Funções

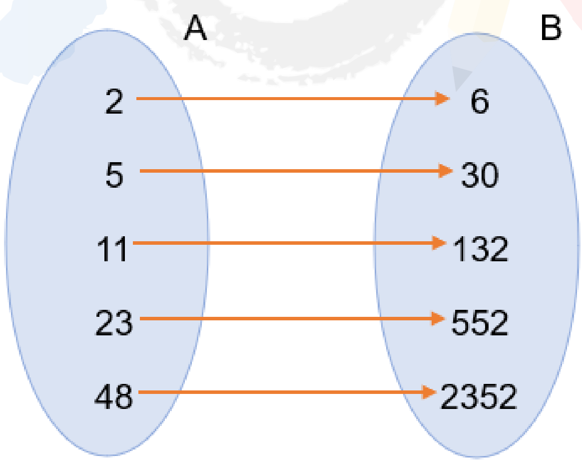
Andressa Farias, Gustavo Linhares, Luiza Lanza

1 O que é uma função?

Dado dois conjuntos A e B, chamamos função a relação binária do produto cartesiano de A por B. O conjunto A é chamado domínio e todos os primeiros elementos do par ordenado pertencem a A. O conjunto B é chamado contradomínio e todos os segundos elementos do par ordenado pertencem a B. Pensando no plano cartesiano, para cada valor de x, tal que $x \in A$, temos um único valor y para a função de x.

A representação gráfica abaixo é útil para mostrar que cada elemento de A está relacionado a um único elemento de B, enquanto o mesmo elemento de B pode estar conectado a mais de um elemento em A.

$$f(x): R \longrightarrow R$$

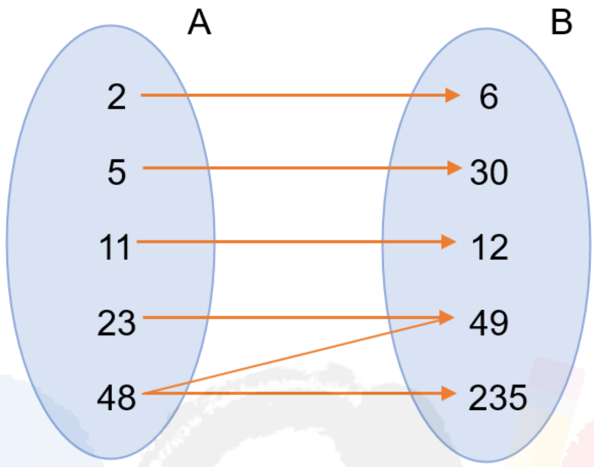


Após a função $f(x)$, os dois pontos indicam o domínio e a seta indica aponta para o contradomínio. Lê-se: função f de x indo do conjunto dos números reais para os números reais.

Nota: A definação de função não é aplicável se:

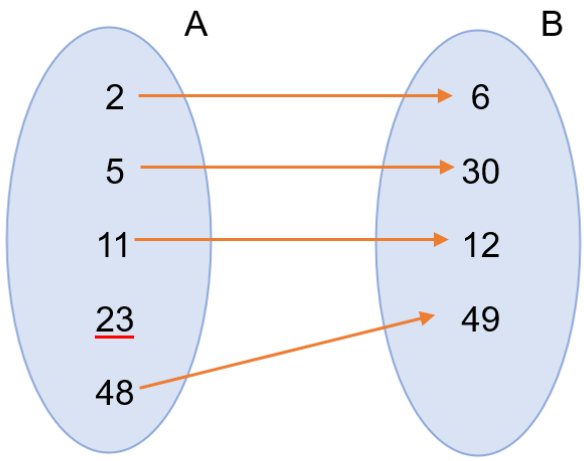
Se existe um elemento do domínio A que está relacionado a mais de um elemento do contradomínio B, ou seja, do mesmo elemento de A partem duas flechas para B:

$$f(x): R \longrightarrow R$$



Se existe um elemento do domínio A que não está relacionado a nenhum elemento do contradomínio B:

$$f(x): R \longrightarrow R$$



Encontrando valores para uma função: Dada uma função $f(x)$, para encontrar valores para a imagem da função, podemos substituir os valores de x na expressão algébrica.

Exemplo 1: $f(x) = 3x + 5$

$$f(1) = 3 \times 1 + 5 = 8$$

$$f(7) = 3 \times 7 + 5 = 26$$

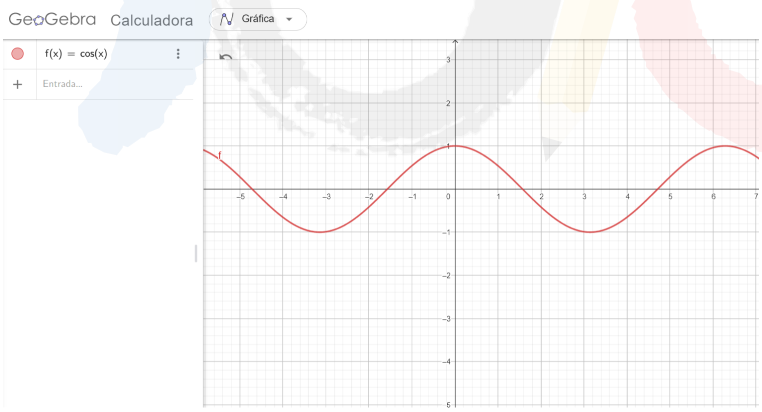
$$f(13) = 3 \times 13 + 5 = 44$$

2 Classificações de uma função

2.1. Quanto a sua paridade

2.1.1. Função par: uma função é classificada como função par se, ao mudar o sinal da abissa para o sinal oposto, o sinal da ordenada do par não se altera. Dessa forma, uma função é classificada como função par se é simétrica com relação ao eixo y.

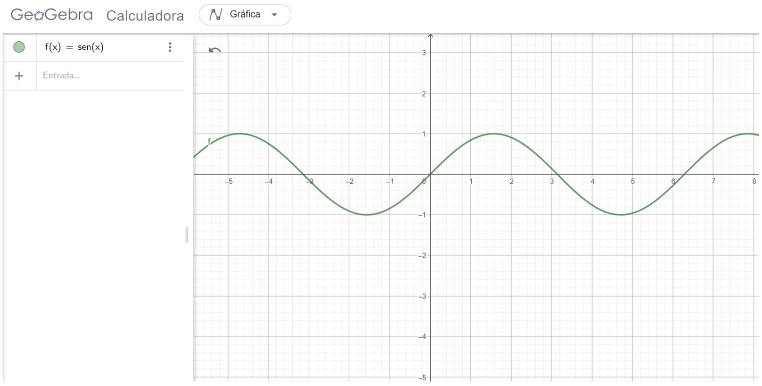
$$f(-x) = f(x)$$



A função $f(x) = cos(x)$ é um exemplo de função par.

2.1.2. Função ímpar: uma função é classificada como função ímpar se, ao mudar o sinal da abissa para o sinal oposto, o sinal da ordenada do par também possui sinal oposto.

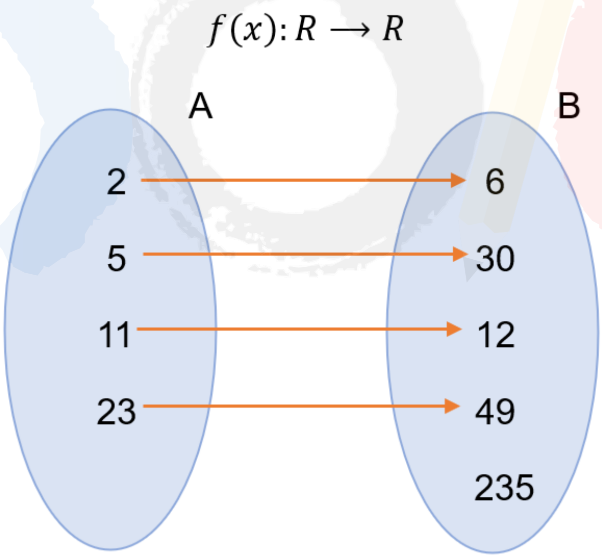
$$f(-x) \neq f(x)$$



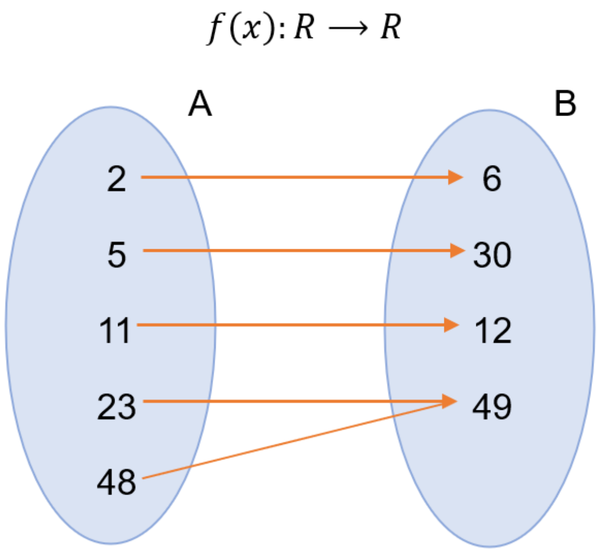
A função $f(x) = sen(x)$ é um exemplo de função ímpar.

