Gabarito NOIC - OBMEP 2023 N3

Andressa Farias, Gustavo Linhares, Maria Luisa Berbert, Luiza Lanza...

Questão 1: É evidente que o último cartão colado foi o E uma vez que é o único completo no desenho e é o único que está sobre todos os outros cartões. Também fica claro que o cartão A está sobre o B, que por sua vez está sobre C e D. Ou seja, os dois primeiros cartões foram C e D, o terceiro cartão foi o B, o quarto foi o A e o último foi o E.
RESPOSTA: Cartão B foi o 3° cartão colado.

Questão 2: Chamaremos de $q_1, q_2, q_3, \cdots, q_7$ os lados dos quadradinhos $1, 2, 3, \cdots, 7$ respectivamente.
O caminho que João fez foi $3q_1 + 3q_2 + 3q_3 + \cdots + 3q_7$ e o caminho reto de A até B pode ser escrito como $q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_7$.

$$3q_1 + 3q_2 + 3q_3 + \cdots + 3q_7 = 6 \implies 3 \cdot (q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_7) = 6$$

$$q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_7 = 2km$$

RESPOSTA: $2km$

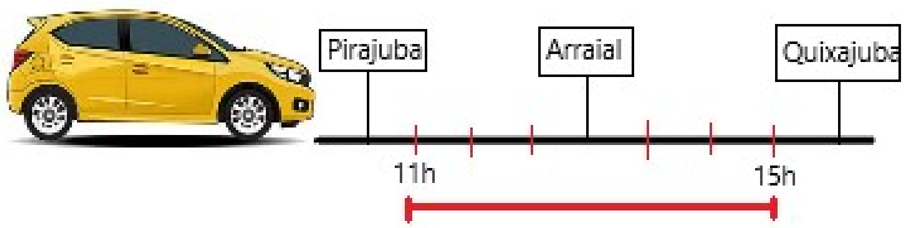
Questão 3: Perceba que é possível separar a sequência de caixas em duplas, ou seja, a cada duas caixas há 5 bolinhas - sendo 2 na primeira da dupla e 3 na segunda -, por exemplo nas 4 primeiras caixas há $5 \cdot 2 = 10$ bolinhas. A bolinha 2020, a qual é divisível por 5 e é próxima de 2023, está na dupla de caixa $2020 : 5 = 404$, logo, estará na caixa $404 \cdot 2 = 808$. Conclui-se que as bolinhas 2018, 2019 e 2020 estão na caixa 808, as bolinhas 2021 e 2022 estão na caixa 809 e por fim, as bolinhas 2023, 2024 e 2025 estão na caixa 810.
RESPOSTA: Caixa 810

Questão 4: $20235 \cdot 20235 - 20238 \cdot 20232$
Chamaremos toda essa expressão de E e o 20235 de x, tem-se, portanto, que

$$E = x \cdot x - (x + 3) \cdot (x - 3).$$

Utilizando a diferença de dois quadrados: $E = x^2 - (x^2 - 3^2) \implies E = 3^2 = 9$
RESPOSTA: 9

Questão 5: Sendo x a distância entre Pirajuba e Arraial e y a distância entre Arraial e Quixajuba, é possível implicar que o carro percorreu $\frac{3}{4}$ de x e $\frac{1}{4}$ de y das 11h até 15h uma vez que até às 11h ele percorrera $\frac{1}{4}$ de x e às 15h já havia chegado em $\frac{1}{4}$ de y. Veja o esquema abaixo:



Em 4h, o carro percorreu $60 \cdot 4 = 240km \Longrightarrow \frac{3x}{4} + \frac{3y}{4} = 240$ $x + y = \frac{4}{3} \cdot 240 \Longrightarrow x + y = 320km$

RESPOSTA: $320km$

Questão 6:

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Longrightarrow x^2 = 3x - 1$$

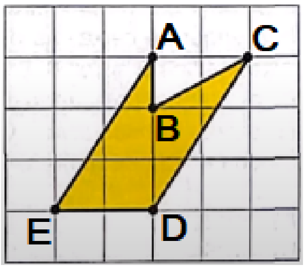
$$x^2 + \frac{1}{x^2} = (3x - 1) + \frac{1}{3x - 1} \Longrightarrow \frac{(3x-1)^2 + 1}{3x - 1}$$

$$\frac{9x^2 - 6x + 1 + 1}{3x - 1} = \frac{9 \cdot x^2 - 2(3x - 1)}{3x - 1}$$

Substituindo x^2 por $3x - 1$...

