f(2) = 2a$$

E tomando $x = 2, y = 1$ Conseguimos que

$$f(3) = f(2) + f(1) = 2a + a = 3a$$

Parece promissor! Vamos tentar provar que

$$f(nx) = nf(x), \forall\ n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$$

Para isso, faremos indução em n para provar o enunciado para $n \geq 0$ e usar a paridade da função para provar o outro lado:

Inicialmente, para nosso caso base de indução, veja que $f(2x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$.
Agora, a nossa hipótese será que para algum $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ o enunciado é verdade. Assim, vamos querer provar o enunciado para $k+1$:
Temos que

$$f((k+1)x) = f(kx) + f(x) = kf(x) + f(x) = (k+1)f(x)$$

Como queríamos.
(Isso prova diretamente que o enunciado também é válido para $n < 0$ pela paridade!)
Por agora, veja que isso já nos prova que a imagem de um número racional cumprirá o enunciado, pois:

$$qf(\frac{p}{q}) = f(p) = pf(1) = ap \implies f(\frac{p}{q}) = a \cdot \frac{p}{q}$$

Logo, faz sentido que as únicas soluções que podem cumprir o enunciado sejam $f(x) = ax$, como queríamos. Afinal, já provamos para racionais. isso já dá quase todos os números reais, né?
Então, a resposta, por incrível que pareça, é que não! Provar para racionais ainda está longe de provar para os reais para a maioria das funções! Por incrível que pareça, essa equação funcional tem muitas soluções completamente esquisitas. Para ficar mais fácil de entender como existem soluções estranhas para a equação de Cauchy, o *Evan chen* dá o exemplo da seguinte função em $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ($\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ é o mesmo que os números que podem ser escritos como $a + b\sqrt{2}$, onde a e b são racionais):

$$\boxed{f(a + b\sqrt{2}) = b + a\sqrt{2}, \forall\ a, b \in \mathbb{Q}}$$

Pois é né, a vida não é sempre um morango. Às vezes nossas equações funcionais tem soluções estranhas. É importante que tenhamos a noção de quando as equações funcionais tem esses chamados "monstros"! Alguns problemas no percurso serão baseados em eliminar casos esquisitos como esse, mas, às vezes, como nessa equação, os casos esquisitos também são solução!
Agora que já temos ideia de como funciona a primeira equação de cauchy, podemos tentar outras coisas similares - Como já tentamos soluções com uma equação que simula adição, vamos tentar uma equação que simula produtos:

$$\boxed{f(xy) = f(x)f(y)}$$

Parecida, então, como na anterior, devemos ter soluções estranhas. Assim, tentemos fazer algo parecido à da anterior:
Primeiramente, $f(1) = 1$ ou 0, pois, fazendo $x = y = 1$, temos:

$$f(1)^2 = f(1)$$

Se $f(1)$ for 0, teremos que $0 = f(1)f(x) = f(x)$ para todo x, nos dando solução $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Caso contrário, tome $y = \frac{1}{x}$:

$$\implies f(x)f(\frac{1}{x}) = f(1) = 1 \implies f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{f(x)}$$

Isso nos lembra um pouco a definição de paridade, certo? só que ao invés de inversos em adição, temos inversos em multiplicação. Como podemos tentar fazer algo de análogo para a função aditiva anterior? Um jeito fácil de transformar produtos em somas é usando logaritmos e expoentes:

$$\log ab = \log a + \log b$$

Assim, seja $g(x) = \log f(x) \implies g(xy) = g(x) + g(y)$

Já chegamos mais perto, de uma possível aditividade. Como podemos tentar transformar o xy em um $x+y$? De novo, uma ideia baseada no log: Seja e o número da base do log, se tomarmos $x \mapsto e^x$ e $y \mapsto e^y$, então

$$g(e^{x+y}) = g(e^x) + g(e^y)$$

Temos uma aditividade nos expoentes!
Assim, finalmente, se

$$h(x) = g(e^x) \implies h(x+y) = h(x) + h(y)$$

Uma função aditiva, como queríamos. Assim, todas as soluções são análogas às soluções de aditivas (Então soluções estranhas existem):
Se $h(x) = \log f(e^x)$ é aditiva, então $f(e^x) = e^{h(x)} \implies f(x) = e^{h(\log x)}$, onde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função aditiva.
Esses dois problemas são muito conhecidos e usados constantemente em problemas de equações funcionais olimpícos. Geralmente, quando resolvemos problemas e chegamos na equação de Cauchy existem outras condições que nos levam a provar que $f(x) = kx$ para algum k real (Que são todas as soluções "normais" da equação).
Existem alguns metódos que mostraremos agora que recorrentemente são usados para provar que as únicas soluções de algumas f's aditivas são da forma kx. Para o intuito desse material, vamos dar provas simples desses casos, mas todos são consequência direta do que provamos nesse material.

- Se f é monótona (Crescente ou Decrescente)
  Prova: Vamos supor sem perda de generalidade que $f(1) > 0 \implies f$ crescente. Seja x um número irracional. Vejamos que $f(x) \geq ax$, pois para todo real x existe um racional menor que e suficientemente próximo de x. Assim, se $f(x) < ax \implies$ basta tomar um racional r maior que $\dfrac{f(x)}{a}$ e menor que x. Assim, temos que $f(x) > f(r) \geq ar \geq f(x) \to$ *Abs!*.
  Analogamente, $f(x) \leq ax \implies f(x) = ax, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

- Se f é limitada em algum intervalo de tamanho maior que 0
  Prova: Suponha que exista um x irracional tal que $f(x) \neq ax$. Seja $f(x) = a'x, a' \in \mathbb{R}$. Além disso, como f é limitada (supomos SPG que é limitada por baixo) em algum intervalo > 0, seja $[s,t]$ tal intervalo e M o limite por baixo dos f's nesse intervalo. Sejam p e q números racionais a serem escolhidos. Como f cumpre cauchy, temos que

  $$\boxed{f(p+xq) \overset{(*)}{=} f(p) + f(xq) = ap + a'xq = ap + axq + (a'-a)xq}$$

  $(*)$: Lembre-se que $f(px) = pf(x)$ para todo p racional, x real.
  Assim, se escolhermos q tal que $(a'-a)xq$ seja muito menor que 0 (tal q existe pois $a' \neq a$ e p tal que $p + xq \in [s,t]$ (tal p existe, pois há um racional entre $s - xq$ e $s - xq$), veja que $ap + axq + (a'-a)xq < M \implies f(p+xq) < M \to$ *Abs!*

- Se f é contínua.
  A prova deste item será dada na seção **3.5**.
  Assim, vamos aos problemas!

  > Ache todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que
  >
  > $$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y)$$
  >
  > Para todos $x, y \in \mathbb{R}$

  Solução:
  Primeiro, veja que todas as funções da forma $x \mapsto ax$, com a real, satisfazem o enunciado.
  Vamos provar que todas as funções que satisfazem são dessa forma.
  1. $f(x) = -f(-x)$ para todo x.
  Prova:
  Fazendo $x \leftarrow -x$, obtemos que $f(x^2 - y^2) = -xf(-x) - yf(y)$, de modo que o resultado segue para $x \neq 0$. Mas, fazendo $y \leftarrow x$, obtemos que $f(0) = xf(x) - xf(x) = 0$.
  2. f é uma função aditiva.
  Prova:

Fazendo $y = 0$ na equação original, concluímos que $f(x^2) = xf(x)$ e, fazendo $x = 0$, $f(-y^2) = -yf(y)$. Assim, $f(x^2 - y^2) = f(x^2) + f(-y^2)$. Ou seja, $f(a + b) = f(a) + f(b)$ para todos $a \geq 0$ e $b \leq 0$. Assim, usando que f é ímpar, concluímos que $f(a + b) + f(-b) = f(a)$. Para mostrar que $f(u + v) = f(u) + f(v)$ para todos $u, v \geq 0$, basta tomar $b = -v$ e $a = u + v$. Usando que f é ímpar, $f((-u) + (-v)) = f(-u) + f(-v)$, de modo que $f(u + v) = f(u) + f(v)$ para todos u, v reais.

3. $f(x) = ax$ para todo x, onde a é um real fixo.

Prova:

Seja $f(1) = a$. Fazendo $(x, y) \leftarrow (x + 1, x)$ no enunciado, temos que $2f(x) + a = f(2x + 1) = (x + 1)f(x + 1) - xf(x) = (x + 1)f(x) - xf(x) + (x + 1)a$, onde usamos a aditividade diversas vezes. Mas $2f(x) + a = f(x) + (x + 1)a \Rightarrow f(x) = ax$, como queríamos.

Prove que a única função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditiva e multiplicativa que existe é $f(x) = x$

3.4 Funções Crescentes, Decrescentes e Linearidade

Ache todas as $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que, para quaisquer inteiros a e b,

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b))$$

Veja que, por mais que o lado esquerdo da equação seja incrivelmente volátil, nosso lado direito parece relativamente fácil de controlar. Por exemplo, se fixarmos uma soma $s = a + b$ e acharmos b em função de a ($b = s - a$) temos algo completamente controlado para o lado direito. Isso parece bom, certo? Vejamos que se fixarmos $s = a + 1$,

$$f(2) + 2f(a) = f(f(a + 1)) = f(0) + 2f(a + 1)$$

Logo,

$$f(2) - f(0) = 2(f(a + 1) - f(a)) \implies f(a + 1) - f(a) = \frac{f(2) - f(0)}{2}$$

Que é uma constante! Assim, temos que f é linear.

Desse modo, temos que $f(x) = mx + n, m, n \in \mathbb{Z}$. Vamos testar para ver quais f's lineares satisfazem o enunciado:

$$2am + n + 2(mb + n) = f(m(a + b) + n) = m^2(a + b) + mn + n$$

Se tomarmos $b = 0$, temos que

$$2am + n + 2n = m^2a + mn + n, \forall\ a \in \mathbb{Z}$$

$$\implies am(m - 2) = n(2 - m)$$

Como o lado direito é constante, o lado esquerdo também tem que ser. Mas se $m(m - 2) \neq 0$, $am(m - 2)$ não pode ser constante. Logo, $m(m - 2) = 0 \implies m = 0$ ou $m = 2$.

Se $m = 0$ a função é constante e $f \equiv 0$ é a única que funciona.

Se $m = 2$ você poderá provar que $f(x) = 2x + n$ sempre funciona (Confira!)

Quando estamos resolvendo um problema de equações em que queremos provar que alguma função é linear, uma boa ideia é forçar igualdades entre expressões lineares em uma variável (se $ax + b = cx + d$ para todo x real, sabemos que $a = c$ e $b = d$). Isso pode nos proporcionar igualdades bastante fortes e úteis. A seguir, mostramos um exemplo para ilustrar como essa ideia é poderosa.

Encontre todos os pares de funções (f, g) tais que $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e, para todos x, y reais,

$$g(f(x + y)) = f(x) + (2x + y)g(y).$$

Solução:

Os pares $(x^2 + c, x)$, com $c \in \mathbb{R}$, e $(0, 0)$ claramente funcionam. Vamos mostrar que todos os pares assumem alguma dessas formas.

