Lista - Análise de dados
Gabarito

Hugo Menhem

Orientações Gerais

- Os problemas desta lista são designados para treino das habilidades de análise de dados para a etapa de Barra do Piraí e dos treinamentos de Vinhedo;
- as lista de exercícios podem ser encontradas aqui;
- Por fim, você pode me contatar diretamente pelo email hfmenhem@gmail.com;

Problema 1. Geométrio e seu relógio de Sol

a) Ao plotar o gráfico da tabela fornecida, chega-se em algo parecido com a figura 1. Salienta-se a necessidade de titulo, eixos com unidades e nome e pontos cobrindo mais que 50% do espaço do gráfico.

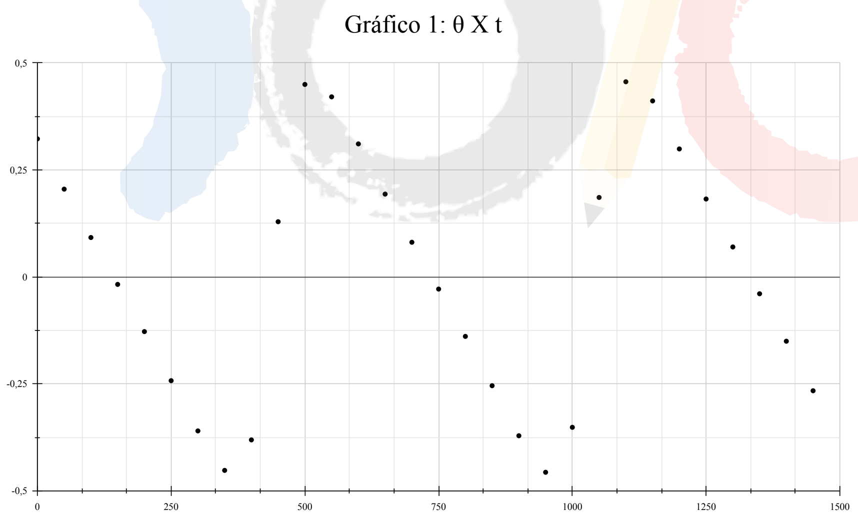

Figura 1: Gráfico possível para a resposta final

b) a equação do tempo é definida como:

$$Eqt = \alpha_V - \alpha_m$$

O Sol verdadeiro se move com velocidade angular constante ao longo da eclíptica, visto que a orbita do planeta é circular. Já o Sol médio, por definição, se move com velocidade constante ao longo do equador. assim

$$\alpha_m = \omega(t - t_0)$$

$$l_v = \omega(t - t_0)$$

pela figura 2

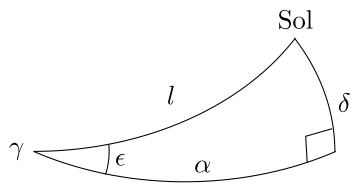

Figura 2: Triângulo esférico do problema

$$\cot l \sin \alpha = \cot 90^o \sin \epsilon + \cos \alpha \cos \epsilon$$

$$\tan \alpha_v = \cos \epsilon \tan l_v$$

$$\tan \alpha_v = \cos \epsilon \tan(\omega(t - t_0))$$

assim, a equação do tempo fica:

$$Eqt = \arctan\left[\cos\epsilon \tan\left(\frac{2\pi}{T}(t - t_0)\right)\right] - \left[\frac{2\pi}{T}(t - t_0)\right]$$

porém essa relação só é válida para $-\frac{\pi}{2} < \omega(t - t_0) < \frac{\pi}{2}$, pois $\arctan(\tan(\theta)) = \theta - \pi$ se $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, assim ficando $Eqt - \pi$. Todavia, esse problema pode ser resolvido ao fazer

$$\boxed{\tan\left[Eqt + \frac{2\pi}{T}(t - t_0)\right] = \cos\epsilon \tan\left[\frac{2\pi}{T}(t - t_0)\right]}$$