$$\frac{9 \cdot (3x - 1) - 2(3x - 1)}{3x - 1} = \frac{9 \cdot \cancel{(3x - 1)} - 2\cancel{(3x - 1)}}{\cancel{3x - 1}} = 9 - 2 = 7$$

RESPOSTA: 7



Questão 7: Sabe-se que a área do polígono é $30cm^2 \implies S_{\Delta ADE} + S_{\Delta BCD} = 30cm^2$

$$S_{\Delta ADE} = \frac{DE \cdot AD}{2}$$
$$S_{\Delta BCD} = \frac{BD \cdot AC}{2}$$

Sendo q o lado do quadradinho e q^2 sua área:

$$\frac{2q \cdot 3q}{2} + \frac{2q \cdot 2q}{2} = 30 \implies 6q^2 + 4q^2 = 30 \cdot 2 \implies q^2 = \frac{60}{10} \implies q^2 = 6cm^2$$

RESPOSTA: $6cm$

Questão 8: Podemos agrupar os números seguinte forma:

$$+1+\sqrt{2}+\sqrt{3}, +1+\sqrt{2}-\sqrt{3}, +1-\sqrt{2}+\sqrt{3}, +1-\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

$$-1+\sqrt{2}+\sqrt{3}, -1+\sqrt{2}-\sqrt{3}, -1-\sqrt{2}+\sqrt{3}, -1-\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

E levando em conta que

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = 5+2\sqrt{6}$$
$$(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = 5-2\sqrt{6}$$

Podemos realizar o produto da seguinte forma:

$$[1+(\sqrt{2}+\sqrt{3})]^2 \cdot [1-(\sqrt{2}+\sqrt{3})]^2 \cdot [1+(\sqrt{2}-\sqrt{3})]^2 \cdot [1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})]^2$$
$$= [(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 - 1]^2 \cdot [(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 - 1]^2$$
$$= (4+2\sqrt{6})^2 \cdot (4-2\sqrt{6})^2 = [(4+2\sqrt{6}) \cdot (4-2\sqrt{6})]^2 = (16-24)^2 = (-8)^2$$
$$= 64$$

RESPOSTA: 64

Questão 9: Sabe-se que as três crianças tem idades diferentes (7, 8 e 9 anos) e apenas uma delas - a de 8 anos - mente.

• A primeira criança diz que não tem 7 anos. Se ela estiver mentindo, então ela tem 7 anos, mas sabemos que apenas a de 8 anos mente, gerando uma contradição. Por conseguinte, ela está falando a verdade (não tem 7 anos e também não é a de 8) e tem 9 anos.

• A segunda criança afirma que não tem 9 anos. Se ela estiver mentindo, então ela tem 9 anos, mas sabemos que apenas a de 8 anos mente, gerando novamente uma contradição. Desse modo, ela está falando a verdade e tem 7 anos.

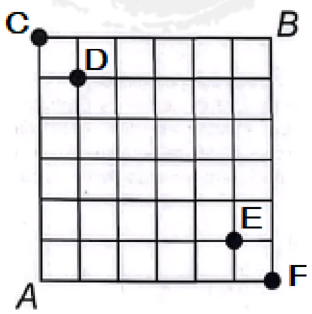
• Resta apenas que a última criança, a qual diz não ter 8 anos, tem 8 anos. O que apenas confirma que ela mente.

Isso posto, conclui-se que a criança mais velha é a que diz não ter 7 anos e a criança mais nova é a que diz não ter 9 anos.

RESPOSTA: Alternativa B

Questão 10: Observa-se que há apenas um caminho possível do ponto A até o ponto B passando por C, o mesmo acontece indo de A a B passando por F. De A até D há 6 caminhos diferentes os quais variam de acordo com a escolha de em qual linha a formiga virará a direita. De D até B há 6 caminhos diferentes os quais variam de acordo com a escolha de em qual coluna a formiga subirá. Desse modo, há $6 \cdot 6 = 36$ caminhos distintos de até B passando por D. Raciocínio análogo para achar a quantidade de caminhos distintos de A a B passando por E. Infere-se, desse modo, que há 1+1+36+36=74 caminhos distintos para a formiga fazer de A a B passando por algum dos 4 pontos indicados na figura.