1. $g = ax + b$, para algumas constantes reais a, b.
Prova:
Fazendo $y = 0$ na equação original, temos $g(f(x)) = f(x) + 2xg(0)$. Assim, $g(f(x+y)) = f(x+y) + 2(x+y)g(0)$, de modo que $f(x+y)+2(x+y)g(0) = f(x)+(2x+y)g(y) \iff f(x+y)-f(x) = x(2g(y)-2g(0))+y(g(y)-2g(0))$. Fixando y, temos que $f(x+y) - f(x)$ *é uma função linear em* x:

$$f(x+y) - f(x) = x(2g(y) - 2g(0)) + y(g(y) - 2g(0));$$

$$f(x+y+z) - f(x+y) = (x+y)(2g(z) - 2(0)) + z(g(z) - 2g(0)) =$$
$$x(2g(z) - 2g(0)) + y(2g(z) - 2g(0)) + z(g(z) - 2g(0));$$
$$f(x+y+z) - f(x) = x(2g(y+z) - 2g(0)) + (y+z)(g(y+z) - 2g(0)) \ (1).$$

Somando as duas primeiras equações escritas acima, temos

$$f(x+y+z) - f(x) = x((2g(y) - 2g(0)) + (2g(z) - 2g(0)))+$$
$$y(g(y) - 2g(0)) + y(2g(z) - 2g(0)) + z(g(z) - 2g(0)) \ (2).$$

Podemos igualar os lados direitos de (1) e (2) e, fixando y e z, olhar a igualdade como uma igualdade de funções lineares em x, ou seja, teremos coeficientes angulares e termos independentes iguais. A igualdade de coeficientes líderes diz que $2g(y+z) - 2g(0) = 2g(y) - 2g(0) + 2g(z) - 2g(0) \implies g(y+z) = g(y) + g(z) - g(0)$. A igualdade entre termos independentes diz que

$$(y+z)(g(y+z) - 2g(0)) = y(g(y) - 2g(0)) + y(2g(z) - 2g(0)) + z(g(z) - 2g(0)) \implies$$
$$(y+z)(g(y) + g(z) - 3g(0)) = y(g(y) - 2g(0)) + y(2g(z) - 2g(0)) + z(g(z) - 2g(0))$$

A simplificação dessa última equação nos dá que $yg(z) - yg(0) = zg(y) - zg(0) \implies \frac{g(y)-g(0)}{y} = \frac{g(z)-g(0)}{z}$ para todos y, z reais não nulos. Ou seja, $\frac{g(x)-g(0)}{x}$ é constante para $x \neq 0$, isto é, $g(x) = ax + g(0)$ para $x \neq 0$. Mas essa fórmula também vale para $x = 0$, de modo que $g(x) = ax + b$.
2. $f(x) = g(x) = 0$ para todo x real ou $f(x) = x^2 + c$ e $g(x) = x$ para alguma constante real c.
Prova:
Usando que $g(f(x)) = f(x) + 2xg(0)$, temos que $af(x) + b = f(x) + 2xb \implies f(x)(a-1) = b(2x-1)$. Se $a = 1$, devemos ter obrigatoriamente $b = 0$, ou seja, $g(x) = x$. Como $f(x+y) - f(x) = x(2g(y) - 2g(0)) + y(g(y) - 2g(0)) = 2xy + y^2$, tomando $x = 0$, ficamos com $f(y) = f(0) + y^2 \implies f(x) = x^2 + c$, para algum c real.
Se $a \neq 1$, então $f(x)(a-1) = b(2x-1)$ nos diz que $f(1/2) = 0$. Usando que $f(x+y) - f(x) = x(2g(y) - 2g(0)) + y(g(y) - 2g(0)) = 2axy + ay^2 - by$, podemos tomar $x = 1/2$ e obter $f(y + 1/2) = ay^2 + ay - by$. Assim, $f(x + 1/2)(a-1) = b(2(x + 1/2) - 1) = 2bx \implies (ax^2 + ax - bx)(a-1) = 2bx$ para todo x real. Mas o lado esquerdo é uma função de grau 2 em x, enquanto o lado direito é uma função de grau 1. A igualdade só pode ocorrer se $a = 0$, o que diz que $-bx = 2bx \implies 3bx = 0 \implies b = 0$, o que dá $f(x) = g(x) = 0$ para todo x real.

Em diversos problemas de equações funcionais, encontramos relações de uma função que nos dão pontos colineares no plano. Por exemplo, a equação

$$(y-z)f(x) + (z-x)f(y) + (x-y)f(z) = 0$$

implica que os pontos $(x, f(x))$, $(y, f(y))$ e $(z, f(z))$ são colineares (verifique!). Assim, é importante estar atento para notar que uma equação nos fornece pontos colineares. Os próximo exemplo ilustra que essa ideia, junta com outras informações, provam que uma função é linear.

Encontre todas as funções $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ que satisfazem

$$xf(x) + yf(y) = (x+y)f\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right) \tag{1}$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Solução: Ao tentar mostrar que f é uma função injetiva, sobrejetiva, etc., rapidamente percebemos que é difícil sair do lugar utilizando essas técnicas. Assim, iremos, inicialmente, fazer algumas observações que podem ser facilmente verificadas:

1. A função $x \mapsto x$ satisfaz;
2. A função $x \mapsto c$, com $c \in \mathbb{R}^+$ uma constante satisfaz;
3. Se f satisaz o enunciado, então $c \cdot f$, com $c \in \mathbb{R}^+$, também satisfaz;
4. Se f, g satisfazem a condição do enunciado, então $f + g$ também satisafaz.

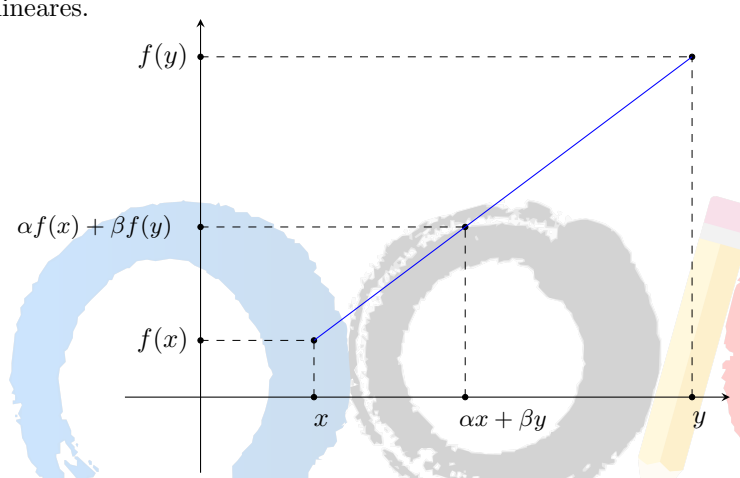
Essas propriedades, em especial as propriedes 3 e 4, nos levam a crer que as únicas soluções desse problema são da forma $ax + b$, ou seja, funções lineares. Para isso, dividiremos a resolução em partes.

1. Os pontos $(x, f(x))$, $(y, f(y))$ e $(\frac{x^2+y^2}{x+y}, f(\frac{x^2+y^2}{x+y}))$ são colineares.

Prova: Seja $\alpha = \frac{x}{x+y}$ e $\beta = \frac{y}{x+y}$. Note que $\alpha + \beta = 1$, e que podemos reescrever (1) como

$$\alpha f(x) + \beta f(y) = f(\alpha x + \beta y),$$

e essa equação, junta com a condição $\alpha + \beta = 1$, implica que $(x, f(x))$, $(y, f(y))$ e $(\frac{x^2+y^2}{x+y}, f(\frac{x^2+y^2}{x+y}))$ são colineares.



Assim, intuitivamente, geramos infinitos pontos em uma mesma reta, e, como $\frac{x^2+y^2}{x+y} = \left(\frac{x}{x+y}\right) x + \left(\frac{y}{x+y}\right) y$ é uma espécie de média de x e y, então talvez consigamos encontrar pontos em qualquer intervalo $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^+$. Tendo isso em vista, somos motivados a provar que

2. Seja $S \subseteq \mathbb{R}^+$ um conjunto que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Existem $a < b$ tais que $a, b \in S$;
2. Se dois dentre os números $(x, y, \frac{x^2+y^2}{x+y})$ (todos eles positivos) estão em S, o terceiro deles também está.

Então, S é denso em $\mathbb{R}^+$.

Prova:

Primeiro, mostramos que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+$, existem $x, y \in S$ tais que $y < \alpha < x$. Para isso, dados $a > b \in \mathbb{R}^+$, veja que $a > \frac{a^2+b^2}{a+b} > b$, uma vez que $\frac{a^2+b^2}{a+b} = (\frac{a}{a+b})a + (\frac{b}{a+b})b = ca + (1-c)b$ é uma combinação linear de a, b, com $0 < c, 1 - c < 1$. Assim, dados $a > b \in S$, defina $c_0 > 0$ como o número tal que $a = \frac{c_0^2+b^2}{c_0+b}$ (veja que $c_0 \in S$ pela definição de S e $c_0 > a$), e defina indutivamente $c_{n+1} > 0$ como o número tal que $c_n = \frac{c_{n+1}^2+b}{c_{n+1}+b}$. Note que, como $c_n, b \in S$, temos que $c_{n+1} \in S$, e $c_{n+1} > c_n > a > b$ para todo $n \geq 0$. Suponha que a sequência (c_n) é limitada. Como ela é monótona, existe M tal que $\lim_{n\to\infty} c_n = M$, ou seja,
$\lim_{n\to\infty} c_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n^2+b^2}{c_n+b} \Rightarrow M = \frac{M^2+b^2}{M+b} \Rightarrow M = b$, um absurdo, pois $M \geq c_n > b$. Portanto, $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$. O argumento para mostrar que existe termos suficientemente pequenos é análogo, basta considerar $c_{n+1} > 0$ como o número tal que $c_n = \frac{c_{n+1}^2+a^2}{c_{n+1}+a}$, e $b = \frac{c_0^2+a^2}{c_0+b}$.

Assim, dado um intervalo $[\beta, \alpha] \subset \mathbb{R}^+$, sabemos que existem $a, b \in S$ tais que $b < \beta < \alpha < a$, queremos encontrar $x \in S$ tal que $\beta < x < \alpha$. Suponha que tal x não exista. Vamos definir duas sequências $(p_n), (g_n)$, com (p_n) crescente e (g_n) decrescente, tais que $p_0 = b$, $g_0 = a$, e definidos $p_0, p_1, \ldots, p_n$ e $g_0, g_1, \ldots, g_m$, escolhemos $\frac{p_n^2+g_m^2}{p_n+g_m}$ como p_{n+1} se $\frac{p_n^2+g_m^2}{p_n+g_m} < \beta$, ou como g_{m+1} se

$\frac{p_n^2+g_m^2}{p_n+g_m} > \alpha$. Note que $p_n < \frac{p_n^2+g_m^2}{p_n+g_m} < g_m$, de modo que as sequências (p_n) e (g_n) são de fato crescente e decrescente, respectivamente (note também que todos esses números estão em S). Como estamos supondo que não existem números de S em $S \cap [\beta, \alpha]$, concluímos que $p_n < \beta$ e $g_n > \alpha$ para todo n. Ou seja, (p_n) e (g_n) são sequências monótonas e limitadas, o que nos diz que existem p, g tais que $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ e $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ (caso alguma dessas sequências seja finita, definimos p ou g como o maior termo da sequência), com $p \leq \beta < \alpha \leq g$. Mas, então, como alguma das sequências (p_n) ou (g_n) deve ser infinita (suponha, sem perdas, que é (g_n)), existem sequências não decrescentes $n_1, n_2, \ldots \in \mathbb{N}$ e $m_1, m_2, \ldots \in \mathbb{N}$ tais que $g_i = \frac{p_{n_i}^2+g_{m_i}^2}{p_{n_i}+g_{n_i}}$, de modo que $g = \lim_{i\to\infty} g_i = \lim_{i\to\infty} \frac{p_{n_i}^2+g_{m_i}^2}{p_{n_i}+g_{n_i}} = \frac{p^2+g^2}{p+g} \Rightarrow p = g$, absurdo, pois $p < g$ por hipótese. Com isso, mostramos que S é denso em $\mathbb{R}^+$, pois o absurdo vei de supor que não existia elemento de S em $[\beta, \alpha]$.