2.2. Quanto a sua injetoriedade e sobrejetoriedade

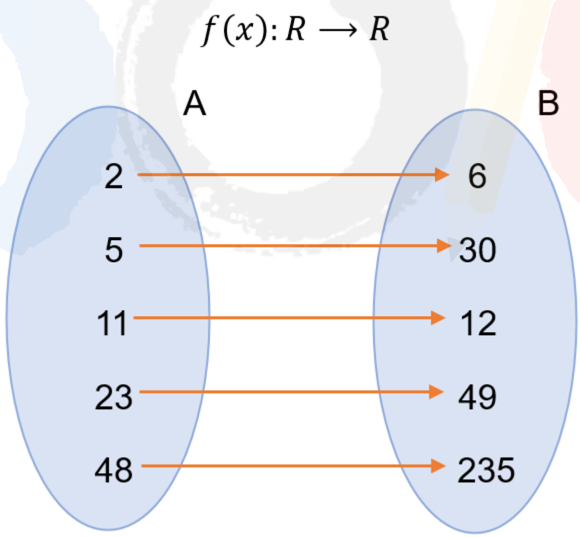
2.2.1. Função injetora: é aquela cujo cada elemento do contradomínio está relacionado a somente um elemento do domínio, i.e., todos os elementos do domínio possuem contradomínios distintos.



2.2.2. Função sobrejetora: é aquela em que não existem elementos do contradomínio que não estejam relacionados a nenhum elemento do domínio. Todos os elementos de B possuem seu correspondente em A.



2.2.3. Função bijetora: é aquela que é pode ser classificada simultaneamente como injetora e sobrejetora.



3 Função afim:

Definição 1. *A função afim é uma função polinomial do 1º grau, isto é, é da forma $f(x) = ax + b$. O gráfico da função afim é uma reta.*

Demonstração: Considere uma função do tipo $f(x) = ax + b$. Sejam três pontos no gráfico x_1, x_2 e x_3. Logo, $f(x_1) = y_1 = ax_1 + b$, $f(x_2) = y_2 = ax_2 + b$ e $f(x_3) = y_3 = ax_3 + b$. Portanto:

$$y_3 - y_2 = a(x_3 - x_2)$$

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$$

$$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

Logo, concluímos que quaisquer três pontos da imagem de uma função afim y_1, y_2 e y_3 estão contidos numa mesma reta, pois a inclinação da reta que passa por esses pontos dois a dois é constante.

4 Função afim na primeira fase da OBMEP:

É chamada de **Função Afim** toda função polinomial do primeiro grau que atende certos requisitos, que podem ser explicados da seguinte maneira formal:

- Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma:

$$y = f(x) = ax + b$$

tal que a,$b \in \mathbb{R}$.

- Os coeficiente a e b são chamados, respetivamente, de coeficiente angular e coeficiente linear (ponto de intersecção com o eixo y).
- Todo gráfico de uma função afim é uma reta.

Este tipo de função é extremamente explorado nas questões de primeira fase da OBMEP, tendo aparecido com frequência nos últimos 5 anos dessa olimpíada.

Neste tópico iremos trabalhar em cima de algumas dessas aparições e mostrar como o conteúdo deve ser abordado.

Problema 2- OBMEP 2022 (Nível 3- 1ª fase):

2. Os números *x* e *y* são tais que 80% de *x* é igual a 20% de *y*. Qual das igualdades abaixo é verdadeira?

(A) $x = 4y$
(B) $2x = 3y$
(C) $x = 8y$
(D) $3x = 2y$
(E) $4x = y$

Nesta questão, podemos interpretar as igualdades apresentadas nas alternativas como funções, ou seja, basta isolar y para obtermos uma igualdade que satisfaça ou nos direcione até a alternativa correta.

Pelo enunciado, temos que:

$$0{,}8x = 0{,}2y$$

Assim, basta isolar y:

$$y = \frac{0{,}8}{0{,}2}x = 4x$$

Portanto, chegamos no resultado de que $y = 4x$ (Alternativa E)

Problema 5- OBMEP 2019 (Nível 3- 1ª fase):

5. Uma função *f* é tal que $f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{x}$ para todo número real *x* diferente de 0 e 1. Qual é o valor de *f*(3)?

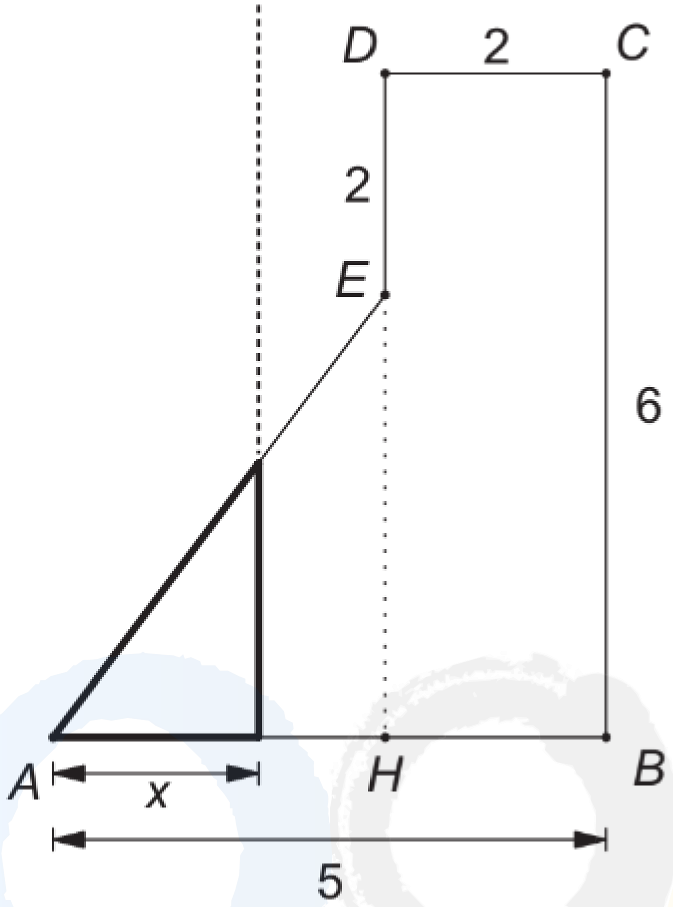
A) 1/4
B) 1/5
C) 1/6
D) 1/7
E) 1/8

Neste caso, não usamos muito da teoria de função afim, mas é interessante usar esta questão como uma maneira de se familiarizar com a notação de função.

$$f(\frac{2x+1}{x-1}) = f(3) \iff \frac{2x+1}{x-1} = 3$$

Agora basta isolar o x na igualdade e obtemos que $x = 4$ Assim, como a função tem valor equivalente a $\frac{1}{x}$, concluimos que a resposta é $\frac{1}{4}$(Alternativa A)

(OBMEP 2016 - N3)A figura mostra um polígono ABCDE em que todos os lados, exceto AE, são horizontais ou verticais e têm os comprimentos indicados na figura.



Considere, agora, uma reta vertical distante x do vértice A, com $0 < x \leq 5$. Ela divide o polígono ABCDE em dois polígonos, um situado à direita da reta e outro à esquerda. Considere a função f que associa a cada valor de x o perímetro do polígono situado à esquerda da reta. Por exemplo, $f(3)$ é o perímetro do triângulo AHE, enquanto $f(5)$ é o perímetro do polígono ABCDE.

a) Calcule $f(3)$.

b) Calcule $f(5)$.

c) Escreva as expressões de $f(x)$ para $0 < x \leq 3$ e para $3 < x \geq 5$.

d) Esboce o gráfico da função f.

SOLUÇÃO

a) Como todos os lados são horizontais ou verticais, temos que DH e CB são verticais, e HB e DC são horizontais, então, $DHBC$ é um retângulo, e com isso $DH = CB \rightarrow HE + ED = HE + 2 = CB = 6 \rightarrow HE = 4$. Além disso, $HB = DC$, então $AH = AB - HB = 5 - 2 = 3$.

Por pitágoras, temos que $AE^2 = AH^2 + HE^2 \rightarrow AE^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \rightarrow AE = 5$, portanto, $f(3)$ é igual ao perímetro de AEH, que é $3 + 4 + 5 = 12$.

b) $f(5)$ vai ser o perimetro de $ABCDE$, que é $AE + ED + DC + CB + BA = 5 + 2 + 2 + 6 + 5 = 20$.

c) Primeiro, suponha $0 < x \leq 3$. Seja P o ponto em AB tal que $AP = x$ e Q o ponto de intercessão de AE e da reta vertical que passa por P. Temos que $f(x) = AP + PQ + QA$, e além disso, $\triangle APQ$ é semelhante ao triângulo $\triangle AEH$, pois PQ é paralelo a EH, então

$$\frac{AP}{PQ} = \frac{AH}{EH} \rightarrow \frac{x}{PQ} = \frac{3}{4} \rightarrow PQ = \frac{4}{3}x$$

Além disso

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{AH}{AE} \rightarrow \frac{x}{AQ} = \frac{3}{5} \rightarrow AQ = \frac{5}{3}x$$

Então, $f(x) = x + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}x = 4x$

Agora, para $3 < x \leq 5$, seja P o ponto em AB tal que $AP = x$ e Q a intercessão da reta vertical por P com CD. Temos que $f(x) = AE + ED + DQ + PQ + PA = 5 + 2 + DQ + PQ + x$, mas veja que $DQ = HP = x - 3$, e que $PQ = CB = 6$ por paralelismo, então $f(x) = 7 + x - 3 + 6 + x = 2x + 10$ quando $3 < x \leq 5$. Logo

