Problemas da Semana

Junho 2023

1 Problema Intermediário

2 Problema Intermediário

Problema (Polônia 2021/1) Seja p_i para $i = 1, 2, ..., k$ uma sequência dos menores números primos ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 3$ etc.). Seja $N = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k$. Prove que no conjunto $\{1, 2, ..., N\}$ existem exatamente $\frac{N}{2}$ números que são divisíveis por um número ímpar de p_i.

Solução: Vamos chamar um número no conjunto de "ruim" se for divisível por um número par de $p_i's$ e "bom" caso seja divisível por um número ímpar de $p_i's$. Observe que temos x um bom número se e somente se

$$mdc(x, N) = p_{i_1}p_{i_2}....p_{i_{2l+1}} = d$$

para algum $l \geq 0$ e $2l + 1$ inteiros positivos $i_1, i_2, ...i_{2l+1} \leq k$.

Então queremos todos os $x's$ tal que $d \mid x$ e $mdc(\frac{N}{d}, x) = 1$. Veja que o total de números coprimos com $\frac{N}{d}$ e menores que $\frac{N}{d}$ é exatamente $\phi(\frac{N}{d})$, pela definição da função tociente de Euler. Fixado d, há portanto $\phi(\frac{N}{d})$ números x bons com $mdc(N, x) = d$.

Se S_1 é o número de bons números, então:

$$S_1 = \sum_{i \in G} \phi(\frac{N}{i})$$

em que G é o conjunto dos números na forma $p_{i_1}p_{i_2}....p_{i_{2l+1}}$, para alguma escolha de i_j com $1 \leq j \leq 2l + 1$.

Analogamente, se S_2 é o número de números ruins, temos:

$$S_2 = \sum_{j \in B} \phi(\frac{N}{j})$$

em que B é o conjunto dos números na forma $p_{i_1}p_{i_2}....p_{i_{2l}}$ e o número 1. Queremos provar que $S_1 = S_2$, mas isso pode ser feito com uma bijeção. Considere o caso que k é par.

Em S_1, e $i \in G$, então toda parcela $\frac{N}{i} \in B$. Da mesma forma, toda parcela $\frac{N}{j} \in G$ em S_2. Como $|B| = |G|$, temos que $S_1 = \sum_{i \in B} \phi(i)$ e $S_2 = \sum_{j \in G} \phi(j)$. Se $2l$ é um número de G, então l é um número de B, e como:

$$\phi(2l) = \phi(2)\phi(l) = \phi(l)$$

Então eles cancelam em $S_1 - S_2$. Se $2v + 1$ é um número de G, então $4v + 2$ é um número de B, mas:

$$\phi(4v + 2) = \phi(2)\phi(2v + 1) = \phi(2v + 1)$$

E eles também cancelam. O caso em que k é ímpar é análogo. A conclusão é que para cada parcela em S_1, existe um outra de mesmo valor em S_2, portanto $S_1 = S_2$ e $S_1 + S_2 = N \iff S_1 = \frac{N}{2}$