3. f é não decrescente.

Prova:

Se existem pontos $a < b$ com $f(a) > f(b)$, então, pelo item **2**, infinitos pontos existiriam na reta que liga $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$, que possui coeficiente angular negativo, e conseguiríamos encontrar um ponto $(c, f(c))$ que está abaixo do eixo das abscissas, o que nos daria $f(c) < 0$, absurdo.

4. f é linear.

Prova:

Sabemos por **2** que existe um conjunto denso S em $\mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = px + q$ para todo $x \in S$. Seja α um real qualquer. Tome sequências $b_1 < b_2 < \ldots$ e $c_1 > c_2 > \ldots$ tais que b_i e c_i estão em S para todo i, $b_i < \alpha < c_i$ para todo i e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha$. Por **3**, $f(b_n) < f(\alpha) < f(c_n) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} pb_n + q < f(\alpha) < \lim\limits_{n\to\infty} pc_n + q$. Assim, isso nos dá $f(\alpha) = p\alpha + q$, de modo que $f(x) = px + q$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Encontre todas as funções $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que satisfazem

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1 \quad (1)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Tome $x = 0$ e $y = f(0)$ em (1). Conseguimos que $f(-f(f(0))) = f(f(0)) - f(f(0)) - 1 = -1$
Daí, tome $y = -f(f(0))$ em (1): $f(x+1) = f(f(x)) \quad (2)$
Substituindo (2) em (1), teremos: $f(x - f(y)) = f(x+1) - f(y) - 1 \quad (3)$
Daí, plugando $y = x$ em (3), chegamos que $f(x+1) - f(x) = f(x - f(x)) + 1$
Após se analisar o problema, é razoável se assumir que soluções provavelmente serão "bonitas", como por exemplo, funções lineares. Logo, é natural tentar provar que f(x - f(x)) + 1 é constante ($\iff f(x - f(x))$ é constante).
De fato, teremos (por (2)) que $f(x - f(x)) = f(f(x - 1 - f(x)))$. Porém, note que $f(x - 1 - f(x))$ pode ser obtido por (3) plugando x como x - 1 e y como x, e temos:
$f(x - 1 - f(x)) = f(x - 1 + 1) - f(x) - 1 = -1$. Daí, $f(x - f(x)) = f(f(x - 1 - f(x))) = f(-1)$.
Assim, $f(x+1) - f(x) = f(-1) + 1 = c$ (é constante).
Logo, é fácil ver que $f(x) = ax + b$, para todo x inteiro. Plugando isso de volta em (1), obtemos:
$a(x - (ay + b)) + b = a(ax + b) + b - (ay + b) - 1 \implies ax - a^2y - ab + b = a^2x + ab - ay - 1 \implies ax - a^2y + b = a^2x + 2ab - ay - 1 \quad (4)$
Como (4) vale para todos os inteiros, em particular, se $x = y = 0$, obtemos $b = 2ab - 1 \quad (5)$
E se $x = 1, y = 0$, temos: $a + b = a^2 + 2ab - 1 \quad (6)$
Aplicando (5) em (6), chegamos que $a^2 + 2ab - 1 = a + 2ab - 1 \implies a^2 = a \implies a = 0, 1$
Se $a = 0$, em (4) concluimos que $b = -1$.
Se $a = 1$, em (4) teremos:
$b = 2b - 1$, donde b = 1.
Assim, obtivemos que as únicas funções que satisfazem o enunciado são $f(x) = -1$ e $f(x) = x + 1$, para todo x inteiro.
É fácil ver que ambas funções satisfazem o enunciado, assim as funções que satizfazem o mesmo são $f(x) = -1$ e $f(x) = x + 1$.

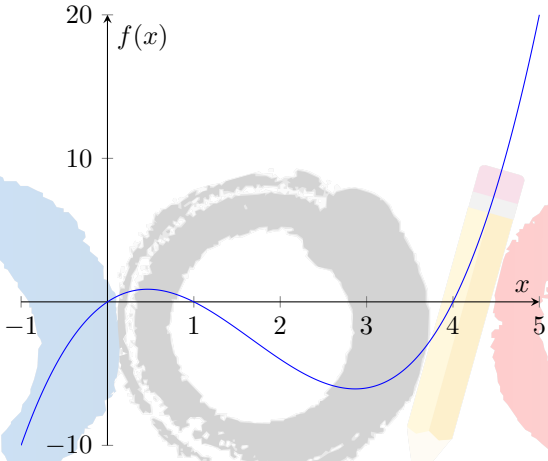
3.5 Funções contínuas

O que é uma função contínua? E por que motivo *esotérico* ela poderia ser útil?

Basicamente, funções contínuas são as funções mais "comportadas" da matemática. Mas isso não é uma definição muito boa, certo? Eu poderia definir *comportada* de várias maneiras diferentes ainda aplicáveis. Porém, uma definição interessante é uma função cujo gráfico pode ser facilmente desenhado (ou aproximado).
Faz sentido, certo? Se uma função fosse completamente aleatória seria incrivelmente difícil (se não impossível) analisar um comportamento em certos pontos ou intervalos dela. Assim, para simplificar mais ainda a definição de uma função "comportada", por que não definirmos apenas como uma função cujo gráfico não tem "buracos", ou seja, possa ser desenhado sem tirar o lapis de um papel.
Parece natural de se pensar nisso, né? Funções bonitinhas e simples desse jeito são bem interessantes, mas, por quê?
Bom, primeiramente, só o fato de ela ter um comportamento fácil de entender desses nos dá uma fórmula:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

Isso é, tecnicamente, a definição formal, e é geralmente o que usamos em problemas de olimpíada. Então, em problemas olimpicos, funções continuas são definidas dessa forma e provar esse limite em todos os pontos a prova a continuidade. De qualquer forma, vejamos algumas propriedades legais sobre funções contínuas:



Primeiramente, temos um lema conhecidíssimo sobre funções contínuas: **O teorema do valor intermediário!**
Suponha que a, b com $a < b$ são dois números reais em $Im(f)$. Se f é contínua, temos que todos os números no intervalo $[a, b]$ fazem parte de $Im(f)$.

Existem vários jeitos (inclusive jeitos simples) de provar esse teorema, porque nós não conhecemos nenhum jeito considerado "olímpico o suficiente" de provar esse teorema, prefirimos não mostrar nesse material, mas uma prova empírica desse resultado se baseia no fato de que, porque podemos desenhar tal função sem tirar o lápis do papel, é impossível que não passemos por todos os pontos entre a e b, logo, temos nosso resultado! Para uma prova mais formal, existem muitos materiais que, mesmo pesquisando no google, você conseguirá achar sobre a prova disso

Outro lema bem famoso sobre funções contínuas é que a composição de várias funções contínuas de qualquer forma ainda é contínua!
Por exemplo, se f e g são funções contínuas, $f \cdot g, f \circ g, f + g, \dfrac{f}{g}$ são todas funções contínuas ($(f \circ g)(x) = f(g(x))$). Isso também é fácil de provar, basta usar a definição de funções contínuas usando o limite.

> Prove que as únicas soluções da equação de cauchy para f contínua são $f(x) = kx$. Onde k é algum número real.

Solução: Como cauchy só tem como solução $f(x) = kx$, onde x é racional, vejamos um lema (que, na verdade, é a definição dos reais): todo número real x tem uma sequência $\{x_n\}_{\geq 1}$ de números

racionais tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

Basta ver a expansão decimal de todo número real e aproximar por algumas casas, por exemplo,

$$\pi = 3,1415926\ldots$$

Uma aproximação válida seria

$$x_1 = 3,1; x_2 = 3,14; x_3 = 3,141; x_4 = 3,1415; \ldots$$

Veja que essa sequência de números tende a π, pois, a cada valor novo da sequência chegamos mais próximos dele. Fazendo algo análogo para todo real, provamos o lema! Finalmente, vamos aplicar esse lema junto com o fato de que a função é contínua:
Seja x um real qualquer, pelo lema, existe uma sequência de racionais $\{x_n\}$ tendendo a x, logo,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x)$$

Mas $f(x_n) = x_n f(1)$, então

$$xf(1) \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} x_n f(1) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \implies f(x) = kx, \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Assim provando o que queríamos.
$(*)$: Lembramos a definição de x_n : $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

Ache todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas tais que

$$f(x + f(x)) = f(x)$$

para todo x pertencente aos reais.

Esse problema é um pouco diferente dos outros que pensamos até agora, né? Encorajamos vocês a pensar na solução de todos antes de lê-los, mas, em particular, esse problema é um problema incrivelmente instrutivo sobre problemas de equações funcionais com funções contínuas! Então, por favor, pensem nesse antes de ler a solução!

Solução: Veja que há algo de diferente nesse problema: Ele é uma equação funcional com uma variável só! Nenhum problema de equação funcional que vimos até agora só tinha uma variável. Geralmente eram duas, certo? Então como podemos fazer algo com só uma variável? Geralmente nossa ideia será encontrar informações sobre f e/ou conseguir colocar variáveis a mais na equação funcional. Bom, vamos tentar fazer isso:
Primeiramente, veja que se trocarmos $x \mapsto x + f(x)$, teremos

$$f(x + 2f(x)) = f(x + f(x) + f(x + f(x))) = f(x + f(x)) = f(x)$$

Agora, trocando $x \mapsto x + 2f(x)$,

$$f(x) = f(x + 2f(x))f(x + 2f(x) + f(x + 2f(x))) = f(x + 3f(x)$$

Com um pouco mais de trabalho, você poderá ver que, para n inteiro positivo $f(x + nf(x)) = f(x)$ (basta fazer uma indução em n).
Conseguimos colocar mais uma variável! mas, agora, o que podemos fazer só com isso? Se você tentar continuar trabalhando só com essa fórmula, não conseguirá nada. Então o que podemos fazer? Achar mais informações sobre f! Vejamos algo interessante: $x + f(x)$ é uma função injetiva. Pois, se $x + f(x) = y + f(y)$,

$$f(x) = f(x + f(x)) = f(y + f(y)) = f(y)$$

Então $x = y$. Assim, por um lema anterior, como $x + f(x)$ é uma função contínua e injetiva, ela tem que ser monótona! Agora, vejamos um outro lema interessante:
Seja r um número irracional, então a função $\{rx\}$ pode chegar suficientemente próxima de qualquer valor em $(0, 1)$ (Se você quiser saber como provar esse lema, tem muitos materiais de análise que provam ele, mas uma prova "simples" geralmente mostrada usa aproximações de r por racionais).

Assim, suponhamos que $f(x) \neq f(y)$ para algum $x, y \in \mathbb{R}$. Sabemos que existe um valor y_0 entre $f(x)$ e $f(y)$ tal que $f(y_0)$ é um número da forma $rf(x)$ entre $f(x)$ e $f(y)$ e r é um irracional (Isso se dá pelo fato de que entre dois números reais diferentes sempre há um irracional e pelo teorema do valor intermediário).