que é válido para qualquer $\frac{2\pi}{T}(t - t_0)$

c) Este item se baseia na propriedade do relógio de sol em questão de que o segmento de reta que é a a sombra do gnomon é dada pela mesma reta, para um mesmo valor de H, independentemente da declinação do sol. Isso pode ser provado da seguinte forma: visto que o gnomon está paralelo ao eixo dos polos, todos os pontos que possuem o mesmo H e diferentes δ estarão contidos em um circulo máximo, de centro na ponta do gnomon e cruzando o eixo PCS-PCN. Assim, a sombra dessa situação será dada pela intersecção entre o plano do circulo máximo e o plano horizontal, que é, por definição, uma reta. Como a ponta de traz do gnomon está contida em todos os círculos máximos de mesmo H (já que está na direção do PCN) e no plano horizontal, sabe-se que ela faz parte da intersecção entre os dois planos, e portanto conclui-se que todas as retas de cada diferente h passam por esse ponto. A figura 3 ilustra essa explicação.

Como não importa a declinação do sol para o calculo de θ, supõe-se, sem perder generalidade, que $\delta = 0$. assim, o de acordo com a figura 4, tem-se as seguintes relações:

$$\theta = \arctan\left(\frac{x}{y + G\cot\phi}\right)$$

$$x = G \cot h \sin(-A)$$
$$y = G \cot h \cos(-A)$$

assim,

$$\tan\theta = -\frac{\cot h \sin A}{\cot h \cos -A + \cot\phi}$$

Agora, para deixar em função de H, transforma-se as coordenadas do Sol, a partir do triângulo esfério da figura 5

$$\cot(90^o + \phi)\sin(90^o) + \cos(90^o - A)\cos(90^o) = \cot h \sin(90^o - A) \Rightarrow$$
$$\tan\phi = -\cot h \cos A$$

$$\cos(90^o + H) = \cos(90^o - A)\cos(h) + \sin(90^o - A)\sin(h)\cos(90^0) \Rightarrow$$
$$\sin A = -\frac{\sin H}{\cos h}$$

$$\frac{\sin(90^o + \phi)}{\sin h} = \frac{\sin(90^o)}{\sin(90^o + H)} \Rightarrow$$
$$\sin h = \cos H \cos\phi$$

Substituindo na fórmula para θ,

$$\tan\theta = \frac{\cot h \sin A}{\tan\phi + \cot\phi}$$
$$\tan\theta = -\frac{\frac{\sin H}{\sin h}}{\tan\phi + \cot\phi}$$
$$\tan\theta = -\frac{\frac{\sin H}{\cos H \cos\phi}}{\tan\phi + \cot\phi}$$
$$\tan\theta = -\tan H \sin\phi$$

Pela definição de equação do tempo, $Eqt = H_v - H_m$, e sabendo que no momento da medição de θ, o horário no relógio é de 12 h, o que corresponde a $H_m = 0^o$,

$$\boxed{\tan\theta = -\tan(Eqt)\sin\phi}$$

d) Substituindo a relação do item c) na relação do item b)

$$\boxed{\tan\left[\frac{2\pi}{T}(t - t_0) - \arctan(\tan\theta\csc\phi)\right] = \cos\epsilon\tan\left[\frac{2\pi}{T}(t - t_0)\right]}$$

