Trigonometria

Levi Félix e Fábio Medeiros

1 Introdução e Filosofia

Neste artigo, estudaremos as aplicações da trigonometria em problemas de geometria plana. Você verá que as contas são muito úteis, mas não é simples fazê-las! É preciso planejar as contas que serão feitas e ter o objetivo do problema bem claro na sua mente. Nos problemas deste material (e ao pensar usando Trigonometria em geral), é comum nos fazermos constantemente a pergunta: "Sei calcular isso?".

Muitas vezes, o que a Trigonometria faz é colocar as informações das configurações que não são familiares a nós em função de coisas que temos controle, como os ângulos do triângulo de referência ou lados do polígono. Quando conseguimos fazer isso, sabemos em nosso consciente que o problema acabou.

Afinal, não tem como uma expressão do tipo

$$\sin(90^\circ - B) + \cdots = \cdots + \sin(C + \frac{A}{2})$$

não ser verificável.

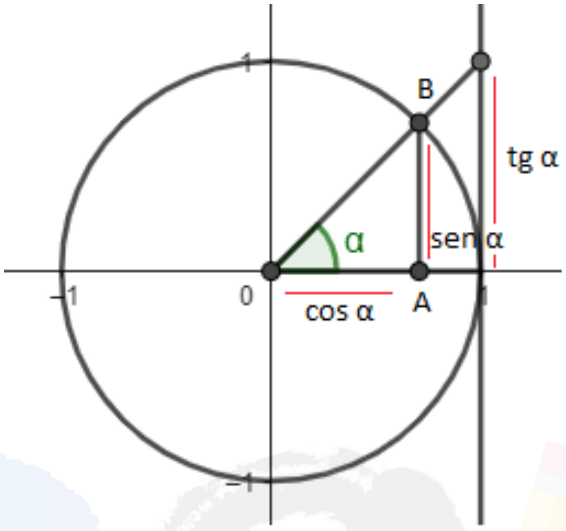
É claro! Não tem nada demais acontecendo, estamos em "casa"; é só um triângulo qualquer e se a matemática é verdade as coisas tem que se cancelar. Então, lembre-se de:

- Indentificar os parâmetros do problema.
- Traduzir a condição do enunciado de forma esperta em contas.
- **Sentir** que as coisas têm que dar certo.
- Ter em mente que todas as condições do problema devem ser usadas na resolução. Desse modo, ao montar a conta tente usar todas as propriedades da figura.

O que mais esperamos é que você aproveite bem os problemas resolvidos (as ideias e bizus estão todas lá) e propostos, que são a parte principal deste material. Se tiver sugestões de problemas ou de observações que podem tornar este material mais útil, não hesite em nos contatar pelos emails na última página. Boa leitura!

2 Teoria

Defina a circunferência unitária tendo centro (0, 0) e raio 1 no plano cartesiano. As medidas de seno, cosseno e tangente são definidas como na figura a seguir a partir de um raio da circunferência:



Segue por pitágoras no triângulo $\triangle OAB$ que: $\sin\theta^2 + \cos\theta^2 = 1$.
Além disso, por semelhança temos $\dfrac{tg\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha} \Leftrightarrow tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Para qualquer triângulo retângulo, temos uma semelhança de triângulos para o círculo unitário.

Assim, dado um triângulo $\triangle OA'B'$, temos
$\sin\alpha = AB = \dfrac{AB}{OB} = \dfrac{A'B'}{OB'}$ e $\cos\alpha = OA = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OA'}{OB'}$.

Logo, temos

$$\sin\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}},$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjascente}}{\text{hipotenusa}},$$

$$tg\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjascente}}.$$

2.1 Relações / Transformações

Podemos visualizar na circunferência unitária que

- $\sin(180° - \theta) = \sin\theta$
- $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$
- $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$
- $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

Onde $-\alpha = 360° - \alpha$ (módulo 360).

Somas:

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
- $tg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta}$

Produto em Soma:

- $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$
- $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$
- $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$

Soma em Produto:

- $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
- $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$
- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

Área do triângulo: No $\triangle ABC$ defina a, b, c os lados opostos a A, B, C; R e r o circunraio e inraio; r_a o raio do A-exincírculo; p=$\dfrac{a+b+c}{2}$ o semi-perímetro; h_a a altura relativa à A.

- $S = \dfrac{ah_a}{2}$
- $S = \dfrac{bc\sin A}{2}$
- $S = p \cdot r$
- $S = (p-a)r_a$
- $S = \dfrac{abc}{4R}$
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Valem as análogas para B e C.

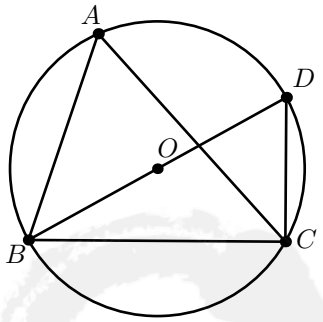
Depois de ver as relações fundamentais da Trigonometria, vamos provar os teoremas que serão utilizados nos problemas. Se já está cansado de ver essas demonstrações, sinta-se à vontade para ir direto aos problemas.