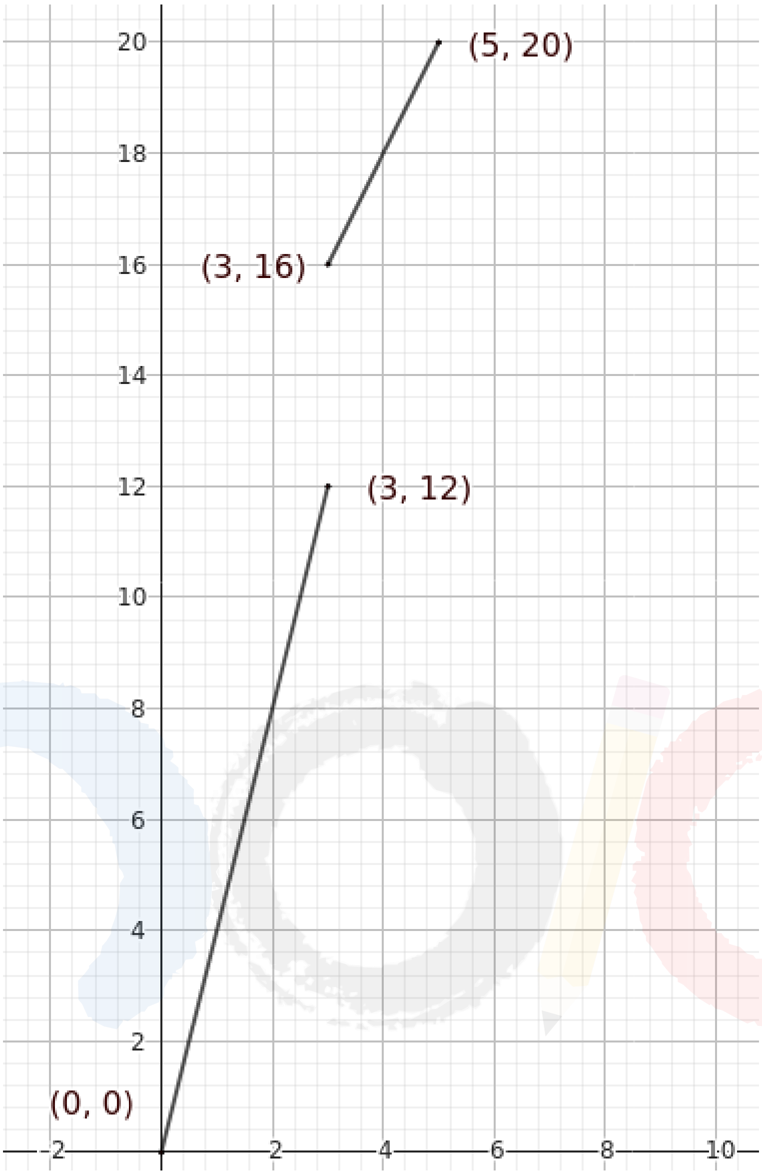
$$f(x) = \begin{cases} 4x & 0 < x \leq 3 \\ 2x + 10 & 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

d) Vamos dividir o grafico em 2: Do intervalo $(0, 3]$ e do intervalo $(3, 5]$.

Para o intervalo $(0, 3]$, sabemos que $f(x) = 4x$ é uma função afim, logo, vai ser uma linha que começa do $(0, 4 \cdot 0) = (0, 0)$ até o $(3, 4 \cdot 3) = (3, 12)$.

Agora, para o intervalo $(3, 5]$, a função $f(x) = 2x + 10$ também é uma função afim, então vai ser uma reta que começa no $(3, 2{\cdot}3{+}10) = (3, 16)$ até o $(5, 2{\cdot}5{+}10) = (5, 20)$.

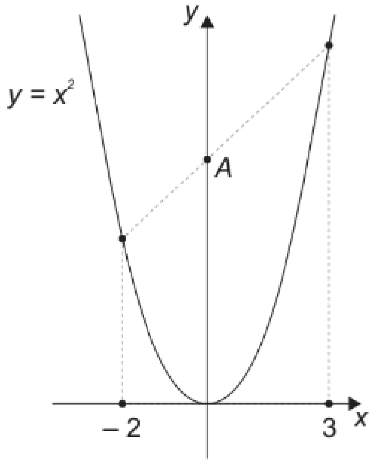
Logo, o esboço da função é esse aqui


(5, 20)
(3, 16)
(3, 12)
(0, 0)
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
-2
2
4
6
8
10

Problema 8- OBMEP 2018 (Nível 3- 1ª fase)

8. A figura mostra o gráfico da função definida por $y = x^2$.
O ponto A tem coordenadas $(0, p)$. Qual é o valor de p?

A) 5
B) 5,5
C) 6
D) 6,25
E) 6,5



Uma primeira olhada na questão pode fazer parecer que esta é uma questão sobre função quadrática, porém este não é o caso, se trata de uma questão sobre função afim.

Primeiramente, pode se observar que o ponto A é onde a reta entre os dois pontos pertencentes a função $f(x) = x^2$ intercepta o eixo y, ou seja, este é o termo independente, pois $f(0) = a * 0 + b = b$.

Ou seja, descobrir o valor de p (requisitado pela questão) é equivalente a descobrir o termo independente (b).

Assim, temos que descobrir a função que representa a reta entre os dois pontos mencionados anteriormente. Para descobrir a variação (a) podemos dividir a variação de y pela variação de x. Sendo $f(x) = x^2$:

$$a = \frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)} = \frac{9 - 4}{3 + 5} = \frac{5}{5} = 1$$

Como descobrimos que $a = 1$,podemos descobrir o valor de b ao substituir a em um dos pontos, usando o ponto $x = -2$ temos:

$$f(-2) = 4 = a(-2) + b$$

Como $a = 1$

$$4 = -2 + b$$

$$b = 6 = p$$

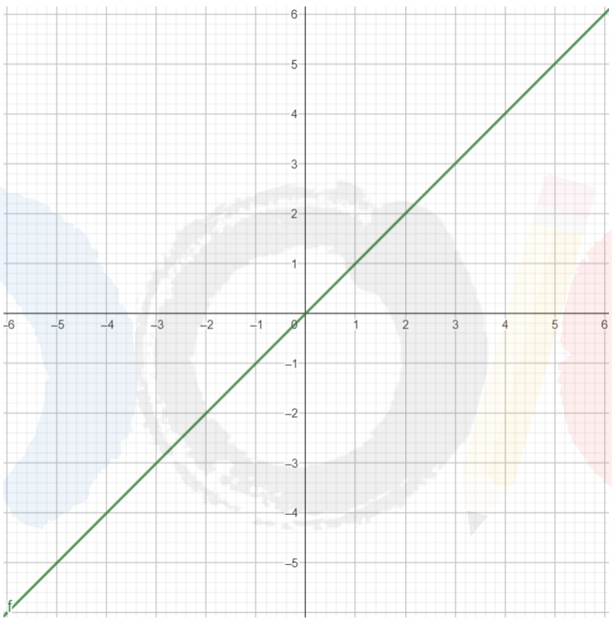
Portanto, chegamos no resultado de que $p = 6$(Alternativa C)

5 Função identidade:

Definição 2. *Função identidade é uma função afim definida como f(x)=x.*

Perceba que, como a função afim é da forma $f(x) = ax + b$, para aa função identidade $a = 1$ e $b = 0$. Destacam como propriedades da função identidade sua *bijetoriedade*, pois o domínio é igual ao contradomínio.

Por fim, a principal característica do gráfico da função afim é ser a bissetriz dos quadrantes ímpares (1º e 3º) e a tangente da reta é 1 $f'(x) = 1$:



Observe que $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$

6 Função quadrática:

A função quadrática é uma função caracterizada por ser polinomial do 2° grau, portanto, há duas raízes possíveis (que podem ser iguais ou não) as quais intersectam o eixo x.

Definição 3. *A função quadrática é definida como toda e qualquer função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, com a lei do tipo $ax^2 + bx + c$, com $a \in \mathbb{R}^*$ e $b, c \in \mathbb{R}$.*

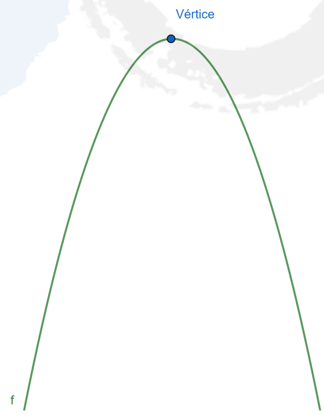
GRÁFICO

Os pares ordenados da função quadrática, quando são colocados no plano cartesiano, formam uma parábola cujo comportamento varia de acordo com os valores de a, b e c.