Dessa forma, sendo

$$\boxed{y = \tan\left[\frac{2\pi}{T}(t - t_0) - \arctan(\tan\theta\csc\phi)\right]}$$

$$\boxed{x = \tan\left[\frac{2\pi}{T}(t - t_0)\right]}$$

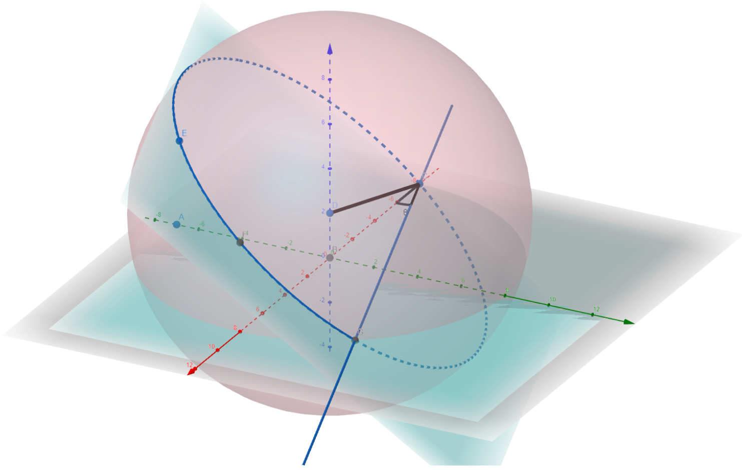

Figura 3: Porque θ é independente de δ

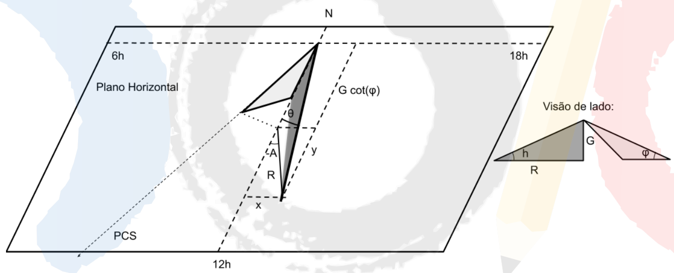

Figura 4: Esquema geométrico do relógio de sol

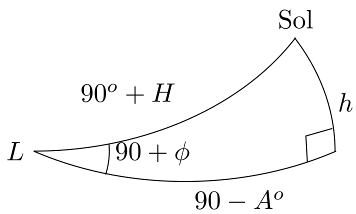

Figura 5: Transformação de coordenadas do Sol

tem-se

$$y(x) = \cos(\epsilon)x$$

Assim linearizando a função

e) A máxima elongação pode ser descrita geometricamente a partir da figura 6

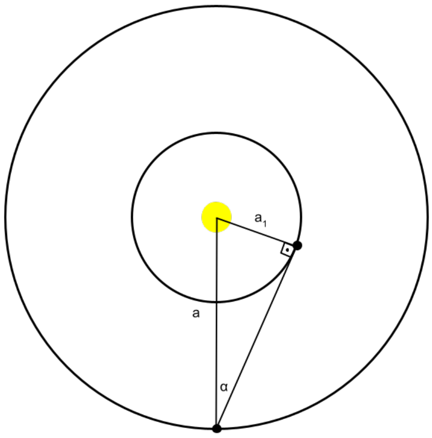

Figura 6: geometria da máxima elongação

$$\sin\alpha = \frac{a_1}{a} = \left(\frac{T_1}{T}\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \sin^{-\frac{3}{2}}\alpha = \frac{T}{T_1}$$

já pela formula do período sinódico,

$$T'^{-1} = T_1^{-1} - T^{-1}$$

$$T'^{-1} = T^{-1}\sin^{-\frac{3}{2}}\alpha - T^{-1}$$

$$T = T'(\sin^{-\frac{3}{2}}\alpha - 1) = 1189\ dias$$

Para achar σ_T, utiliza-se a formula do erro pelas derivadas parciais:

$$\sigma_T = \sqrt{\left(\sigma_{T'}\frac{\partial T}{\partial T'}\right)^2 + \left(\sigma_\alpha\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right)^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial T'} = (\sin^{-\frac{3}{2}}\alpha - 1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = -\frac{3}{2}T'\sin^{-\frac{5}{2}}\alpha\cos\alpha$$

$$\sigma_T = \sqrt{\left(\sigma_{T'}(\sin^{-\frac{3}{2}}\alpha - 1)\right)^2 + \left(\sigma_\alpha\frac{3}{2}T'\sin^{-\frac{5}{2}}\alpha\cos\alpha\right)^2} = 57\ dias$$

OBS: σ_α tem que estar em radianos!