RESPOSTA:74



Questão 11:

LEGENDA:

V_A-Velocidade de André

V_B-Velocidade de Bruno

V_C-Velocidade de Carlos

Sabe-se que o espaço percorrido por Bruno na corrida de 100m a partir do momento que André começou a correr foi $100-20=80 \Longrightarrow$. $\begin{cases} 100 = V_A \cdot t_1 \\ 80 = V_B \cdot t_1 \end{cases} \Longrightarrow$ $\frac{V_A}{V_B} = \frac{100}{80}$

Percebe-se ainda que o espaço percorrido por Carlos na corrida de 400m a partir do momento que Bruno começou a correr foi $400-20=380 \Longrightarrow$. $\begin{cases} 400 = V_B \cdot t_2 \\ 380 = V_C \cdot t_2 \end{cases} \Longrightarrow$ $\frac{V_B}{V_C} = \frac{400}{380}$

$\begin{cases} \frac{V_A}{V_B} = \frac{100}{80} \\ \frac{V_B}{V_C} = \frac{400}{380} \end{cases}$

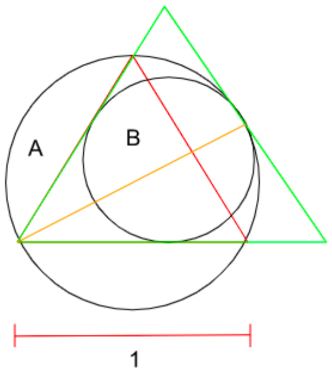
$$\frac{V_A}{\cancel{V_B}} \cdot \frac{\cancel{V_B}}{V_C} = \frac{100}{80} \cdot \frac{400}{380} = \frac{400}{8 \cdot 38} = \frac{25}{19} \Longrightarrow \frac{V_A}{V_C} = \frac{25}{19}$$

Queremos que em uma corrida de 800m, André e Carlos cheguem ao mesmo tempo, portanto $\begin{cases} 800 = V_A \cdot t_3 \\ 800 - x = V_C \cdot t_3 \end{cases}$

$$\frac{800}{800-x} = \frac{25}{19} \Longrightarrow x = 192m$$

RESPOSTA: 192m

Questão 12: Facilitaremos a figura geometricamente para centralizar o círculo B. Assim, dividiremos o problema em duas partes onde calcularemos o raio das circunferências A e B.



$RaioA = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$h = \cdot 2RaioA = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$RaioB = \frac{1}{3}h = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

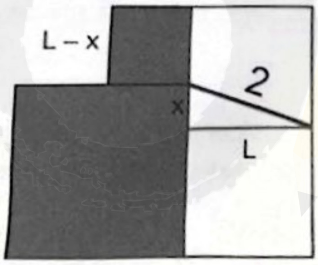
Dessa forma, só nos resta calcular a área de ambos cícurlos, depois subtraí-las e finalmente dividí-las pela área da circunferência A, para que encontremos a razão entre as figuras A e B.

$$\frac{\left(\pi\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \pi\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)^2\right)}{\left(\pi\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)}$$

Percebe-se que se simplificarmos está equação encontraremos um resultado de $\frac{4}{5}$.

RESPOSTA: Alternativa B

Questão 13:



Podemos indicar os catetos do triângulo retângulo cuja hipotenusa é 2 como sendo x e L. Dessa forma, é possível perceber que o maior cateto (medida L) é igual ao lado do quadrado branco. A partir disso, chegamos que a medida dos lados dos quadrados coloridos medem $L - x$ e $L + x$ e a soma das suas áreas são:

$$(L + x)^2 + (L - x)^2 = 2(x^2 + L^2)$$

Mas pelo teorema de Pitágoras temos que $x^2 + L^2 = 4$

$$2(x^2 + L^2) = 2 \cdot 4 = 8$$

RESPOSTA: 8

Questão 14:
Primeiramente, todos os 23 números que são maiores ou iguais a 77 podem ser escolhidos, pois a soma deles com qualquer outro número de 2 algarismo (sendo 10 o menor deles) resulta em um número maior que 86. Agora basta analisar os número de 10 a 76, e para isso vamos considerar os pares:

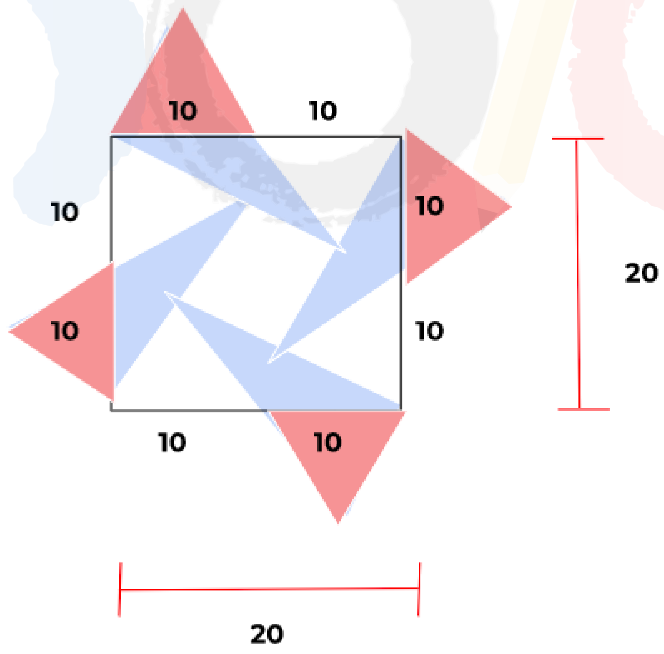
$$(10{,}76),(11{,}75),(12{,}74),\cdots,(42{,}44)$$

Todos os números agrupados em pares, ao serem somados com o par, resultam em 86. Dessa maneira, a sequência não pode conter dois números que estão no mesmo par. Portanto, como temos 33 pares e 1 número independente (43) que não se enquadra em nenhum dos dois casos apresentados, chegamos que o total de números é:

$$23 + 33 + 1 = 57$$

RESPOSTA: 57

Questão 15: Percebe-se que a figura apresentada pode ser transformada em um quadrado. Onde assim, só precisaremos indentificar que a base dos pequenos



triângulos que é equivalente a 10. Portanto, se somarmos a base de dois triângulos encontraremos um lado do quadrado.

$$10 + 10 = 20$$

Dessa forma, basta multiplicar os lados do quadrado para encontrar a área da figura.

$$20 \cdot 20 = 400cm^2$$

RESPOSTA: Alternativa D

Questão 16: Primeiramente, sabemos que a soma do conjunto dos 17 números inteiros é correspondente a 153. Assim, temos

$$153 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5...17$$
$$a \cdot b = 153 - a - b$$

Portanto,

$$153 = (a \cdot b) + a + b$$
$$154 = (a \cdot b) + a + b + 1 = (a - 1)(b - 1)$$

Logo, se fatorarmos 154 encontraremos que

$$154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$$

. Lembrando que ambos números inteiros são menores que 17 a única possibilidade é

$$(11 - 1) \cdot (14 - 1) = 130$$
$$a \cdot b = 10 \cdot 13 = 130$$

RESPOSTA: Alternativa D

Questão 17: Sabe-se que o produto de três números inteiros positivos em faces opostas é sempre o mesmo. Ou seja,

$$a \cdot 1 = 3 \cdot b = 6 \cdot c$$

Sabemos que nenhum dos números são 1, 3 e 6. Além disso, existem três faces diferentes que têm o produto igual a 98. Aqui está uma tabela de possiveís números inteiros que satisfazem as condições dadas: Podemos concluir que os três números

A	B	C
12	4	2
24	8	4
30	10	5
42	14	7

sendo multiplicados são:

$$1 \cdot 7 \cdot 14 = 98$$

Assim os números que aparecem nas faces distintas são 1, 7 e 14. Ou seja, 42 é a face oposta do número 1, representado pela letra A, sendo o maior número que aparece em alguma face do cubo.