- **Concavidade**:

- Se $a > 0 \Longrightarrow$ Concavidade voltada para cima

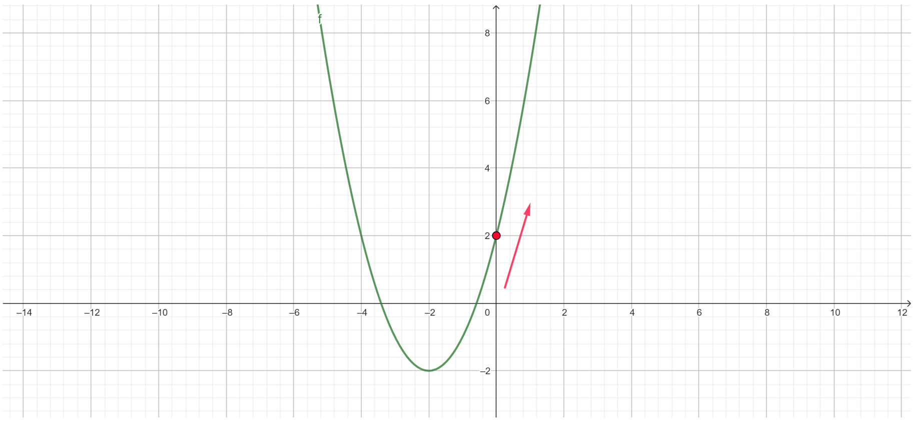
- Se $a < 0 \Longrightarrow$ Concavidade voltada para baixo

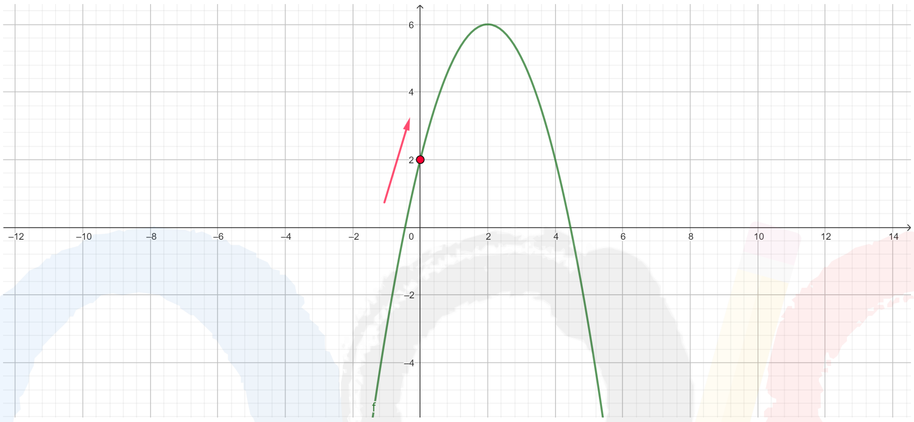


- **Intersecção com o eixo y**:

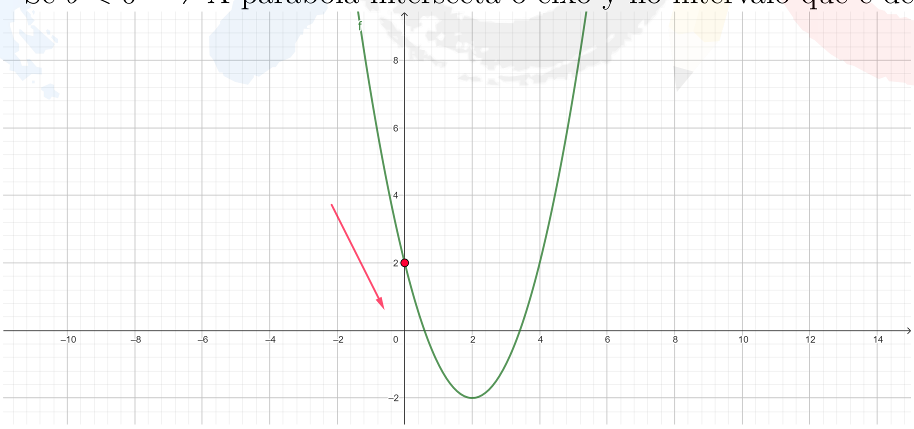
- É pertinente ressaltar que o valor de c é o valor do ponto em que a função tocará no eixo y uma vez que isso ocorre quando $x = 0 \Longrightarrow f(0) = a0^2 + b0 + c \Longrightarrow f(0) = c$

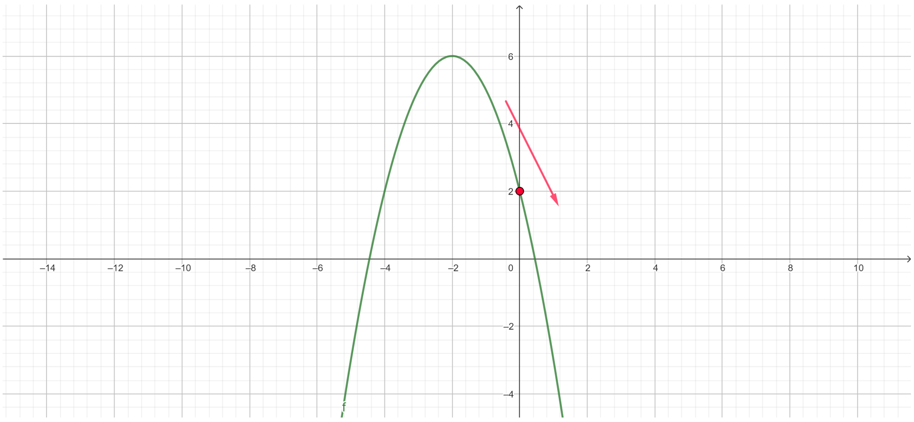
- Se $b > 0 \Longrightarrow$ A parábola intersecta o eixo y no intervalo que é crescente.



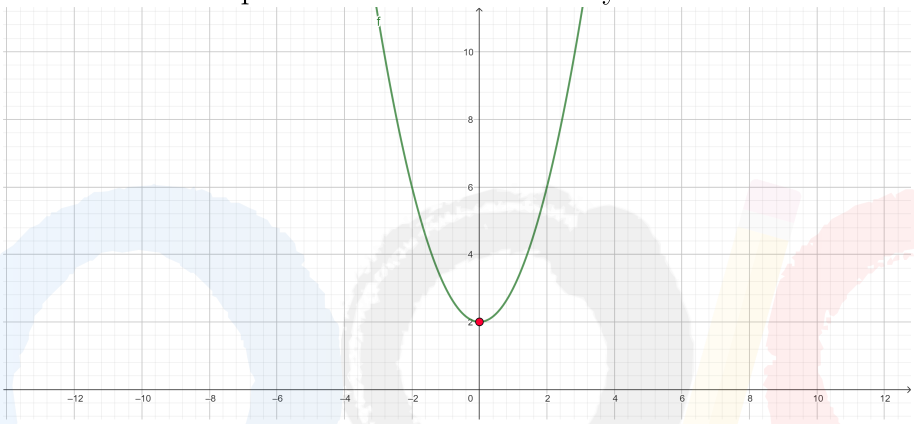


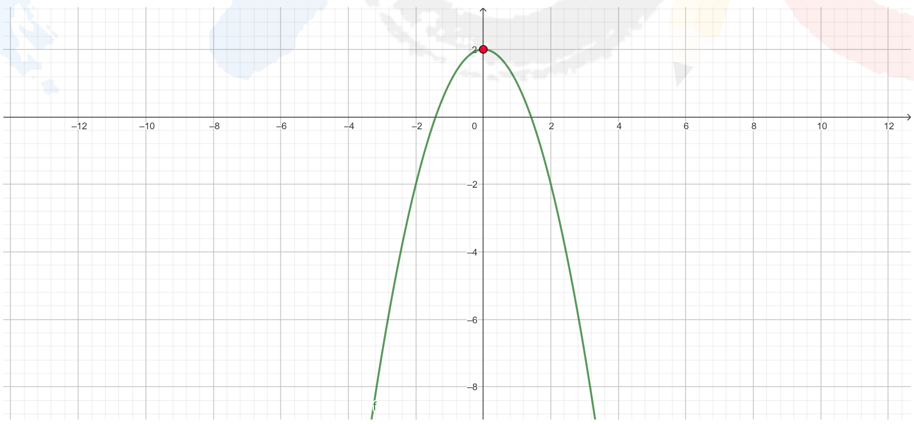
- Se $b < 0 \Longrightarrow$ A parábola intersecta o eixo y no intervalo que é decrescente.





- Se $b = 0 \implies$ A parábola intersecta o eixo y no vértice.





RAÍZES

- **Bhaskara**: Uma forma de descobrir as raízes da função é aplicando Bhaskara.

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- **Soma e Produto**: Uma outra forma de descobrir as raízes de uma função quadrática é aplicando soma e produto. Essa relação entre a soma e o produto pode ser útil para a resolução mental de equações do 2° grau.

Soma das raízes $= \dfrac{-b}{a}$

Produto das raízes $= \dfrac{c}{a}$

Exemplo: $x^2 - 10x + 24 = 0$. Agora basta pensarmos em dois números que somados resulte em 10 e multiplicados resulte em 24. Facilmente, pensamos em 4 e 6, portanto, o conjunto solução é S=4,6.

DEMONSTRAÇÃO:
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}+(-b)-\sqrt{\Delta}}{2a} \Longrightarrow x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$
$x_1 \cdot x_2 = (\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}) \cdot (\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}) \Longrightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2-(\sqrt{\Delta})^2}{(2a)^2}$
$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} \Longrightarrow \frac{4ac}{4a^2}$
$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

- **Forma fatorada da equação de 2° grau**

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Sendo x_1 e x_2 as raízes da função quadrática.

DEMONSTRAÇÃO:
$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a})$ $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Longrightarrow f(x) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2]$
$f(x) = a[x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2]$
$f(x) = a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] \Longrightarrow f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

- **Análise do Δ**:

- $\Delta > 0 \implies$ A função terá duas raízes reais distintas (o gráfico toca em 2 pontos do eixo x).
- $\Delta = 0 \implies$ A função terá duas raízes reais iguais (o gráfico toca em apenas 1 ponto do eixo x).
- $\Delta < 0 \implies$ A função não terá raízes reais (o gráfico não toca no eixo x) uma vez que raíz de número negativo não pertence a $\mathbb{R}$.

VÉRTICE

- **Quando** $a > 0$: Quando a concavidade é voltada para cima, o vértice é o valor mínimo da função.

- **Quando** $a < 0$: Quando a concavidade é voltada para baixo, o vértice é o valor máximo da função.