4 Juntando ideias

Ache todas funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(xf(x+y)) = f(yf(x)) + x^2$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$

Solução:
As funções $x \mapsto x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $x \mapsto -x$ para $x \in \mathbb{R}$ claramente satisfazem a condição do enunciado. A seguir, mostramos que essas são as únicas funções desejadas.
1. $f(0) = 0$.
Prova: Se $f(0) \neq 0$, faça $x = 0$ e $y = t/f(0)$ para algum t real, obtemos $f(0) = f(t) + 0^2 = f(t)$ para todo real t, isto é, f é uma função constante. Mas nenhuma função constante satisfaz a equação do enunciado. Logo, $f(0) = 0$. **2.** f é sobrejetora.
Prova: Fazendo $y = 0$ na equação dada obtemos $f(xf(x)) = f(0) + x^2 = x^2$, e, fazendo $y = -x$, obtemos $0 = f(xf(0)) = f(-xf(x)) + x^2 \Rightarrow f(-xf(x)) = -x^2$. Assim, todo real é imagem de algum número, como queríamos.
3. $f(a) = 0 \Rightarrow a = 0$.
Prova: Se $f(a) = 0 \Rightarrow a^2 = f(af(a)) = f(0) = 0 \Rightarrow a = 0$.
4. f é injetiva.
Prova: Tome reais a, b com $f(a) = f(b) \neq 0$ (se $f(a) = f(b) = 0 \Rightarrow a = b$). Fazendo $y = a - x$, na relação do enunciado, obtemos $f(xf(a)) = f((a-x)f(x)) + x^2$. Tomando $y = b - x$, obtemos $f(xf(b)) = f((b-x)f(x)) + x^2$. Como $f(a) = f(b) \Rightarrow f(xf(a)) = f(xf(b))$, temos que $f((a-x)f(x)) = f((b-x)f(x))$ para todo x real. Tomando $x = a$, teremos $0 = f(0) = f((b-a)f(a)) \Rightarrow (b-a)f(a) = 0$ pelo item 3. Como $f(a) \neq 0$ por hipótese, temos $b - a = 0$. Logo, $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$, como queríamos.
5. $f(-x) = -f(x)$. Isso nos diz que se f satisfaz o enunciado, então $g = -f$ também vai satisfazer (confira!).
Prova: Vimos no item 2 que $f(xf(x)) = x^2 = (-x)^2 = f(-xf(-x))$. Como f é injetiva, temos $xf(x) = -xf(-x)$, nos dando $f(-x) = -f(x)$ para $x \neq 0$. Mas como $f(0) = 0$, $f(-x) = -f(x)$ para todo x real.
6. $f(1) = \pm 1$. Em particular, como f satisfaz o enunciado $\Leftrightarrow -f$ satisfaz, podemos supor, sem perdas, que $f(1) = 1$ e, consequentemente, $f(-1) = -1$.
Prova: Como f é sobrejetora, tome c tal que $f(c) = 1 \Rightarrow c^2 = f(cf(c)) = f(c) = 1 \Rightarrow c = \pm 1$. Como $f(-1) = -f(1)$, devemos ter $f(1) = \pm 1$.
7. $f(x+2) - f(x) = 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Uma simples indução nos diz que $f(x + 2m) - f(x) = 2m$ para x real e $m \in \mathbb{Z}$.
Prova: Tomando $x = 1$ no enunciado, obtemos $f(f(y+1)) = f(y) + 1$ para y real. Tomando $x = -1$, temos $f(-f(y-1)) = f(-y) + 1 \Rightarrow f(f(y-1)) = f(y) - 1$ (usamos que $f(-x) = -f(x)$ na última passagem). Fazendo $y = t$ na primeira equação obtida e $y = t + 2$ na segunda, ficamos com $f(f(t+1)) = f(t) + 1$, e $f(f(t+1)) = f(t+2) - 1 \Rightarrow f(t) + 1 = f(t+2) - 1$ para t real, ou seja, $f(t+2) = f(t) + 2$ para t real.
8. $f(x) = x$ para todo x real é a única solução quando $f(1) = 1$. Isso nos diz que as únicas funções procuradas são as dadas no ínicio da solução.
Prova: Tome $x = 2m$ na equação do enunciado. Obtemos $f(2mf(y+2m)) = f(yf(2m)) + 4m^2$. Mas vimos que
$f(y + 2m) = f(y) + 2m \Rightarrow f(2mf(y+2m)) = f(2mf(y) + 4m^2) = f(2mf(y)) + 4m^2$. Ou seja, $f(2mf(y)) + 4m^2 = f(yf(2m)) + 4m^2 \Rightarrow f(2mf(y)) = f(yf(2m)) \Rightarrow 2mf(y) = yf(2m)$. Como $f(2m) = f(0 + 2m) = f(0) + 2m = 2m$, temos $2mf(y) = y \cdot 2m$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Logo, devemos ter $f(y) = y$ para todo y real, como desejado.

Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, para todos $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy).$$

Solução:
Note que as funções $x \mapsto 0$, $x \mapsto x-1$ e $x \mapsto 1-x$ satisfazem o enunciado. A seguir, mostramos que não existem outras soluções.
Caso 1. $f(0) = 0$.
Tomando $y = 0$ na equação original, obtemos $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Caso 2. $f(0) \neq 0$
1. $f(c) = 0 \iff c = 1$.
Prova: Primeiro, mostramos que existe c com $f(c) = 0$. Fazendo $x = y = 0$ na equação original, temos $f(f(0)^2) + f(0) = f(0)$, de modo que $f(f(0)^2) = 0$. Agora, tome c com $f(c) = 0$. Fazendo $y = c$, obtemos $f(0) + f(x+c) = f(cx)$ para todo x. Note que a igualdade $x + c = cx$ não ocorre para nenhum x real, já que, caso contrário, teríamos $f(0) = 0$. Assim, devemos ter $c = 1$, uma vez que $x = \frac{c}{c-1}$ é solução de $x + c = cx$ para $c \neq 1$. Como $f(f(0)^2) = 0$, temos $f(0) = \pm 1$.
É fácil ver que, se f satisfaz o enunciado, então $-f$ também satisfaz, de modo que vamos supor $f(0) = -1$ e provar que $f(x) = x - 1$ para todo x.
Tomando $y = 1$ na equação original, obtemos $f(0) + f(x+1) = f(x) \Rightarrow f(x+1) = f(x) + 1$ para todo x. Uma simples indução diz que $f(x+n) = f(x) + n$ para todo x real e n inteiro. Isso nos dá que $f(n) = n - 1$ para n inteiro.
2. f é injetiva.
Prova: Suponha que $f(a) = f(b) \Rightarrow f(a+n) = f(b+n)$. Vamos mostrar que $f(na) = f(nb)$ para todo n inteiro. De fato, fazendo $y = n$ na equação original, temos
$f((n-1)f(x)) + f(x+n) = f(nx)$. Como $f((n-1)f(a)) + f(a+n) = f((n-1)f(b)) + f(b+n)$, segue que $f(na) = f(nb)$. Fazendo $x = na$ e $y = mb$, com m, n inteiros, e, em seguida, $x = ma$, $y = nb$, temos que

$$f(f(na)f(mb)) + f(na+mb) = f(mnab)$$

$$f(f(ma)f(nb)) + f(ma+nb) = f(mnab)$$

Mas $f(f(na)f(mb)) = f(f(ma)f(nb))$ pois $f(na) = f(nb)$,
$f(ma) = f(mb) \Rightarrow f(na)f(mb) = f(ma)f(nb)$. Segue que $f(na+mb) = f(ma+nb)$, com m, n inteiros. Fazendo $n = 1$, $m = -1$, temos $f(a-b) = f(b-a)$. Sabendo disso, somos motivados a estudar as soluções de $f(x) = f(-x)$.
Suponha que $f(t) = f(-t)$. Fazendo $x = t$, $y = -1$, temos $f(f(-1)f(t)) + f(t-1) = f(-t)$. Mas $f(f(-1)f(t)) + f(t-1) = f(f(-1)f(t)) + f(t) - 1 = f(f(-1)f(t)) + f(-t) - 1$. Logo, $f(f(-1)f(t)) = 1$, ou seja,
$f(f(-1)f(t) - 1) = f(f(-1)f(t)) - 1 = 0 \iff f(-1)f(t) - 1 = 1 \iff -2f(t) = 2 \iff f(t) = -1$.
Mas $f(t+1) = f(t) + 1 = 0 \iff t + 1 = 1 \iff t = 0$. Portanto, $f(t) = f(-t) \iff t = 0$.
Como $f(a) = f(b) \Rightarrow f(a-b) = f(b-a)$, segue que $a - b = 0 \Rightarrow a = b$.
3. $f(x) = x - 1$ para todo x.
Prova: Faça $y = n - x$ na equação original, com n inteiro:

$$f(f(x)f(n-x)) + f(n) = f(x(n-x)) \Rightarrow$$

$$f(f(x)f(n-x)) = f(x(n-x) - n + 1) = f((x-1)(n-x-1)) \Rightarrow$$

$$f(x)f(n-x) = (x-1)(n-x-1) \text{ pela injetividade de } f \Rightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x-1} = \frac{n-x-1}{f(n-x)}$$

Logo, $\frac{-x-1}{f(-x)} = \frac{n-x-1}{f(n-x)} = \frac{n-x-1}{f(-x)+n}$. Resolvendo a equação, obtemos $f(-x) = -x - 1$, o que nos diz $f(x) = x - 1$ para x real.

5 Funções em $\mathbb{R}^+$

Seja $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos reais positivos. Ache todas as funções $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tais que, para todos os $x, y \in \mathbb{R}^+$,

$$f(xy + f(x)) = xf(y) + 2$$

Solução:
Vamos começar despretenciosos, apenas descobrindo coisas sobre essa função.
1: f é injetiva.
Prova: Se $f(a) = f(b) = k$, plugando $(x, y) \leftarrow (a, b), (b, a)$ e comparando os resultados, temos que: $f(ab + k) = xk + 2 = yk + 2 \Rightarrow a = b$
2: f é não decrecente.
Prova: Assuma que $a > b$ e $f(a) < f(b)$, daí $y = \frac{f(a)-f(b)}{b-a} > 0$, perceba que $yf(a) + a = yf(b) + b = k$, logo plugando esse y e $x \leftarrow a, b$ e comparando temos que: $f(k) = af(b) + 2 = bf(a) + 2 \Rightarrow af(b) = bf(a)$, o que é um absurdo já que sabemos que: $af(b) > bf(a)$. Com esses fatos provados, f é estritamente crecente.
Vamos começar com uma solução que usa o fato 1. A fim de tornar simétrico o L.D. Plugaremos $(x, y) \leftarrow (f(x), y)$, daí sai que:
$f(f(x)y + f((x))) = f(x)f(y) + 2$
Pela simetria e injetividade temos que:

$$f(f(x)y + f((x))) = f(x)f(y) + 2 = f(f(y)x + f((y))) \Rightarrow$$
$$f(x)y + f((x)) = f(y)x + f((y))$$

Só com isso conseguimos provar que ela é linear, veja como isso fica em três variáveis:

$$f(x)y + f((x)) = f(y)x + f((y))$$
$$f(y)z + f((y)) = f(z)y + f((z))$$
$$f(z)x + f((z)) = f(x)z + f((x))$$

Somando tudo temos que:

$$f(x)y + f(y)z + f(z)x = f(y)x + f(z)yf(x)z \Rightarrow$$
$$f(x) = Ax + B, f(y) = Ay + B \Rightarrow f(z) = Az + B$$