Assim, a resposta final fica:

$$\boxed{T = 1190 \pm 60\ dias}$$

f) Para achar os valores possíveis de t_0, deve-se perceber que, quando $t = t_0$, $\theta = 0$, como é possível observar pela formula desenvolvida no item d). Assim, percebe-se que, dentro do período de translação do planeta, há 4 intervalos em que $\theta = 0$, que são: $[100, 150]$, $[400, 450]$, [700,750], $[1000, 1050]$. Para achar os valores com maior precisão, utiliza-se da aproximação linear em torno do $\theta = 0$. assim,

$$\frac{t_0 - t_1}{0 - \theta_1} = \frac{t_1 - t_2}{\theta_1 - \theta_2} \Rightarrow t_0 = \theta_1 \frac{t_2 - t_1}{\theta_1 - \theta_2} + t_1$$

para estimar a incerteza, estima-se que esta será a diferença entre t_0 e o limite mais próximo do intervalo. Assim, os quatro valores ficam:

$$\boxed{142 \pm 8\ dias}$$

$$\boxed{437 \pm 13\ dias}$$

$$\boxed{735 \pm 15\ dias}$$

$$\boxed{1033 \pm 17\ dias}$$

g) para construir as tabelas, utiliza-se as linearizações desenvolvidas no item e depois aplicando as formulas da regressão linear, chega-se nas tabelas 1, 2, 3, 4 e 5

Tabela 1: Valores das regressões lineares

t_0 $[dias]$	Coef. linear (A)	Coef. angular (B)	R^2
142 ± 8	$(-2 \pm 5) \cdot 10^{-3}$	$0{,}1759 \pm 0{,}0012$	0,9986
437 ± 13	$4{,}6 \pm 2{,}6$	$4{,}4 \pm 0{,}5$	0,7117
735 ± 15	$(-7 \pm 10) \cdot 10^{-3}$	$0{,}1952 \pm 0{,}0027$	0,9946
1033 ± 17	$2{,}1 \pm 1{,}8$	$4{,}4 \pm 0{,}3$	0,8637

h) Agora que foi calculado os valores dos coeficientes das regressões, é possível perceber que osa candidatos de $t_0 = 437\ dias$ e $t_0 = 1033\ dias$ não são válidos, visto que, além de R^2 baixo, seus coeficientes não condizem com a formula, já que A deveria ser próximo de 0 e $B \leq 1$, o que não é o caso para estes dois valores de t_0. Ainda, percebe-se que os valores $t_0 = 142\ dias$ e $t_0 = 735\ dias$ são candidatos válidos, visto que possem valores dos coeficientes dentro dos padrões esperados e R^2 próximo de 1. Também é interessante notar a existência de pares de t_0 válidos e inválidos. Isso se dá pois estes valores foram estimados para que $\theta = 0$, significando que a equação do tempo seja nula nesse instante. Mesmo assim, de acordo com a dedução da fórmula para tal, o valor de t_0 real seria aquele em que o Sol esteja no ponto vernal. Dessa forma, percebe-se que os dois valores descartados de t_0 compreendem aos solstícios, em que θ também é nulo. Já os dois valores possíveis de t_0 compreendem aos equinócios, evidenciando que existe uma simetria no atraso do sol, que independe se este está no hemisfério Norte ou no Sul, dependendo apenas da distância até sua última passagem no equador. Em conclusão, tanto o valor de $t_0 = 142\ dias$ quanto $t_0 = 735\ dias$ podem ser utilizados na fórmula da equação do tempo, sendo estes os dias dos equinócios, porém não é possível distinguir qual é o de outono e qual é o de primavera, visto que há uma simetria no problema.