- **Coordenada x do vértice**:

$$x_v = -\frac{-b}{2a}$$

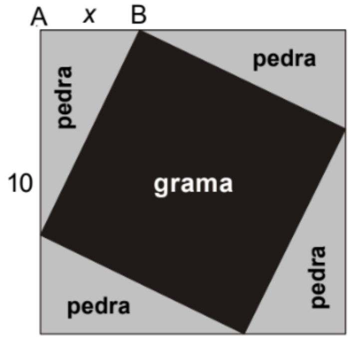
- **Coordenada y do vértice**:

$$y_v = -\frac{-\Delta}{4a}$$

DEMONSTRAÇÃO: $f(x) = ax^2 + bx + c = a \cdot (x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a})$
Acrescentando $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}$:
$f(x) = a \cdot [(x^2 + \frac{2bx}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}) - (\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a})]$
$x^2 + \frac{2bx}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}$ é um quadrado perfeito que pode ser escrito como $(x + \frac{b}{2a})^2$
$f(x) = a \cdot [(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{(b^2-4ac)}{4a^2})]$
$f(x) = a \cdot [(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{(\Delta)}{4a^2})]$
$f(x) = a \cdot (x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{(b^2-4ac)}{4a})$

EXERCÍCIOS

Problema 1.(OBMEP 2005 - N3) Um prefeito quer construir uma praça quadrada de 10 m de lado, que terá quatro canteiros triangulares de pedra e um canteiro quadrado de grama, como na figura. O prefeito ainda não decidiu qual será a área do canteiro de grama, e por isso o comprimento do segmento AB está indicado por x na figura.



a) Calcule a área do canteiro de grama para x = 2.
b) Escreva a expressão da área do canteiro de grama em função de x.

Sabe-se que o canteiro de grama custa 4,00 reais por metro quadrado e os canteiros de pedra custam 3,00 reais por metro quadrado. Use esta informação para responder aos dois itens a seguir.

c) Qual a menor quantia que o prefeito deve ter para construir os cinco canteiros?
d) Se o prefeito tem apenas 358,00 reais para gastar com os cinco canteiros, qual é a área do maior canteiro de grama que a praça poderá ter?

SOLUÇÃO

a) Chamaremos o lado do quadrado de l, portanto, a área do canteiro de grama será l^2, aplicando o teorema de pitágoras: $l^2 = 2^2 + (10-2)^2 \Longrightarrow l^2 = 4 + 64 \Longrightarrow l^2 = 68m^2$

b) Seguindo o raciocínio do item anterior, sendo A a área ($A = l^2$), $A = x^2 + (10-x)^2 \Longrightarrow A = x^2 + 100 - 2 \cdot 10x + x^2 \Longrightarrow A = 2x^2 - 20x + 100m^2$

c) Faremos uma função $g(x)$ para representar a quantia que o prefeito vai gastar.

- Como o canteiro de grama custa 4 reais, teremos $4 \cdot (2x^2 - 20x + 100)$.

- A área dos canteiros de pedra será a área da praça menos a área dos canteiros de grama, ou seja, $10^2 - (2x^2 - 20x + 100) = -2x^2 + 20x$. E como o canteiro de pedra custa 3 reais, teremos $3 \cdot (-2x^2 + 20x)$

$g(x) = 4 \cdot (2x^2 - 20x + 100) + 3 \cdot (-2x^2 + 20x) \Longrightarrow g(x) = 8x^2 - 6x^2 - 80x +$

$60x+400 \Longrightarrow g(x)=2x^2-20x+400$

Essa função é uma função quadrática que possui concavida para cima, portanto o vértice será o menor custo possível.

$$y_v=-\frac{\Delta}{4a} \Longrightarrow y_v=-\frac{[(-20)^2-4\cdot 2\cdot 400)]}{4\cdot 2} \Longrightarrow y_v=-\frac{[400-8\cdot 400]}{4\cdot 2}$$

$$y_v=-\frac{(100-800)}{2} \Longrightarrow y_v=\frac{700}{2}=350$$

Conclui-se, portanto, que a menor quantia que o prefeito deve ter para construir os cinco canteiros é 350 reais.

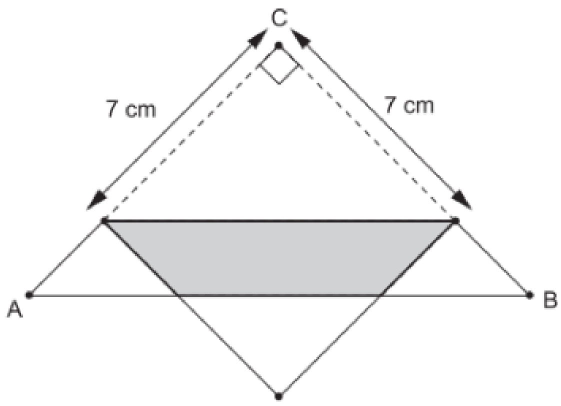
d) Sendo A a área da grama, sabemos que o que o prefeito gastará na praça pode ser expresso por 4A+3(100-A)=4A-3A+300=A+300, ou seja, quanto maior o custo, maior a área da grama, logo, deve ser utilizado o máximo que o prefeito pode gastar. $358=300+A \Longrightarrow A=58m^2$

Fazendo pela função, obteríamos o mesmo resultado:

Sabe-se que o valor gasto foi 358 reais, ou seja, $g(x)=358 \Longrightarrow 2x^2-20x+400=358 \Longrightarrow 2x^2-20x+42=0 \Longrightarrow x^2-10x+21$. Por soma e produto: x=3 ou x=7.

Percebe-se que em ambos os casos, a área do canteiro de grama será: $l^2=3^2+7^2 \Longrightarrow l^2=49+9 \Longrightarrow l^2=58m^2$

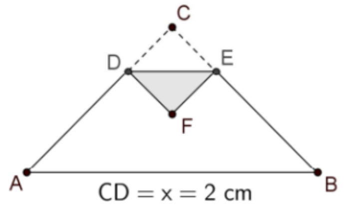
Problema 2.(OBMEP 2013 - N3) A figura mostra um triângulo de papel ABC, retângulo em C e cujos catetos medem 10 cm. Para cada número x tal que $0 \geq x \geq 10$, marcam-se nos catetos os pontos que distam x cm do ponto C e dobra-se o triângulo ao longo da reta determinada por esses pontos. Indicamos por f(x) a área, em cm^2, da região onde ocorre sobreposição de papel. Por exemplo, na figura ao lado a área da região cinzenta, em cm^2, é f(7).



a) Calcule f(2), f(5) e f(7).
b) Escreva as expressões de f(x) para $0 \geq x \geq 5$ e $5 \geq x \geq 10$.
c) Faça o gráfico de f(x) em função de x.
d) Determine o maior valor possível para a área da região de sobreposição.

SOLUÇÃO

a) f(2): Quando x=2, teremos:

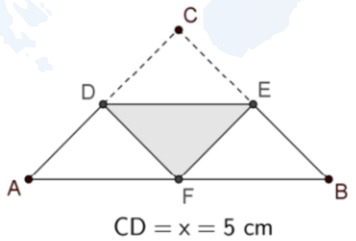


Ou seja, a área da região que ocorre a sobreposição será a área do próprio triângulo de lado 2cm. Como o triângulo ABC é retângulo em C e a dobra é paralela ao lado AB, seus catetos são iguais, portanto, CDFE é um quadrado de lado x cm e a área do triângulo DEF é metade da área do quadrado. Ou seja,

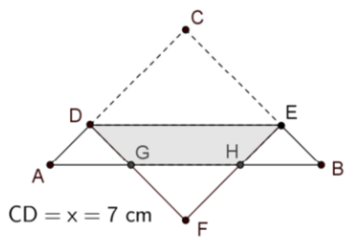
$$S_{\triangle} = \frac{x^2}{2}$$

.

$f(2) = \frac{2^2}{2} = 2cm^2$



Analogamente, $f(5) = \frac{5^2}{2} = \frac{25}{2}cm^2$



Quando x=7, a área de sobreposição é igual a $S_{DEF} - S_{GHF}$.

Perceba que o $\triangle DAG$ é isósceles com DG=DA=10-7=3cm. Como DG=3cm, GF=7-3=4cm. Logo, $S_{GHF} = \frac{4^2}{2}$ e $S_{DEF} = \frac{7^2}{2}$.

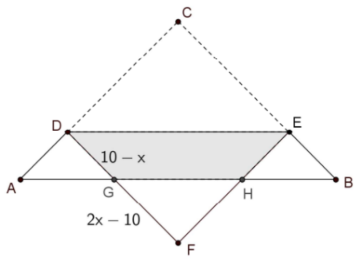
$$S_{DEF} - S_{GHF} = \frac{49-16}{2} \Longrightarrow S_{DEHG} = \frac{33}{2}cm^2$$

$$f(7) = \frac{33}{2}cm^2$$

b) Como já analisado no item anterior, para $0 \geq x \geq 5$, a área da região sobreposta é a área do próprio triângulo, ou seja, $f(x) = \frac{x^2}{2}$.

Já quando $5 < x \geq 10$, a área da região sobreposta será $S_{DEF} - S_{GHF}$.

$DG = 10 - x$ e $FG = x - DG \Longrightarrow FG = x - (10 - x) = 2x - 10$ conforme a imagem abaixo.