Trivialmente a única solução é $f(x) = x + 1$ $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$ (Verifique!) Vamos a outra solução, só que dessa vez tentando usar mais o fato 2. Começaremos provando que $f(1) = 2$, por conveniência faça $f(1) = c$, plugando na equação original $x \leftarrow 1$ e $y \leftarrow 1$, separadamente, quando comparamos temos que:

$$f(y + c) = f(y) + 2,\ f(x + f(x)) = cx + 2:$$
$$f(f(z + c) + z + c) = f(f(z) + 2) + 2 \text{ e, por outro lado, } f(f(z + c) + z + c) = c(z + c) + 2 \Rightarrow$$
$$f(f(z) + z + 2) = c(z + c)$$

Combinando com um pouco de desigualdades:
Se $c > 2$:

$$zc + 4 > f(f(z) + z) + 2 > f(f(z) + z + c) > f(f(z) + z + 2) = c(z + c) \Rightarrow 4 > c^2. \text{ Absurdo!}$$

se $c < 2$ é análogo:

$$zc + 4 < f(f(z) + z) + 2 < f(f(z) + z + c) < f(f(z) + z + 2) = c(z + c) \Rightarrow 4 < c^2. \text{ Absurdo!}$$

Logo $c = 2$. Sabendo disso, vamos plugar $y \leftarrow (1 + 2/x)$

$$f(x + f(x) + 2) = xf(1 + 2/x) + 2. \Leftrightarrow$$
$$(2x + 2) + 2 = xf(1 + 2/x) + 2 \Leftrightarrow$$
$$(1 + 2/x) + 1 = f(1 + 2/x)$$

Por fim, $x \leftarrow \frac{2}{k-1}$ para $k \neq 1$, no qual já sabemos o f, sai que:
$k + 1 = f(k)$ $\forall k \in \mathbb{R}^*_+$

Ache todas as funções $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tais que

$$f(xy + f(x)) = f(f(x)f(y)) + x$$

Solução:
Quando olhamos uma equação funcional mais complexa, a chance de ficarmos perdidos é grande. Vamos com calma entender o que está acontecendo aqui. A primeira coisa que temos que fazer é procurar alguma função trivial que satisfaça. Nesse caso, a identidade é uma boa pedida, e de fato, funciona. Olhando ainda superficialmente, mais duas coisas devem chamar a atenção; a primeira é que no termo $f(f(x)f(y))$, tem muita simetria, então para começar vamos trocar isolar o termo simétrico a fim de obter uma igualdade interessante.

$$f(xy + f(x)) - x = f(f(x)f(y)) = f(xy + f(y)) - y$$

Focando na nova informação:

$$f(xy + f(x)) - x = f(xy + f(y)) - y$$

Uma ideia que não pode sair de vista é tentar provar fatos como injetividade e sobrejetividade. Essa nova informação nos diz que a função em questão é injetiva pois se $f(a) = f(b)$:

$$f(ab + f(b)) - a = f(ab + f(a)) - b$$

Já que $f(ab + f(a)) = f(ab + f(b))$, então $a = b$, como querímaos.
Inferilizmente, para a primeira solução isso não vai ser útil, mas como não sabemos disso ainda, mais informação é sempre bom. Voltando à linha de raciocínio, a segunda coisa que chama atenção é que apenas mexendo no y temos total controle do que está dentro desse f: $f(xy + f(x))$, desde que seja maior que $f(x)$. Agora vamos tentar usar isso ao máximo colocando em evidência essa liberdade. Plugando $(x, y) \leftarrow (x, \frac{z-f(x)}{x})$ onde $z > f(x)$:

$$f(z) = f(f(x)f(\tfrac{z-f(x)}{x})) + x$$

A coisa mais natural que podemos fazer agora é ter o desejo de fazer $z = x$, bem, então vamos. Assuma que $x > f(x)$ então temos que:

$$f(x) = f(f(x)f(\tfrac{x-f(x)}{x})) + x$$

Agora obervando atentamente e lembrando que estamos no domínio dos Reais Positivos, podemos ver que como $f(f(x)f(\frac{x-f(x)}{x})) > 0$, saí que: $x < f(x)$, mas isso é o contrário do que estávamos supondo. Então temos um absurdo? Sim! e ele veio de supor $x > f(x)$, logo: $x \leq f(x)$ (I).
Em posse desse conhecimento, podemos seguir de vários caminhos, por exemplo, poderiamos tentar inserir a $g(x) = f(x) - x \geq 0$ e tentar provar que ela é constatemente nula (nesse ponto já estamos conjecturando que a identidade seja a única solção, já que funções constantes não funcionam, devido ao x solto na equação inicial, mas temos que manter os olhares para novas possibiliades sempre), nesse caso essa ideia não funciona tão bem, pois as coisas terminam ficando muito complexas após a substituição. Outra ideia boa é continuar mexendo com desigualdades - apesar de ser meio vago, já temos algum direcionamento. Como queremos provar que ela é a identidade vamos supor que não e tentar chegar em um absurdo. Suponha que existe um k tal que $f(k) \neq k$, como $f(k) \geq k$ temos que: $f(k) > k$, podemos então escrever $f(k) = k + \epsilon$ com $\epsilon > 0$. Para achar um absurdo a partir disso vamos usar a nossa fórmula que conseguimos anteriormente que nos dá informação sobre um algum f:

$$f(z) = f(f(x)f(\tfrac{z-f(x)}{x})) + x \text{ com } z > f(x)$$

Ironicamente, não vamos plugar $z \leftarrow k$, mas sim: $x \leftarrow k$, principalmente pois se quiséssemos plugar o k no z teriamos que achar um x tal que $k > f(x)$, o que não é tão fácil assim; por outro lado, desse jeito que vamos fazer só temos que ter um z suficientemente grande: $z > f(k) = k + \epsilon$, o que também é bem mais concreto. Mas agora veja o que temos:
$f(z) = f(f(k)f(\frac{z-f(k)}{k})) + k = f((k+\epsilon)f(\frac{z-(k+\epsilon)}{k})) + k$ com $z > f(k) = k + \epsilon$
Reorganizando:
$f(z) - k = f((k+\epsilon)f(\frac{z-(k+\epsilon)}{k}))$ e
$(k+\epsilon)f(\frac{z-(k+\epsilon)}{k}) \geq (k+\epsilon)\frac{z-(k+\epsilon)}{k} = z(1+\frac{\epsilon}{k}) - \frac{(k+\epsilon)^2}{k} > z \Leftrightarrow z > \frac{k}{\epsilon}\frac{(k+\epsilon)^2}{k} = \frac{(k+\epsilon)^2}{\epsilon}$ para um z

suficientemente grande (a partir de agora z está fixado). Obersevando com calma o que temos, chame $f(k)f(\frac{z-f(k)}{k})$ de z_1. Agora olhe que interessante: $f(z)-k=f(z_1)$ com $z_1<z$.
Percebe o que nós fizemos? Apartir de um z construimos outro z_1 que é maior que o z e tem um f menor que o $f(z)$ em exatamente um k fixado, o melhor de tudo é que nada nos impede de fazer isso de novo e de novo, pois tudo que usamos foi o k que assumimos que existia, e o z ser grande. Logo podemos repetir esse processo para o z_1 e achar z_2 tal que $z_2>z_1$ e $f(z_2)=f(z_1)-k=f(z)-2k$, no qual $z_2=f(k)f(\frac{z_1-f(k)}{k}))$. Fazendo isso para sempre, obteremos uma sequência crescente de z_i que tem o f caindo por uma constante. Isso é um absurdo, pois em algum momento teríamos algum z com f negativo, e o absurdo veio de supor que existe k com $f(k)\neq k$. Logo, concluímos que $f(x)=x\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*$.
Obs: Em geral $z_{i+1}=f(k)f(\frac{z_i-f(k)}{k}))$ e $f(z_i)=f(z)-ik$
Solução 2:
Vamos agora ver outra abordagem possível para esse problema; a primeira parte é a mesma de provar que $f(x)\geq x$ (I). Seguiremos apartir daqui, tentando explorar um pouco de (I) no próprio enunciado:

$$f(xy+f(x))=f(f(x)f(y))+x\Rightarrow f(xy+f(x))\geq f(x)f(y)+x$$

Agora podemos tentar igualar as expressões dentro dos f's. Queremos então $xy+f(x)=y\Leftrightarrow y=\frac{f(x)}{1-x}$, mas só podemos fazer isso se $y>0$, ou seja, $x<1$. Então vamos fazer como antes, assuma que $x<1$, daí saí que: $f(y)\geq f(x)f(y)+x\Leftrightarrow f(y)[1-f(x)]\geq x>0$, no qual $y=\frac{f(x)}{1-x}$ e já que $f(y)>0$ temos que $f(x)<1$. Concluímos então que: $x<1\Rightarrow f(x)<1$.
Motivado pela vontade de plugar zero nessa equação funcional (que não é possível, pela limitação do domínio $\mathbb{R}_+^*$) provaremos o seguinte lema:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

Demonstração: assuma por absurdo que exista δ tal que para todo λ existe α de modo que: $f(\alpha)>\delta$ com $\alpha<\lambda$. Vamos então tentar plugar $y\leftarrow\alpha$, pois o y na nossa equação é o melhor lugar para plugar alguém que temos/queremos informação sobre o seu f pois no L.E. ele não está imediatamente dentro de um f e no L.D. ele ta 'empacotado' em um f :

$$f(x\alpha+f(x))=f(f(x)f(\alpha))+x$$

Para usar o que sabemos, vamos tomar um λ muito pequeno a fim de fazer com que fixado um $x<1$ termos que $x\alpha+f(x)<1$. Dada essas restrições, temos que:
$1>f(x\alpha+f(x))=f(f(x)f(\alpha))+x>x(\delta+1)$. Essa última desigualdade veio de: $f(\alpha)>\delta$ e de $f(x)\geq x\ \forall x\in\mathbb{R}^+$
Em particular: $1>x(\delta+1)\Leftrightarrow\frac{1}{\delta+1}>x$. Só que temos liberdade no nosso x; então podemos tomar simplesmente $\frac{1}{\delta+1}<x<1$, contradizendo o que tínhamos, chegando em um absurdo. Daí provamos o lema. Essa ordem que decidimos para apresentar os fatos é mais intuitiva, porém eu coloquei várias restrições nas variáveis, então aqui vai o passo a passo na ordem direta:
Partindo do ponto que queremos mostrar por absurdo que um não existe um fixado δ tomamos $x\in(\frac{1}{1+\delta},1)$ Só depois disso escolheremos um λ pequeno para $x\alpha+f(x)<1$ já que $\alpha<\lambda$, aí chegamos no absurdo. Enfim, com o lema provado vamos seguir com a solução. Para sabermos como vamos prosseguir, vamos fazer apenas um experimento, vamos plugar $y\leftarrow 0$ com $f(0)=0$, pois, como já percebemos, plugar as coisas certas no y é o que está dando resultado:

$$f(x0+f(x))=f(f(x)f(0))+x\Rightarrow f(f(x))=x \text{ e } (I):$$

$x\leq f(x)\leq f((x))=x\Rightarrow f(x)=x$, e teríamos vencido, na verdade só precisamos provar $x\geq f((x))$ ou até $x\geq f(x)$. Saindo da ficção, vamos tentar então fazer $\lim_{y\to 0}$, o que podemos de fato fazer:

$$\lim_{y\to 0} f(xy+f(x))=\lim_{y\to 0} f(f(x)f(y))+x.$$
$$\text{Usando } (I):$$

$\lim_{y\to 0} xy+f(x)\leq\lim_{y\to 0} f(f(x)f(y))+x=lim_{y\to 0} f(f(x)y)+x=\lim_{y\to 0} f(y)+x=x$. Daí sai que: $\lim_{y\to 0} xy+f(x)\leq x$ mas como $xy>0$, então se $f(x)>x$ isso seria impossível, logo como ja sabemos que $f(x)\geq x$. A única possibilidade é $f(x)=x\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*$

6 Funções em $\mathbb{Q}$

Encontre todas as funções $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tais que

$$f(xf(x) + y) = f(y) + x^2$$

para todos $x, y \in \mathbb{Q}$.