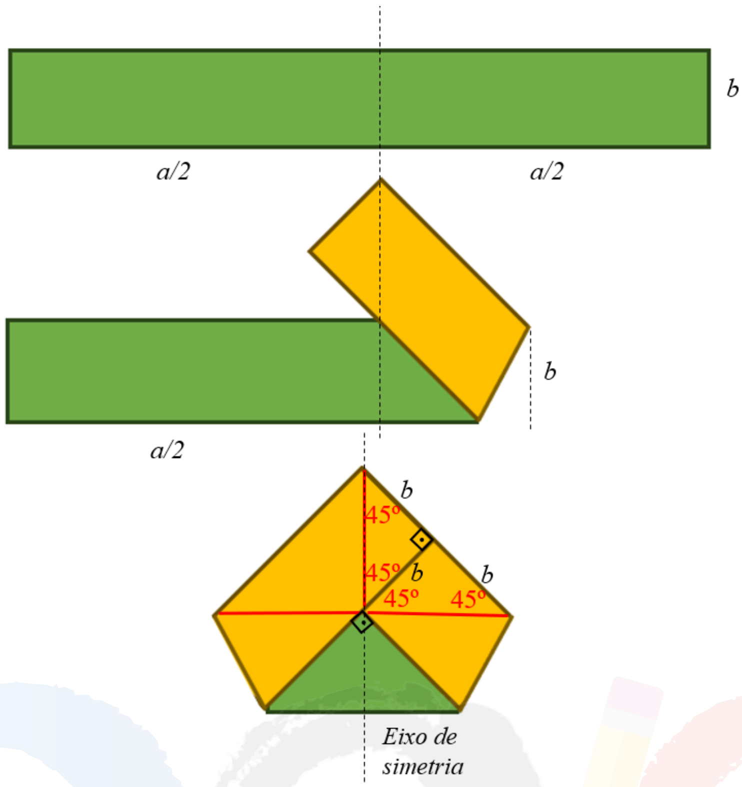
RESPOSTA: Alternativa E

Questão 18:
Como as meninas ocupam 5 lugares consecutivos e temos 10 cadeiras, podemos concluir que existem 6 configurações de posições de meninos e meninas no total. Como apenas 2 deles atende ao requisito da questão (Quando os 5 lugares ocupados consecutivamente por meninas estão nas bordas). Dessa forma, ao fazer a razão entre o número de configurações que atendem o requisito e o total obtemos:

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

RESPOSTA: $\frac{1}{3}$

Questão 19: Perceba os ângulos em destaque na figura, que são correspondentes aos ângulos do retângulo original: Podemos concluir que as linhas em vermelho



valem $b\sqrt{2}$, pois são as diagonais de um quadrado. Logo, metade do comprimento da tira equivale a $b\sqrt{2}$ mais o tamanho da tira que foi dobrado, $2b$. Dessa forma:

$$\frac{a}{2} = 2b + b\sqrt{2}$$

$$a = 4b + 2b\sqrt{2}$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{4b + 2b\sqrt{2}}{b}$$

$$\frac{a}{b} = 4 + 2\sqrt{2} \Longrightarrow \frac{a}{b} = 2(2 + \sqrt{2})$$

RESPOSTA: $2(2 + \sqrt{2})$

Questão 20: Considere o caso final, em que há 3 jogadores a menos. Logo, o total de jogos entre os jogadores que finalizaram o campeonato, desconsiderando os jogos dos desistentes, é $\frac{(n-3)\times((n-3)-1)}{2!} = \frac{(n-3)\times(n-4)}{2}$. Porém, os 3 jogadores que desistiram durante o campeonato, jogaram 2 partidas cada antes de saírem. Logo, o total de partidas é n tal que $\frac{(n-3)\times(n-4)}{2} + 3 \times 2 = 50$

Dentre as alternativas, percebemos que 12 não é a solução, pois para $n = 12$ teríamos no máximo 42 jogos, enquanto para $n = 14$ teríamos, no mínimo, 58 jogos. Ao substituir $n = 13$, o resultado do total de jogos é 51. Porém, é possível que uma das 6 partidas que foram jogadas pelos desistentes tenha sido jogada entre dois deles. Isso quer dizer que contamos essa partida duas vezes ao somar 6 partidas e, portanto, devemos subtrair 1 do resultado, pois é o número de permutações de uma partida de A para B e B para A. Logo, somente é possível que o torneio tenha exatamente 50 jogos caso o número de jogadores for 13.

Nota: Essa questão pode ser resolvida utilizando teoria de grafos. Uma solução seria ao final encontrarmos um grafo de 13 vértices, em que 6 deles tem grau 9, 4 tem grau 10 e 3 tem grau 2, totalizando $\frac{(6\times9)+(4\times10)+(3\times2)}{2!} = 50$ arestas, ou seja, 50 jogos disputados entre dois jogadores.