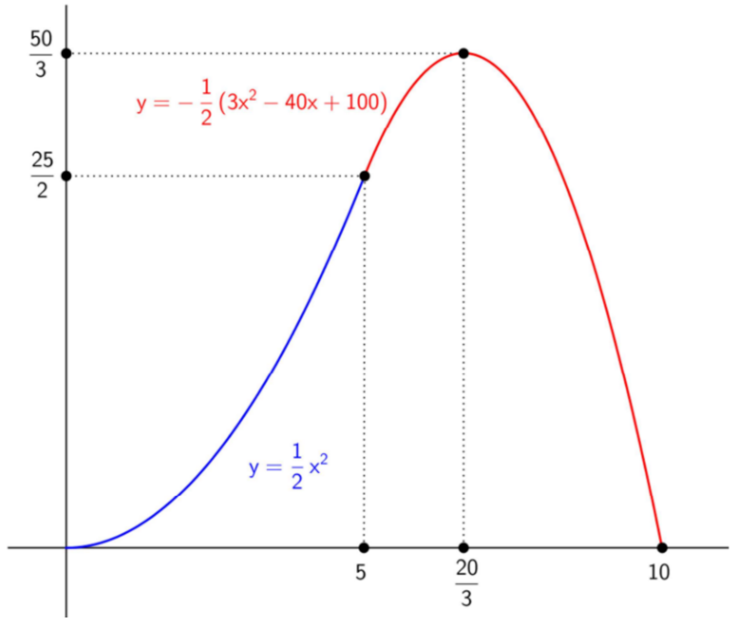


$$S_{DEF} - S_{GHF} = \frac{x^2}{2} - \frac{(2x-10)^2}{2}$$

$$S_{DEF} - S_{GHF} = \frac{x^2 - (4x^2 - 40x + 100}{2} = \frac{-3x^2 + 40x - 100}{2}$$

$f(x) = \frac{-3x^2}{2} + 20x - 50$

c) Teremos a lei $f(x) = \frac{x^2}{2}$ de 0 a 5 e $f(x) = \frac{-3x^2}{2} + 20x - 50$ de 5 a 10. Sendo a primeira uma parábola de concavidade para cima e a segunda uma parábola de concavidade para baixo como a figura a seguir.



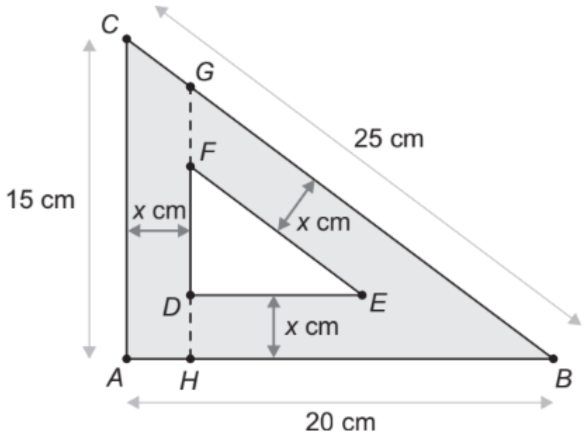
c) O maior valor é o vértice da função $f(x) = \frac{-3x^2}{2} + 20x - 50$.
$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$

$$y_v = -\frac{20^2 - 4 \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (-50)}{4 \cdot (-\frac{3}{2})}$$

$$y_v = -\frac{400 - 300}{-6} = \frac{100}{6} = \frac{50}{3}$$

Conclui-se, portanto, que a maior área de sobreposição possível é $\frac{50}{3}cm^2$.

Problema 3.(OBMEP 2011 - N3) Na figura, os lados do triângulo DEF são paralelos aos lados do triângulo retângulo ABC. Os pontos H, D, F e G estão alinhados e $0 \geq x \geq 5$.



a) Calcule o comprimento de GH em função de x.
b) Mostre que $CG = FG = \frac{5x}{4}cm$.
c) Faça o gráfico da área A do triângulo DEF em função de x.

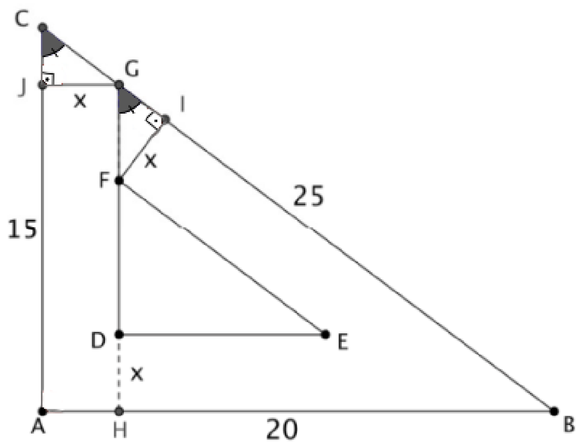
SOLUÇÃO

a) GH é paralelo a AC, portanto os triângulos ABC e BGH são semelhantes.

$$\frac{AC}{GH} = \frac{AB}{BH} \implies \frac{15}{GH} = \frac{20}{20-x}$$

$$GH = \frac{3}{4} \cdot (20-x)$$

b) Observe a imagem abaixo



$\triangle CGJ \equiv \triangle FGI$ pelo caso LADO-ÂNGULO-ÂNGULO OPOSTO (CJ=FG=x;$\angle CJG = \angle FIG = 90°; \angle JCG = \angle FGI) \implies CG = FG$

$$\frac{BC}{BG} = \frac{AB}{BH} \Longrightarrow \frac{25}{BG} = \frac{20}{20-x}$$

$$BG = \frac{5}{4} \cdot (20-x)$$

$$CG = BC - BG \Longrightarrow CG = 25 - \frac{5}{4} \cdot (20-x) \Longrightarrow CG = \frac{5x}{4}$$

$$FG = CG = \frac{5x}{4}$$

c)

$$DF = GH - DH - FG \Longrightarrow \frac{3}{4} \cdot (20-x) - x - \frac{5x}{4}$$

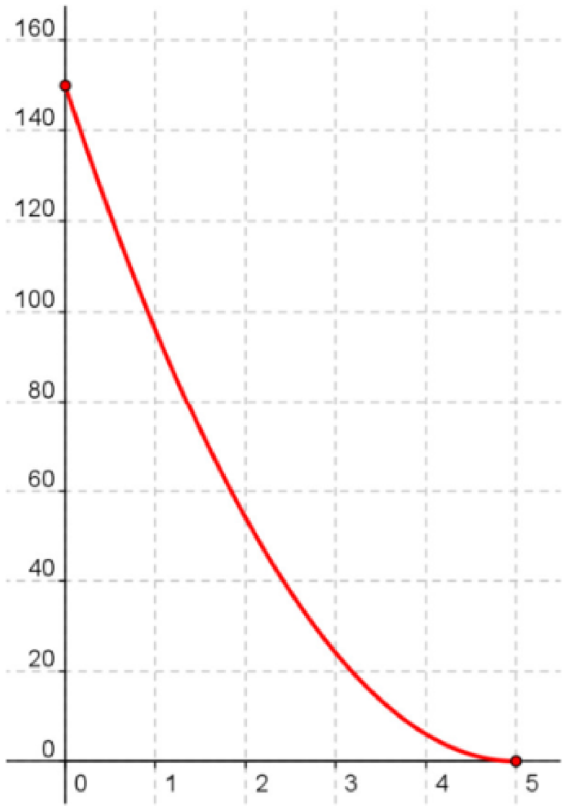
$$DF = 15 - 3x$$

$$\frac{DF}{DE} = \frac{AC}{AB} \Longrightarrow \frac{15-3x}{DE} = \frac{15}{20} \Longrightarrow DE = \frac{4}{3} \cdot (15-3x)$$

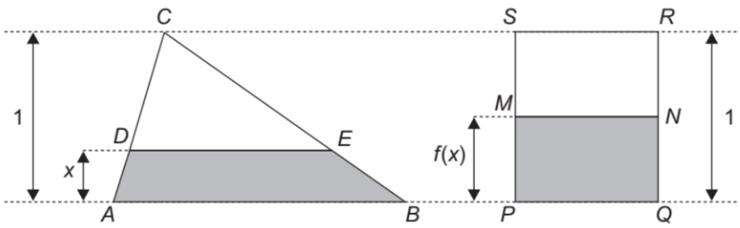
$$S_{DEF} = \frac{(15-3x) \cdot \frac{4}{3} \cdot (15-3x)}{2} \Longrightarrow S_{DEF} = \frac{2}{3} \cdot (225 - 6x + 9x^2)$$

$$S_{DEF} = 6x^2 - 4x + 150$$

A função da área para $0 \geq x \geq 5$ é $f(x) = 6x^2 - 4x + 150$ representando o gráfico abaixo.



Problema 4.(OBMEP 2008 - N3) Na figura, o triângulo ABC e o retângulo PQRS têm a mesma área e a mesma altura 1. Para cada valor de x entre 0 e 1 desenha-se o trapézio ABED de altura x e depois o retângulo PQNM de área igual à do trapézio, como na figura. Seja f a função que associa a cada x a altura do retângulo PQNM.



a) Qual é a razão entre AB e PQ?
b) Qual é o valor de $f(\frac{1}{2})$?
c) Ache a expressão de f(x) e desenhe o gráfico de f.