Solução: Note que $x \mapsto x$ e $x \mapsto -x$ são soluções. Provemos que são as únicas.
1. $f(y + nxf(x)) = f(y) + nx^2$ para todos $x, y \in \mathbb{Q}$ e $n \in \mathbb{Z}$.
Prova: Se a equação vale para n, note que
$f(y + (n+1)xf(x)) = f((y + xf(x)) + nxf(x)) = f(y + xf(x)) + nx^2 = f(y) + (n+1)x^2$, e
$f(y + (n-1)xf(x)) = f((y - xf(x)) + nxf(x)) = f(y - xf(x)) + nx^2 = f(y) = (n-1)x^2$, pois a equação $f(y - xf(x)) = f(y) - x^2$ ocorre trocando $y \leftarrow y - xf(x)$ na equação do enunciado.
2. $f(x) \neq f(y)$ para $x \neq y$ não nulos.
Prova: Suponha que $f(a/b) = f(p/q)$, onde a/b e p/q são frações irredutíveis. Fazendo $x \leftarrow a/b$, $n \leftarrow bp$, temos que $f(y + paf(a/b)) = f(y) + pa^2/b$. Fazendo $x \leftarrow p/q$, $n \leftarrow aq$, obtemos $f(y + apf(p/q)) = f(y) + ap^2/q$. Como os lados esquerdos das equações são iguais, temos que $pa^2/b = ap^2/q \Rightarrow a/b = p/q$ pois $a, p \neq 0$ por hipótese.
3. $f(x) = \pm x$ para todo x racional.
Prova: Fazendo $x \leftarrow p/q \neq 0$ uma fração irredutível e $n \leftarrow q^2$, obtemos que
$f(y + pqf(p/q)) = f(y) + p^2 = f(y + p^2 f(1))$, onde a última igualdade ocorre pois, fazendo $x \leftarrow 1$, temos $f(y + nf(1)) = f(y) + n$. Assim, tomando $y \neq pqf(p/q), p^2 f(1)$, temos que
$y + pqf(p/q) = y + p^2 f(1) \Rightarrow f(p/q) = f(1)p/q \Rightarrow f(x) = xf(1)$ para $x \neq 0$ (note que $f(1) \neq 0$, pois, caso contrário, fazendo $x \leftarrow 1$ no enunciado, teríamos $f(y) = f(y) + 1$, absurdo). Fazendo $y \leftarrow -x^2/f(1)$, $x \neq 0$ na equação do enunciado, temos que
$f(xf(x) + f(-x^2/f(1))) = f(-x^2/f(1)) + x^2 = 0$, ou seja, existe c tal que $f(c) = 0$. Como $f(c) \neq 0$ para $c \neq 0$, concluímos que $f(0) = 0$ e, portanto, $f(x) = xf(1)$ para todo x racional. Substituindo isso na equação original, temos $x^2 f(1)^2 + yf(1) = yf(1) + x^2 \Rightarrow f(1) = \pm 1$, ou seja, $f(x) = x$ para todo x ou $f(x) = -x$ para todo x.

Encontre todas as funções $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ tais que a igualdade

$$f(x^2 f(y)^2) = f(x)^2 f(y)$$

ocorre para todos $x, y \in \mathbb{Q}^+$.

Solução:
Claramente $x \mapsto 1$ é uma solução. Vamos provar que essa solução é única.
1. 1 está na imagem de f.
Prova: Fazendo $x \leftarrow 1/f(y)$ na equação original, obtemos $f(1) = f(1/f(y))^2 f(y)$. Tomando $y = 1$, temos $f(1/f(1))^2 = 1 \Rightarrow f(1/f(1)) = 1$ pois $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{Q}^+$.
2. $f(a^2) = a$ para todo a pertencente à imagem de f.
Prova: Tome c tal que $f(c) = 1$. Fazendo $y \leftarrow c$ na equação original, obtemos que $f(x^2) = f(x)^2$. Em particular, $f(1^2) = f(1)^2$, ou seja, $f(1) = 1$. Fazendo $x = 1$, obtemos $f(f(y)^2) = f(y)$, ou seja, $f(a^2) = a$ para todo a na imagem de f. Como $f(x^2) = f(x)^2$, concluímos que $f(a)^2 = a$ para todo a na imagem de f.
3. a está na imagem de $f \Rightarrow a = 1$.
Prova: Como $f(a)^2 = a$ para todo a na imagem de f, existe um racional a_1 tal que $a = a_1^2$. Assim, $f(a_1^2)^2 = a_1^2 \Rightarrow f(a_1)^2 = a_1$. Do mesmo modo, existe um racional a_2 tal que $a_1 = a_2^2$. Seguindo esse processo, concluímos que existe um racional a_n tal que $a = a_n^{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas o único racional positivo com essa propriedade é 1, ou seja, $a = 1$, como desejado. Assim, devemos ter $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{Q}^+$.

Seja $\mathbb{Q}^+$ o conjunto dos racionais positivos. Encontre todas as funções $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ que satisfazem a seguinte equação para todos $x, y \in \mathbb{Q}^+$:

$$f(f(x)^2 y) = x^3 f(xy).$$

Solução: Note que $x \mapsto 1/x$ é solução. Vamos mostrar que essa é a única solução.
1. f é injetiva.
Prova: Fazendo $y = 1$ em (1), temos que $f(f(x)^2) = x^3 f(x)$. Assim, se $f(a) = f(b)$, temos $a^3 f(a) = f(f(a)^2) = f(f(b)^2) = b^3 f(b) \Rightarrow a = b$.
2. f é multiplicativa, ou seja, $f(xy) = f(x)f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{Q}^+$.
Prova: Faça $y \to f(y)^2$ em (1). Então, temos que $f(f(x)^2 f(y)^2) = x^3 f(f(y)^2 x) = x^3(y^3 f(xy)) = (xy)^3 f(xy)$. Mas, como visto anteriormente, $f(f(x)^2) = x^3 f(x) \Rightarrow f(f(xy)^2) = (xy)^3 f(xy) \Rightarrow f(f(x)^2 f(y)^2) = f(f(xy)^2) \Rightarrow f(x)^2 f(y)^2 = f(xy)^2$ pela injetividade de f. Logo, $f(xy) = f(x)f(y)$, uma vez que todos os números $f(xy)$, $f(x)$ e $f(y)$ são positivos.
3. $f(x) = 1/x$ para todo $x \in \mathbb{Q}^+$.
Prova: A equação (1), utilizando que f é multiplicativa, se resume a

$$f(f(x))^2 f(y) = x^3 f(x) f(y) \Rightarrow f(f(x))^2 = x^3 f(x)$$

Assim, ficamos com

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{Q}^+, \text{ e}$$
$$f(f(x))^2 = x^3 f(x)$$

A multiplicatividade nos diz que precisamos encontrar apenas $f(p)$, com p primo; de fato, temos $f(1/p) = 1/f(p)$, de modo que $f\left(\frac{\prod_{i=1}^n p_i^{a_i}}{\prod_{j=1}^m q_j^{b_j}}\right) = \frac{\prod_{i=1}^n f(p_i)^{a_i}}{\prod_{j=1}^m f(q_j)^{b_j}}$, que está apenas em função dos valores de $f(p)$, com p primo.
Fazendo $x = p$ em (2), segue que $f(f(p))^2 = p^3 f(p)$. Seja $f(p) = p^{k_0} g_0(p)$, onde $k_0 \in \mathbb{Z}$ e $g_0(p) = m/n$ é uma fração irredutível, com $p \nmid mn$. Logo, $f(f(p))^2 = f(p^{k_0} g_0(p))^2 = f(p)^{2k_0} f(g_0(p))^2 = p^{2k_0^2} g_0(p)^{2k_0} f(g_0(p))^2 = p^3 f(p) = p^{k_0+3} g_0(p) \Longrightarrow p^{2k_0^2} g_0(p)^{2k_0} f(g_0(p))^2 = p^{k_0+3} g_0(p)$.
Logo, $p^{2k_0^2 - k_0 - 3} g_0(p)^{2k_0 - 1} f(g_0(p))^2 = 1$. Como p não divide o numerador e nem o numerador de $g_0(p)$ em sua forma irredutível, devemos ter que $p^{2k_0^2 - k_0 - 3}$ e $g_0(p)^{2k_0 - 1}$ são quadrados de números racionais. Portanto, k_0 é ímpar e $g_0(p)$ é quadrado de um racional. Suponha que $k_0 = 2k_1 - 1$, $k_1 \in \mathbb{Z}$, e $g_0(p) = g_1(p)^2$, com $g_1(p) \in \mathbb{Q}^+$.
Vamos mostrar por indução que, para todo $n \geq 1$, existem $k_n \in \mathbb{Z}$ e $g_n(p) \in \mathbb{Q}^+$ tais que $k_0 = 2^n k_n - 1$ e $g_0(p) = g_n(p)^{2^n}$. Isso nos diz que $k_0 = -1$ e $g_0(p) = 1$, ou seja, $f(p) = 1/p$. Caso base $n = 1$ está provado.
Se $k_0 = 2^n k_n - 1$ e $g_0(p) = g_n(p)^{2^n}$, então $p^{2k_0^2 - k_0 + 3} g_0(p)^{2k_0 - 1} = \frac{1}{f(g_0(p))^2} \Rightarrow p^{2(2^n k_n - 1)^2 - (2^n k_n - 1) + 3} g_n(p)^{(2(2^n k_n - 1) - 1)2^n} = \frac{1}{f(g_n(p))^{2^{n+1}}}$, potência 2^{n+1}-ésima de um racional. Claramente, se $g_n(p) = x/y$, com $x, y \in \mathbb{Z}$ coprimos, então $p \nmid xy$.
Assim, como $p^{2(2^n k_n - 1)^2 - (2^n k_n - 1) - 3} g_n(p)^{(2(2^n k_n - 1) - 1)2^n}$ é a potência 2^{n+1}-ésima de um racional, então $p^{2(2^n k_n - 1)^2 - (2^n k_n - 1) - 3}$ é potência 2^{n+1}-ésima de um racional, de modo que $2^{n+1} | 2(2^n k_n - 1)^2 - (2^n k_n - 1) - 3$. Se k_n é ímpar, então $2(2^n k_n - 1)^2 - (2^n k_n - 1) - 3 \equiv 2(2^n - 1)^2 - (2^n - 1) - 3 \equiv 2 - (2^n - 1) - 3 \equiv 2^n \not\equiv 0 \pmod{2^{n+1}}$, um absurdo. Logo, k_n é par, e tomamos $k_{n+1} = \frac{k_n}{2}$, de modo que $k_0 = 2^{n+1} k_{n+1} - 1$. Além disso, $g_n(p)^{(2(2^n k_n - 1) - 1)2^n}$ é potência 2^{n+1}-ésima de um racional, ou seja, $g_n(p)^{2(2^n k_n - 1) - 1}$ é quadrado de uma racional. Isso nos diz que $g_n(p)$ é quadrado de racional, de modo que existe $g_{n+1}(p) \in \mathbb{Q}^+$ com $g_n(p) = g_{n+1}(p)^2$.
Portanto, concluímos que $k_0 = -1$, pois $2^n | k_0 + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e $g_0(p) = 2$, pois é potência 2^n-ésima de racional para todo n. Assim, $f(p) = 1/p \Rightarrow f(x) = 1/x$ para todo x racional positivo.