i) visto que, na linearização do item d), $B = \cos\epsilon$, porém tem-se dois valores possíveis de B,

Tabela 2: $y \times x$

y	x
-0,138	-0,935
-0,118	-0,530
-0,042	-0,227
0,007	0,040
0,037	0,314
0,137	0,639
0,213	1,099
0,383	1,948
0,879	4,683
-3,283	-18,628
-0,587	-3,042
-0,290	-1,521
-0,156	-0,886
-0,065	-0,497
-0,051	-0,200
0,005	0,067
0,077	0,343
0,154	0,677
0,155	1,159
0,311	2,081
0,922	5,374
-2,172	-12,469
-0,462	-2,791
-0,299	-1,437
-0,128	-0,840
-0,069	-0,464
-0,025	-0,172
0,015	0,094
0,044	0,373
0,090	0,716
$t_0 = 142$ *dias*	

Tabela 3: $y \times x$

y	x
8,119	1,101
9,672	1,952
35,624	4,704
-46,570	-18,318
-19,639	-3,032
-6,594	-1,518
-4,394	-0,885
-2,501	-0,496
-1,106	-0,199
0,320	0,068
1,760	0,344
3,639	0,678
7,053	1,161
19,607	2,086
27,104	5,401
-52,091	-12,328
-10,956	-2,783
-5,944	-1,434
-5,889	-0,839
-3,058	-0,463
-1,055	-0,172
0,478	0,094
2,249	0,374
3,524	0,717
8,820	1,225
18,120	2,235
94,002	6,331
-34,515	-9,281
-17,162	-2,568
-9,623	-1,356
$t_0 = 437$ *dias*	

Tabela 4: $y \times x$

y	x
-0,126	-0,914
-0,106	-0,516
-0,031	-0,215
0,019	0,052
0,048	0,327
0,149	0,655
0,225	1,124
0,397	2,003
0,899	4,957
-3,154	-15,375
-0,572	-2,930
-0,278	-1,484
-0,145	-0,866
-0,054	-0,483
-0,040	-0,188
0,016	0,078
0,088	0,356
0,165	0,693
0,167	1,186
0,324	2,143
0,943	5,734
-2,109	-10,916
-0,448	-2,695
-0,287	-1,403
-0,116	-0,821
-0,058	-0,451
-0,013	-0,161
0,026	0,105
0,055	0,386
0,101	0,733
$t_0 = 735$ *dias*	

Tabela 5: $y \times x$

y	x
7,775	1,089
9,191	1,926
29,912	4,583
-62,052	-20,317
-21,954	-3,088
-6,841	-1,536
-4,505	-0,894
-2,541	-0,502
-1,118	-0,204
0,314	0,062
1,738	0,338
3,565	0,670
6,792	1,148
17,739	2,057
23,663	5,244
-72,254	-13,206
-11,644	-2,831
-6,145	-1,451
-6,087	-0,848
-3,114	-0,470
-1,066	-0,177
0,471	0,089
2,217	0,368
3,454	0,709
8,417	1,212
16,512	2,204
62,521	6,118
-42,348	-9,772
-18,905	-2,609
-10,152	-1,372
$t_0 = 1033$ *dias*	

assim, para determinar ϵ com maior precisão, será feita a média dos dois valores:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\arccos(B_{142}) + \arccos(B_{735})}{2} = 1{,}384$$

seu erro será o erro da média,

$$\sigma_{\bar{\epsilon}} = \sqrt{\frac{1}{2(2-1)}\left[(\arccos(B_{142}) - \bar{\epsilon})^2 + (\arccos(B_{735}) - \bar{\epsilon})^2\right]} = 0{,}0098$$

assim, o resultado final fica:

$$\boxed{(1{,}38 \pm 0{,}01)\ rad}$$

ou

$$\boxed{(79{,}3 \pm 0{,}6)^o}$$