SOLUÇÃO

a)

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot 1}{2}$$

$$S_{PQRS} = PQ \cdot 1$$

$$S_{ABC} = S_{PQRS} \Longrightarrow \frac{AB \cdot 1}{2} = PQ \cdot 1 \Longrightarrow \frac{AB}{PQ} = 2$$

b) AB é paralelo a DE, logo, $\triangle CDE \sim \triangle ABC \Longrightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{1-x}{1} \Longrightarrow DE = AB(1-x)$

$$S_{ABED} = \frac{(AB + AB - AB \cdot x) \cdot x}{2} \Longrightarrow S_{ABED} = \frac{[AB(2-x)] \cdot x}{2}$$

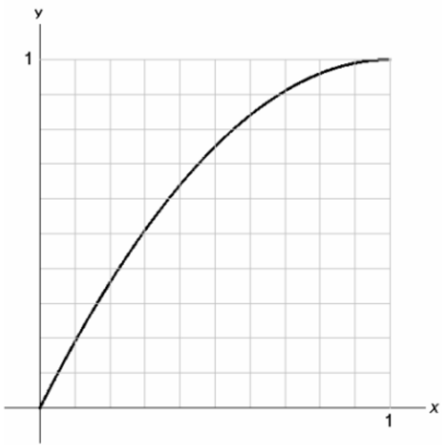
$$S_{ABED} = S_{PQNM} \Longrightarrow \frac{[AB(2-x)] \cdot x}{2} = PQ \cdot f(x)$$

$$\frac{[\cancel{AB}(2-x)] \cdot x}{2} = \frac{\cancel{AB}}{2} \cdot f(x) \Longrightarrow \frac{2x - x^2}{\cancel{2}} = \frac{f(x)}{\cancel{2}}$$

$$f(x) = -x^2 + 2x \Longrightarrow f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2^2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \Longrightarrow f(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

c)

Utilizando a lei encontrada no item ”b”, para $0 \geq x \geq 1$, teremos o gráfico abaixo:



Problema 5.(Banco de Questões OBMEP 2006) O perímetro de um retângulo é 100 cm e a diagonal mede x cm. Qual é a área do retângulo em função de x?

SOLUÇÃO

Seja a, b os lados do retângulo. Sabemos que

- O perímetro do retângulo é $2(a+b)$, então $2(a+b) = 100 \to a+b = 50$.
- A área do retângulo é ab, então nós vamos atrás de calcular isso
- Por pitágora, $a^2 + b^2 = x^2$

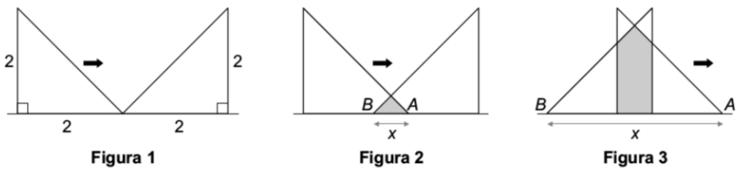
Então, vamos juntar esses 3 itens. Veja que $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$, então

$$x^2 = (a+b)^2 - 2ab = 2500 - 2ab \to \frac{x^2 - 2500}{2} = ab$$

Logo, a área do retângulo é $\frac{x^2-2500}{2}$

Problema 6.(Banco de Questões OBMEP 2012) Dois triângulos retângulos isósceles com catetos de medida 2 são posicionados como mostra a Figura 1. A seguir, o triângulo da esquerda é deslocado para a direita. Nas Figuras 2 e 3, x indica a distância entre os vértices A e B dos dois triângulos.

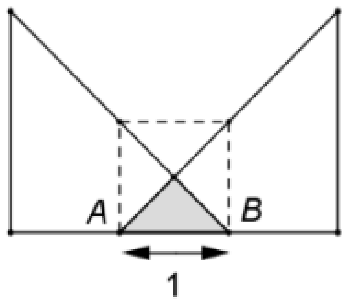
Para cada x no intervalo [0, 4], seja f(x) a área da região comum aos dois triângulos (em cinza nas figuras).



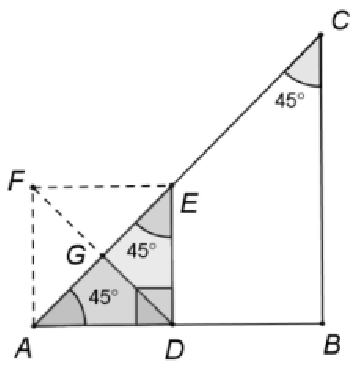
a) Calcule f(1) e f(3).
b) Encontre as expressões de f nos intervalos [0, 2] e [2, 4] e esboce o seu gráfico.

SOLUÇÃO

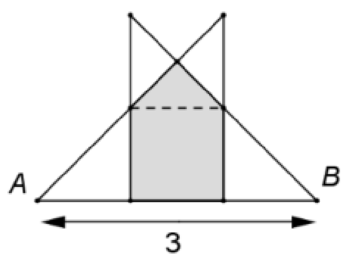
a) Quando x = 1, a figura formada pela sobreposição dos triângulos maiores é um triângulo menor, indicado em cinza na figura abaixo.



Sua área é a quarta parte da área de um quadrado de lado 1 uma vez que, como ilustrado abaixo, sendo DE perpendicular a AB, o triângulo ADE também é retângulo de lados iguais, e sua área é igual a metade da área do quadrado ADEF; a área do triângulo ADG é então igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado ADEF. Logo, $f(1) = \frac{1}{4}$

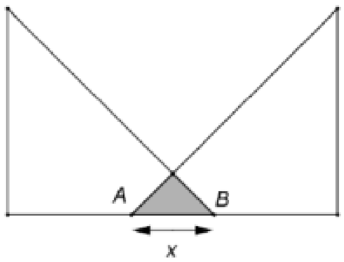


Quando x = 3, a figura formada pela sobreposição dos dois triângulos é um pentágono, como na figura abaixo. Como os triângulos têm catetos de medida 2 e AB = 3, vemos que os catetos se sobrepõem em um segmento de medida 1. Logo, o pentágono é a união de um quadrado de lado 1 e um triângulo idêntico ao que consideramos no início desta questão.

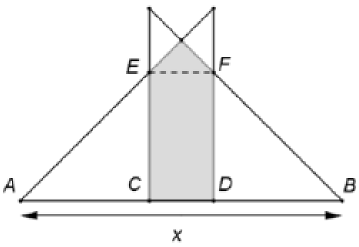


$f(3) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

b) Para valores de x tais que $0 \geq x \geq 2$, a figura formada pela sobreposição dos triângulos é o triângulo em cinza na figura abaixo, em que $f(x) = \frac{x^2}{4}$, conforme explicado no item ”a”é um $\frac{1}{4}$ da área do quadrado de lado x.



Quando $2 < x \geq 4$, a figura formada pela sobreposição dos triângulos é um pentágono, como ilustrado na figura abaixo.



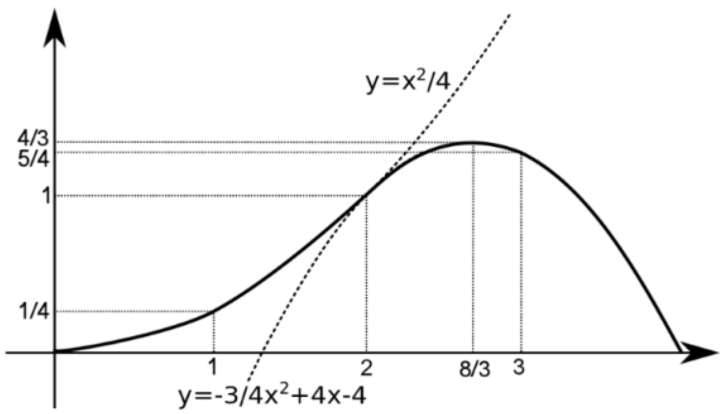
$AC + CD = BD + CD = 2 \Longrightarrow AC + BD + CD + CD = 4 \Longrightarrow x + CD = 4$

$AC = BD = 2(4x) = x2$. Logo, pentágono pode ser decomposto em um retângulo CDFE de base 4 x e altura CE = AC = x 2 e um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa 4 x.

$f(x) = (4-x)(x-2) + \frac{(4-x)^2}{4} \Longrightarrow f(x) = 4x - 8 - x^2 + 2x + 4 - 2x + \frac{x^2}{4}$

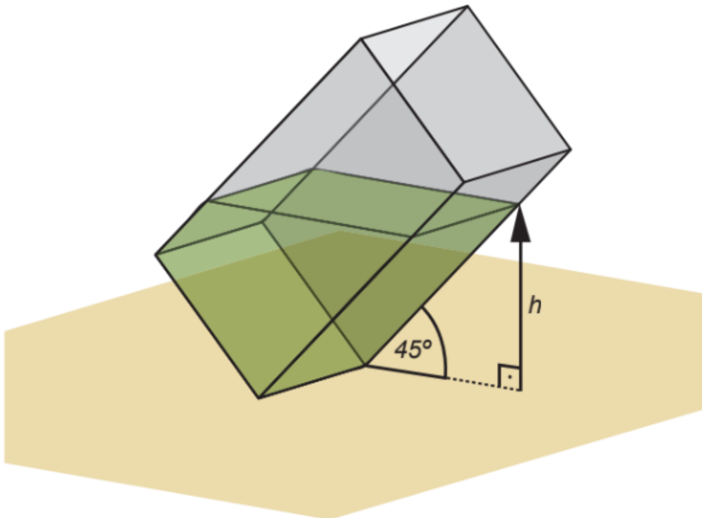
$f(x) = -\frac{3x^2}{4} + 4x - 4$

Juntando as duas leis de formação, obtemos o gráfico abaixo:



Problema 7.(OBMEP 2021 - N3) Uma lata medindo 20 cm × 10 cm × 10 cm, sem tampa, é sustentada por um suporte, de modo que uma de suas arestas

mais curtas fique apoiada no plano horizontal e as arestas mais longas formem um ângulo de 45ř com o plano horizontal, conforme mostra a figura. Suponha que um líquido seja colocado na lata, até a altura h em relação ao plano horizontal, também como indicado na figura.



a) Qual é o volume total da lata?

b) Explique por que a altura máxima que o líquido vai atingir é $10\sqrt{2}cm$ e calcule o volume de líquido na lata quando essa altura é atingida.