7 Inequações Funcionais

Prove que não existe função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que, para todos $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(y) > (y - x) \cdot f(x)^2.$$

Solução:
Suponha que alguma função f satisfaz essa condição. Note que, se $y \leq x$, essa desigualdade

claramente ocorre. Logo, podemos trocar $y \leftarrow x+y$ sem perder informações. A desigualdade do enunciado fica

$$f(x+y) > yf(x)^2$$

Fazendo $x \leftarrow x+y$, obtemos que $f(x+2y) > yf(x+y)^2 > y^3f(x)^4$. Trocando y pór $y/2$, ficamos com $f(x+y) > (y^3f(x)^4)/8$. Fazendo novamente $x \leftarrow x+y$, obtemos $f(x+2y) > (y^3f(x+y)^4)/8 > (y^{15}f(x)^{16})/8^4$ e, trocando y por $y/2$, temos $f(x+y) > (y^{15}f(x)^{16})/8^9$. Continuando esse processo, podemos provar por indução que $f(x+y) > (y^{2^{2^n}-1}f(x)^{2^{2^n}})/8^{b_n}$, onde $b_{n+1} = 2^{2^n}b_n + \frac{2^{2^n}-1}{3}$ e $b_1 = 1$. Agora, mostramos que $b_n < 2^{2^n} - 1$ para todo n por indução. Como $1 < 3$, o caso base está feito. Como $2^{2^{n+1}} = (2^{2^n}-1)2^{2^n} + 2^{2^n} - 1 > 2^{2^n}b_n + \frac{2^{2^n}-1}{3} = b_{n+1}$, o passo indutivo está provado.
Assim, tomando $y > 1$ em $f(x+y) > (y^{2^{2^n}-1}f(x)^{2^{2^n}})/8^{b_n} > y^{2^{2^n}-1}\left(\frac{f(x)}{8}\right)^{b_n} > \left(\frac{f(x)}{8}\right)^{b_n}$, concluímos que $f(x) \leq 8$ para todo x, pois, como $b_n \to \infty$, $\left(\frac{f(x)}{8}\right)^{b_n} \to \infty$ se $f(x) > 8$. Assim, olhando para a desigualdade $f(x+y) > yf(x)^2$ e tomando $y = 8/f(x)^2$, concluímos que existe x tal que $f(x) > 8$, e $f(x+y) > \left(\frac{f(x)}{8}\right)^{b_n}$ para todo $y > 1$ e $n \in \mathbb{N}$, um absurdo.
Agora, mais problemas!

Ache todas as funções $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições

- $\forall\ x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ temos $f(x)f(y) \geq f(xy)$
- $\forall\ x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ temos $f(x) + f(y) \leq f(x+y)$
- Existe um racional $a > 1$ tal que $f(a) = a$

Prove que $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}_{>0}$

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tomando valores reais que satisfaz

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

Para todos os pares de reais x, y. Prove que $f(x) = 0$ sempre que $x \leq 0$

8 E se o problema tiver uma ideia estranha?

Ache todas as funções sobrejetoras $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ cumprindo

$$2xf(f(x)) = f(x)(x + f(f(x)))$$

Solução:
Assuma que $f(a) = f(b) = k$, daí como a condição inicial equivale a:

$$x(2f(f(x)) - f(x)) = f(x)f(f(x)) \Rightarrow a(2f(k) - k) = kf(k) = b(2f(k) - k)$$

Logo $a = b$ ou $f(k) = \frac{k}{2}$, mas se o segundo acontece então plugando k na equação original temos que:

$$2kf(f(k)) = (f(f(k)) + k)f(k) \Leftrightarrow 2kf(2k) = (f(2k) + k)2k$$

O que é um absurdo pois como $k > 0$: $2kf(2k) < (f(2k) + k)2k$
Logo f é injetiva, portanto bijetiva.+ A equação original é equivalente a:
$\frac{2}{f(x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{f(f(x))}$. Definindo $f^i(x)$ como a i-ésima iterada de $f(x)$, no qual $i \in \mathbb{Z}$. Então, plugando na nova equação $x \leftarrow f^i(x)$ temos que:
$\frac{2}{f^{i+1}(x)} = \frac{1}{f^i(x)} + \frac{1}{f^{i+2}(x)}$. Concluímos que $\frac{1}{f^i(x)}$ é P.A. , e ela é infinita para os dois lados, mas como sabemos que ela só pode asssumir valores positivos, ela tem que ser constante daí:
$\frac{1}{f^1(x)} = \frac{1}{f^0(x)} = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = x\ \forall x \in \mathbb{R}^*_+$
Se você encontrar muitos pontos fixos em um problema, use-os da melhor forma possível!

Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, para todos x, y reais,

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x).$$

Solução:
Note que $x \mapsto x$ e $x \mapsto 2 - x$ são soluções. Vamos mostrar que essas são as únicas possíveis soluções. Fazendo $x = y = 0$ na equação inicial, temos que $f(f(0)) = 0$. Seja c tal que $f(c) = 0$. Fazendo $x = c, y = 0$ e $x = 0, y = c$, obtemos, respectivamente,

$$f(0) = c;$$

$$2f(0) = cf(0).$$

Desse modo, temos que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 2$. Analisemos esses dois casos.
Caso 1. $f(0) = 0$.
Fazendo $x = 0$, $y = 0$ e $y = 1$ na equação original obtemos, respectivamente,

$$f(f(y)) = f(y);$$

$$f(x + f(x)) = x + f(x);$$

$$f(x + f(x + 1)) = x + f(x + 1).$$

1. $f(-1) = -1$ e $f(1) = 1$.
Prova: Fazendo $x = -1$ na última equação acima, temos que $f(-1) = -1$. Fazendo $x = 1, y = -1$ na equação original, segue que $f(1) + f(-1) = 1 - f(1) \implies f(1) = 1$.
2. $f(-x) = -f(x)$.
Prova: Fazendo $x = 1$ na equação original, segue que

$$f(1 + f(y + 1)) + f(y) = 1 + f(y + 1) + y$$

Fazendo $y \leftarrow f(x)$ nessa última equação, e usando o fato de que $f(f(x)) = f(x)$, temos $f(f(f(x) + 1) + 1) = f(f(x) + 1) + 1$. Fazendo $x \leftarrow x + f(x + 1)$ e usando que $f(x + f(x + 1)) = x + f(x + 1)$, temos que $f(f(x + 1 + f(x + 1)) + 1) = f(x + 1 + f(x + 1)) + 1$. Como $f((x + 1) + f(x + 1)) = (x + 1) + f(x + 1)$, temos que $f(x + 2 + f(x + 1)) = x + 2 + f(x + 1) \implies f(x + f(x - 1)) = x + f(x - 1)$.
Por fim, tomando $y = -1$ na equação original,
$f(x + f(x - 1)) + f(-x) = x + f(x - 1) - f(x) \implies f(-x) = -f(x)$.
3. $f(x) = x$ para todo x real.
Prova: Note que $f(-x + f(-x - y)) = f(-x - f(x + y)) = -f(x + f(x + y))$ e $-x + f(-x - y) = -(x + f(x + y))$. Trocando $x \leftarrow -x$ e $y \leftarrow -y$ na equação original, ficamos com

$$-f(x + f(x + y)) + f(xy) = -(x + f(x + y)) + yf(x).$$

Somando essa equação com $f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$, obtemos que $2f(xy) = 2yf(x) \implies f(xy) = yf(x)$ e, por simetria, $f(xy) = xf(y) \implies xf(y) = yf(x)$. Fazendo $y = 1$, temos que $f(x) = x$ para todo x real.
Caso 2. $f(0) = 2$.
Fazendo $y = 1$ e, em seguida, $x = 0$,

$$f(x + f(x + 1)) = x + f(x + 1);$$

$$f(f(y)) + 2 = f(y) + 2y.$$

1. $f(x) = 2 - x$ para todo x real.
Prova: Faça $y \leftarrow x + f(x + 1)$ na última equação acima. Note que $f(f(x + f(x + 1))) = f(x + f(x + 1))$, de modo que $2 = 2(x + f(x + 1)) \implies f(x + 1) = 1 - x \implies f(x) = 2 - x$ para todo x real.
Às vezes, encontrar uma sequência $x_0, x_1, \ldots$ tal que conseguimos escrever $f(x_n)$ como uma expressão em função de $f(x_{n-1})$ pode resolver seu problema!

Encontre todas as funções injetoras f dos reais não nulos nos reais não nulos tais que

$$f(x + y)(f(x) + f(y)) = f(xy)$$

para todos x, y reais não nulos com $x + y \neq 0$.

Solução:
Note que $x \mapsto= 1/x$ é uma solução. Vamos mostrar que não existem outras funções que satisfazem o enunciado.
1. $f(n) = 1/n$ para todo natural n.
Prova: Tomando $x = y = 1$ na equação original, obtemos $f(2) \cdot 2f(1) = f(1)$. Como $f(x) \neq 0$, temos $f(2) = 1/2$. Defina $t = f(1)$. Tomando $x = 1$ e $y = 2$ na equação do problema, temos que $f(3) = f(2)/(f(2) + f(1)) = 1/(2t + 1)$. Tomando $x = 1$ e $y = 3$, temos que $f(4) = f(3)/(f(3) + f(1)) = 1/(2t^2 + t + 1)$. Supondo que $f(n) = 1/(2t^{n-2} + t^{n-3} + \cdots + t^1 + t^0)$ para $n \geq 2$, tomamos $x = 1$ e $y = n$ na equação original e obtemos $f(n + 1) = f(n)/(f(n) + f(1)) = 1/(2t^{n-1} + t^{n-2} + \cdots + t^1 + t^0)$. Assim, por indução em n, concluímos que

$$f(n) = \frac{1}{t^{n-2} + \sum_{k=0}^{n-2} t^k} \qquad \text{para todo} \qquad n \geq 2.$$

Se $t = 1$, então $f(n) = 1/n$ para todo n natural. Se $t = -1$, então $f(3) = 1/(2t + 1) = -1$, absurdo, pois f é injetiva. Logo, vamos supor que $|t| \neq 1$.
Temos que $\sum_{k=0}^{n-2} t^k = \frac{t^{n-1-1}}{t-1}$. Assim, $f(n) = 1/(t^{n-2} + \frac{t^{n-1}-1}{t-1})$. Como $f(x) \neq 0$ para todo x, defina g como sendo a função tal que $g(x) = 1/f(x)$. A equação do enunciado tranforma-se em

$$g(x + y)g(x)g(y) = g(xy)(g(x) + g(y)) \ (1).$$

Como $g(n) = t^{n-2} + \frac{t^{n-1}-1}{t-1} = \frac{2t^{n-1}-t^{n-2}-1}{t-1}$, temos, tomando $x = m$, $y = n$ na relação obtida para g:

$$\left(\frac{2t^{m+n-1} - t^{m+n-2} - 1}{t-1}\right)\left(\frac{2t^{n-1} - t^{n-2} - 1}{t-1}\right)\left(\frac{2t^{m-1} - t^{m-2} - 1}{t-1}\right) =$$

$$\left(\frac{2t^{mn-1} - t^{mn-2} - 1}{t-1}\right)\left(\frac{2t^{n-1} + 2f^{m-1} - t^{n-2} - t^{m-1} - 2}{t-1}\right)$$

$$\iff$$

$$(2t^{m+n-1} - t^{m+n-2} - 1)(2t^{n-1} - t^{n-2} - 1)(2t^{m-1} - t^{m-2} - 1) =$$
$$(t-1)(2t^{mn-1} - t^{mn-2} - 1)(2t^{n-1} + 2t^{m-1} - t^{n-2} - t^{m-2} - 2) \ (*).$$

Chame de E a expressão do lado esquerdo da última equação e D o lado direito da última equação. Se $|t| < 1$, então, tomando $m = n$ e notando que $lim_{s\to\infty}(2t^{s-1} - t^{s-2} - 1) = -1$, temos que $lim_{n\to\infty}E = -1$ e $\lim_{n\to\infty} D = 2(t - 1)$. Como $E = D$, concluímos que $lim_{n\to\infty}E = lim_{n\to\infty}D \Rightarrow -1 = 2(t - 1) \Rightarrow t = 1/2$. Mas isso não possível, pois teríamos $f(1) = f(2) = 1/2$, uma contradição pelo fato de f ser injetora.
Se $|t| > 1$, então temos

$$(2 - t^{-1} - t^{-m-n+1})(2 - t^{-1} - t^{-n+1})(2 - t^{-1} - t^{-m+1}) =$$

$$(t-1)(2t^{mn-1-2(m+n)+3} - t^{mn-2-2(m+n)+3} - t^{-2(m+n)+3})(2t^{n-1} + 2t^{m-1} - t^{n-2} - t^{m-2} - 2)$$

onde dividimos a equação (*) por $t^{2(m+n)-3}$. Fazendo $m = n$, Vemos que $E \to (2 - t^{-1})^3$ quando $n \to \infty$, Mas $D \to \infty$ quando $n \to \infty$ (verifique!), um absurdo. Logo, devemos ter $|t| = 1$ e $t = 1 \Rightarrow f(1) = 1$ e $f(n) = 1/n$ para n natural (note que $g(n) = n$ para n natural).
2. $g(x^2) = g(x)^2$ para todo x e $g(x + n) = g(x) + n$ para todo n inteiro e $x \neq -n$.
Prova: Primeiro, mostramos que $g(n) = n$ para todo $n \neq 0$ inteiro. Tomando $y = 1$ em (1), obtemos $g(x + 1) = g(x) + g(1) = g(x) + 1$ para todo $x \neq -1$ (temos também $g(x - 1) = g(x) - 1$, trocando x por $x - 1$ na relação acima, com $x \neq 0, 1$. Com uma simples indução, obtemos $g(x + n) = g(x) + n$ para todo $x \neq 0, -n$ e n inteiro). Tomando $x = y = -1$, temos que $g(-2)g(-1)^2 = g(1) \cdot 2g(-1) \Rightarrow g(-2)g(-1) = 2$. Como $g(-1) = g(-2 + 1) = g(-2) + 1$ (tomamos $x = -2$ em $g(x + 1) = g(x) + 1$), ficamos com $g(-2)^2 + g(-2) - 2 = 0$, o que nos diz $g(-2) \in \{-2, 1\}$. Como $g(1) = 1$ e g é injetora (pois f é), temos $g(-2) = -2$ e $g(-1) = -1$. Se $n > 0$ é natural e $g(-n) = -n$, então, tomando $x = -n$ e $y = -1$ em (1), temos $g(-(n + 1))(-n)(-1) = n(-(n + 1))$, donde segue que $g(-(n + 1)) = -(n + 1)$. Logo, $g(n) = n$ para todo $n \neq 0$ inteiro.
Tomando $y = n$ em (1), obtemos
$g(x + n)g(x)n = g(nx)(g(x) + n) = g(nx)g(x + n) \Rightarrow g(nx) = ng(x)$ para $x \neq 0, -n$. Mas, como $g(-n^2) = -n^2 = ng(-n)$, essa equação vale para todo $x \neq 0$. Em particular, $g(2x) = 2g(x)$ e $g(-x) = -g(x)$. Fazendo $y = x$ em (1), temos $g(2x)g(x)^2 = g(x^2) \cdot 2g(x) \Rightarrow g(x^2) = g(x)^2$ para

todo $x \neq 0$. Temos também $g(-x^2) = -g(x^2) = -g(x)^2$.
3. $g(x) = x$ para todo x não nulo.
Prova: Primeiro, note que $g(x) > 0$ para $x > 0$, já que $g(x^2) = g(x)^2 > 0$, e que $g(x) < 0$ para $x < 0$, pois $g(-x) = -g(x)$.
Além disso, vamos supor que $g(0) = 0$, uma vez que tomar $x = 0$ ou $y = 0$ em (1) ainda vai satisfazer a igualdade.
Note que $g(x^{2^k}) = g(x)^{2^k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, o que é provado por indução em k. Assim, $g(x^{2^k}) = \lfloor x^{2^k} \rfloor + g(\{x^{2^k}\}) \geq \lfloor x^{2^k} \rfloor$, e $g(x^{2^k}) = \lceil x^{2^k} \rceil + g(\{x^{2^k}\} - 1) \leq \lceil x^{2^k} \rceil$ para x. Logo,

$$\lfloor x^{2^k} \rfloor \leq g(x^{2^k}) \leq \lceil x^{2^k} \rceil \Rightarrow \sqrt[2^k]{\lfloor x^{2^k} \rfloor} \leq g(x) \leq \sqrt[2^k]{\lceil x^{2^k} \rceil}.$$

Fica a cargo do leitor mostrar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lfloor x^n \rfloor} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lceil x^n \rceil} = x$, de modo que $g(x) = x$ para $x > 0$ pelo Teorema do Confronto. Como $g(-x) = -g(x)$, então $g(x) = x$ para todo x não nulo, de modo que $f(x) = 1/x$ para todo x não nulo.

Encontre todas as funções $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tais que, para todos reais positivos x, y, vale que

$$f(x + f(y)) = yf(xy + 1).$$

Solução:
Uma rápida verificação nos dá que $x \mapsto 1/x$ funciona. Agora, vamos mostrar que não existem outras soluções.
1. f é sobrejetora.
Prova:
Tomando $x \leftarrow x/y$, ficamos com $f(x/y + f(y)) = yf(x + 1)$. Assim, fixando x, temos que a função $g_x(y) = f(x/y + f(y))$ é uma bijeção, e isso nos diz que f é sobrejetora.
2. f é não crescente.
Prova:
Note que não podemos encnotrar x tal que $x/a + f(a) = x/b + f(b)$ para $a \neq b$, pois, caso contrário, teríamos $g_x(a) = g_x(b) \Rightarrow a = b$. Assim, se $a < b$, temos que a equação $x(1/a - 1/b) = f(b) - f(a)$ não possui solução positiva, isto é, $f(b) \leq f(a)$ uma vez que devemos ter $\frac{f(b)-f(a)}{1/a-1/b} \leq 0$ e $1/a - 1/b > 0$.
3. Dado a positivo, vale que $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.
Prova:
Como $f(y) \leq f(x) \leq f(a)$ se $a < x < y$, e como a função f é sobrejetora, temos que $\{f(x); x > a\} = (0, f(a))$, e disso segue o resultado desejado.
4. f é uma involução e $f(1) = 1$.
Prova:
Ao fazer $x \to 0^+$, temos que $x + f(y) \to f(y)^+$ e $xy + 1 \to 1^+$ para y fixado. Assim, $\lim_{x\to 0^+} f(x + f(y)) = \lim_{x\to 0^+} yf(xy + 1) \Rightarrow \lim_{t\to f(y)^+} f(t) = y \lim_{r\to 1^+} f(r) \Rightarrow f(f(y)) = yf(1)$. Isso nos diz que f é injetiva, pois se $f(a) = f(b)$, então $f(f(a)) = f(f(b)) \Rightarrow af(1) = bf(1)$, ou seja, $a = b$. Fazendo $y = 1$, temos que $f(f(1)) = f(1)$, ou seja, $f(1) = 1$ pela injetividade. Assim, $f(f(y)) = y$.
5. $f(x) = 1/x$.
Prova:
Fazendo $x = 1$ na equação original, obtemos $f(f(y) + 1) = yf(y + 1)$. Trocando $y \leftarrow f(y)$, obtemos $f(y + 1) = f(y)f(f(y) + 1)$. Multiplicando essas duas equações, ficamos com $yf(y) = 1$, donde o resultado segue.

Seja $\mathbb{Z}^+$ o conjunto dos inteiros positivos. Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tais que

$$f(a) + b | a^2 + f(a) \cdot f(b)$$

Para todos os inteiros positivos a, b.

Solução: Tomando $a = b = 1$, teremos: $f(1) + 1 | 1 + f(1)^2$. Porém,
$f(1) + 1 | (f(1) + 1) \cdot f(1) = f(1)^2 + f(1)$
Subtraindo, teremos $f(1) + 1 | f(1) - 1$.

Logo, $f(1) - 1 = 0$, ou $f(1) - 1 \geq f(1) + 1 \iff -1 > 1 \to Abs$! Assim, f(1) = 1.
Na equação original, tome a = 1: $b + 1 | f(b) + 1 \implies f(b) + 1 \geq b + 1 \implies f(b) \geq b$. Agora, provaremos por indução que $f(k) = k, \forall k$ inteiro positivo. ($f(1) = 1$, caso base feito). Suponha agora que $f(k) = k$. Tome $b = k$ na equação original. Obteremos que $f(a) + k | a^2 + k \cdot f(a)$. Mas $f(a) + k | (f(a) + k) \cdot k = k^2 + k \cdot f(a)$ Subtraíndo as últimas duas divisibilidades, obtemos que $f(a) + k | a^2 - k^2$, em particular, $f(k+1) + k | k^2 + 2 \cdot k + 1 - k^2 = 2 \cdot k + 1$. Daí, $2 \cdot k + 1 f(k+1) + k \iff f(k+1) \leq k + 1$. Porém, $f(k+1) \geq k + 1$, logo, $f(k+1) = k + 1$, passo indutivo completo! Logo, $f(k) = k, \forall k \in \mathbb{Z}^+$.

9 Mais Problemas Propostos

Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{2k}(n) = n + k$$

Seja k_n o menor tal k. Prove que a sequência $k_1, k_2, k_3, \ldots$ é ilimitada.

Existe $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$f(2f(x)) = x + 2023$$

Para todo $x \in \mathbb{N}$?

Existe $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que, para algum par (a, b) de números fixos,

$$f(af(n)) = bn$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$

(Desafio) Encontre todas as funções $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, para todos $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)f(y)) = f(x + y) + f(xy)$$

10 Considerações Finais

Finalizada a nossa aula introdutória em Equações Funcionais, podemos concluir que essa área da Matemática Olímpica é bastante vasta e exige bastante criatividade e perseverança. Ás vezes, diversas ideias são necessárias para resolver um problema, que, a princípio, parece simples. Caso você esteja interessado em mais problemas de funcionais, colocamos a seguir algumas fontes que usamos para os exemplo desse artigo:

- As Shortlists da IMO, que você acessa no site oficial da IMO ou no AoPS, é um banco excelente de questões para qualquer tipo de problema olímpico.
- No site da OBM você encontra provas antigas da OBM e também de outras olímpiadas, como a Ibero-americana, tudo em português!
- O livro Functional Equations In Mathematical Olympiads, do Amir Parvadi, pode ser facilmente encontrado na internet e contém diversos problemas, a maior parte com solução.