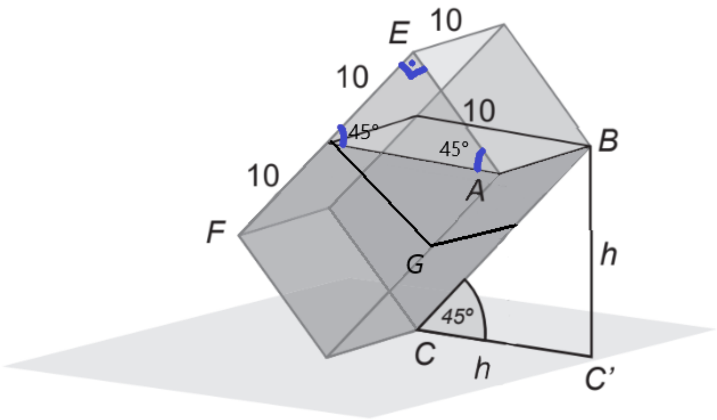
c) Faça o gráfico da função V, que fornece o volume V(h) de líquido na lata, em cm3, quando sua superfície está na altura h, em cm.

SOLUÇÕES

a) O volume total da lata será $20 \cdot 10 \cdot 10 = 2000cm^3$.

b) A altura máxima é atingida pelo líquido quando ele está quase transbordando, ou seja, a hipotenusa do triângulo será máxima $(20cm)$ e por ter uma ângulo de 45°(triângulo isósceles), os catetos do triângulo retângulo são iguais, logo, sua altura h será $h^2 + h^2 = 20^2 h^2 = \frac{20^2}{2} \implies h = \frac{20^2}{\sqrt{2}} \implies h = \frac{20\sqrt{2}}{2} \implies h = 10\sqrt{2}$

Para calcular o volume de líquido na lata, vamos dividir o poliedro em duas partes conforme a figura abaixo:



Um cubo de arestas medindo 10cm + a metade de um cubo de aresta 10 cm, logo seu volume será $1010 \cdot 10 + \frac{1010 \cdot 10}{2} = 1500cm^3$

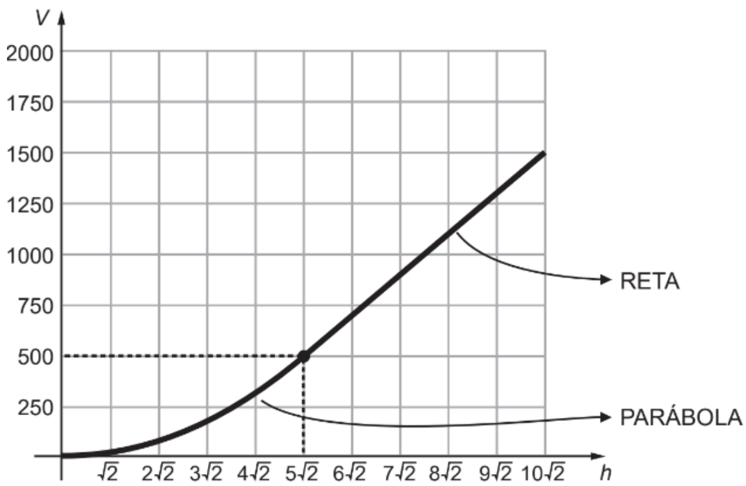
c) Precisamos dividir a questão em dois casos:

- Até atingir o vértice F (quando $h = 5\sqrt{2}$), o líquido ocupa um prisma de base triangular com as arestas medindo $h\sqrt{2}Xh\sqrt{2}X10$. Para calcularmos seu volume, basta fazer a área do triângulo vezes a altura de 10cm, ou seja, $V = \frac{h\sqrt{2} \cdot h\sqrt{2}}{2} \cdot 10 \Longrightarrow V = 10h^2$. Logo, esse intervalo terá uma parábola com concavidade para cima.

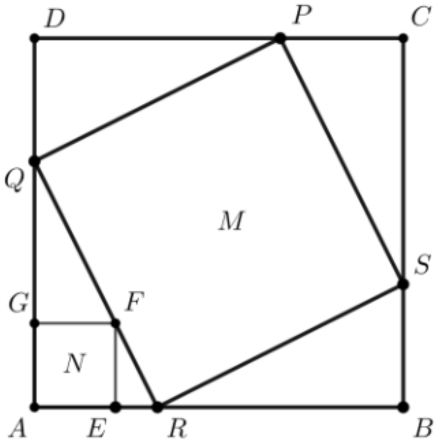
A partir do ponto F, o líquido adicional ocupa um prisma cuja base é um retângulo de lados medindo 10cm e $10\sqrt{2}cmecujaalturaé(h - 5\sqrt{2})$.

Logo, $V = 500 + 10 \cdot 10\sqrt{2} \cdot (h - 5\sqrt{2}) \Longrightarrow V = 100\sqrt{2}h - 500$ que é uma função afim.

Juntando as duas situações, teremos o gráfico abaixo.



Problema 9.(Banco de Questões 2019) Na figura a seguir, o quadrado maior possui área de $1cm^2$ e o quadrado do meio área M. A área do quadrado menor, que possui um vértice sobre um lado do quadrado do meio, é N. Qual o valor de N em função de M?



SOLUÇÃO

Sejam AQ = x, QR = a e AG = s. Como a área do quadrado maior é $1cm^2$, segue que AD = 1cm. Os triângulos retângulos ARQ e DQP possuem os mesmos ângulos, pois $\angle AQR = 180°\angle PQR\angle DQP \implies \angle AQR = 90°\angle DQP \implies \angle AQR = \angle DPQ$

Como QR = QP, os triângulos DPQ e AQR são congruentes. Assim, AR = DQ = 1 x. Como QF é paralelo a AR, os triângulos QGF e QAR são semelhantes:

$$\frac{s}{1-x} = \frac{x-s}{x}$$

$$sx = x - x^2 - s + sx \implies x - x^2 = s$$

Aplicando Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo QAR:

$$(1-x)^2 + x^2 = a^2 \implies 1 - a^2 = 2x - 2x^2 \implies 1 - M = 2s$$

$$N = s^2 = (\frac{1-M}{2})^2 \implies N = \frac{M^2 - 2M + 1}{4}$$

7 Função Composta:

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ duas funções tais que o contradomínio de f é igual ao domínio de g , definimos a função composta de g com f como a função $h = g \circ f : A \to C$ tal que $h(x) = g(f(x))$.

Exemplo 1: Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x + 1$ e $g(x) = 3x + 7$:
$g(f(x)) = g(x + 1) = 3(x + 1) + 7 = 3x + 10$;
$f(g(x)) = f(3x + 7) = (3x + 7) + 1 = 3x + 8$.

Problema 1- OBMEP 2019 (Nível 3 - 1ª fase): Uma função f é tal que $f(\dfrac{2x+1}{x-1}) = \dfrac{1}{x}$ para todo número x diferente de 0 e 1. Qual é o valor de $f(3)$?

Como há a aplicação da expressão $(\dfrac{2x+1}{x-1})$ na função f, é possível criar a função $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$. Assim, temos um caso de composição tal que $f \circ g(x) = \dfrac{1}{x}$. Para descobrir o valor de $f(3)$, basta encontrar o valor da função composta para $g(x) = 3$:

$$g(x) = \frac{2x+1}{x-1} = 3 \implies 2x + 1 = 3(x - 1) \implies x = 4$$

$$f \circ g(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$$

Problema 2- OBMEP 2007 (Nível 3- 2ª fase): A calculadora do Dodó tem uma tecla especial com o símbolo A. Se o visor mostra um número x diferente de 2, ao apertar a aparece o valor de $\frac{2x-3}{x-2}$.

a) Se o Dodó colocar 4 no visor e apertar A, qual número vai aparecer?

b) Dodó colocou um número no visor e, ao apertar A, apareceu o mesmo número. Quais são os números que ele pode ter colocado no visor?

c) Dodó percebeu que, colocando o 4 no visor e apertando a duas vezes, aparece de novo o 4; da mesma forma, colocando o 5 e apertando a duas vezes, aparece de novo o 5. O mesmo vai acontecer para qualquer número diferente de 2? Explique.

Resolução: a) A operação de Dodó pode ser definida como $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$. Dessa forma, para $x = 4 \Longrightarrow f(3) = \frac{2 \times 3 - 3}{3-2} = \frac{3}{1} = 3$

Resolução: b) Por hipótese, temos que $f(x) = x$; $\frac{2x-3}{x-2} = x$

$$x^2 - 2x = 2x - 3 \Longrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

Utilizando soma e produto para resolver a expressão:

$$x_1 + x_2 = 4; x_1 \times x_2 = 3$$

$$x = (1; 3)$$

Resolução: c) ao apertar a tecla A duas vezes, a operação realizada é $f(x)$ de $f(x)$, ou seja, $f(f(x))$. Por definição, $f(f(x)) = \frac{2 \times f(x) - 3}{f(x) - 2} = x$

$$\frac{2 \times \frac{2x-3}{x-2} - 3}{\frac{2x-3}{x-2} - 2}$$

$$\frac{\frac{4x-6-3\times(x-2)}{\cancel{x-2}}}{\frac{2x-3-2\times(x-2)}{\cancel{x-2}}}$$

$$f(f(x)) = \frac{x}{1} = x$$

Observa-se que f(f(x)) é igual a x, mas não é válido para f(2), pois:

$$f(2) = f(\frac{2 \times 2 - 3}{2 - 2}) = f(\frac{1}{0}) \Longrightarrow x \nexists \mathbb{C}$$