3 Teoremas

3.1 Lei dos Senos

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

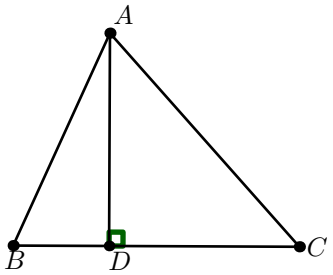
Demonstração: Seja D a antípoda de B em (ABC). Assim, $\angle BAC = \angle BDC \Rightarrow \sin \angle BAC = \sin \angle BDC = \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{a}{2R} \Rightarrow 2R = \dfrac{BC}{\sin A}$, e as outras frações são obtidas analogamente.



3.2 Lei dos Cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Demonstração: Traçando a altura AD do triângulo temos $BD = c \cos B$, $CD = b \cos C \Rightarrow a = BC = BD + DC = c \cos B + b \cos C \Leftrightarrow a^2 = ab \cos C + ac \cos B$.



Analogamente, $a^2 = ab \cos C + ac \cos B$, $b^2 = bc \cos A + ab \cos C$ e $c^2 = ac \cos B + bc \cos A$. Portanto, $a^2 = ab \cos C + ac \cos B = (b^2 - bc \cos A) + (c^2 - bc \cos A) = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

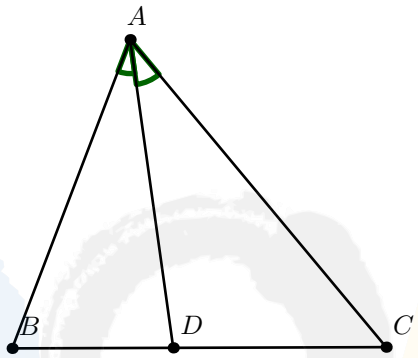
3.3 Lema da Ceviana Qualquer

Seja D um ponto qualquer em BC. Temos

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB \sin BAD}{AC \sin CAD}$$

Demonstração: Por lei dos senos:

- $\triangle ABD : \dfrac{AB}{\sin ADB} = \dfrac{BD}{sinBAD} \Leftrightarrow \dfrac{AB \sin BAD}{BD} = \sin ADB$
- $\triangle ACD : \dfrac{AC}{sinADC} = \dfrac{CD}{\sin CAD} \Leftrightarrow \dfrac{AC \sin CAD}{CD} = \sin ADB$



Mas $\sin ADB = \sin ADC$ pois somam 180°. Logo,

$$\frac{AB \sin BAD}{BD} = \frac{AC \sin CAD}{CD} \Leftrightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB \sin BAD}{AC \sin CAD}$$

.

3.4 Truque da Cotangente

Se $0 < x, y, z, w < \pi$, $x + y = z + w = s$ e $\dfrac{\sin x}{\sin y} = \dfrac{\sin z}{\sin w} \Rightarrow x = z, y = w$.

Demonstração: Temos $x = s - y$ e $z = s - w$, então $\dfrac{\sin s - y}{\sin y} = \dfrac{\sin s - w}{\sin w} \Leftrightarrow \dfrac{\sin s \cos y - \sin y \cos s}{\sin y} = \dfrac{\sin s \cos w - \sin w \cos s}{\sin w} \Leftrightarrow \dfrac{\sin s}{tg(y)} - \cos s = \dfrac{\sin s}{tg(w)} - \cos s \Leftrightarrow tg(y) = tg(w) \Leftrightarrow y = w$ pois são ângulos de triângulo.

Assim, $x = z$ e $y = w$, como queríamos demonstrar.

3.5 Ceva Trigonométrico

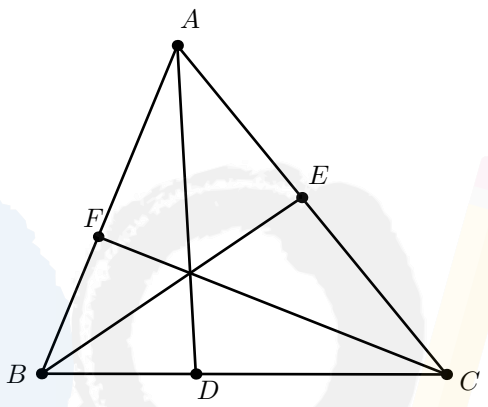
Três cevianas AD, BE e CF concorrem se, e somente se,

$$\frac{\sin\alpha_1 \cdot \sin\beta_1 \cdot \sin\gamma_1}{\sin\alpha_2 \cdot \sin\beta_2 \cdot \sin\gamma_2} = 1$$

Demonstração: Pelo teorema de ceva, temos AD, BE, CF concorrentes

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF}$$

Entretanto, $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB\sin\alpha_1}{AC\sin\alpha_2}$ pelo Lema da Ceviana Qualquer (e os análogos).



Portanto,

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = \frac{AB\sin\alpha_1}{AC\sin\alpha_2} \cdot \frac{BC\sin\gamma_1}{BA\sin\gamma_2} \cdot \frac{CA\sin\beta_1}{CB\sin\beta_2} = \frac{\sin\alpha_1 \cdot \sin\beta_1 \cdot \sin\gamma_1}{\sin\alpha_2 \cdot \sin\beta_2 \cdot \sin\gamma_2}$$

Desse modo, AD, BE, CF concorrem $\Leftrightarrow \dfrac{\sin\alpha_1 \cdot \sin\beta_1 \cdot \sin\gamma_1}{\sin\alpha_2 \cdot \sin\beta_2 \cdot \sin\gamma_2} = 1.$

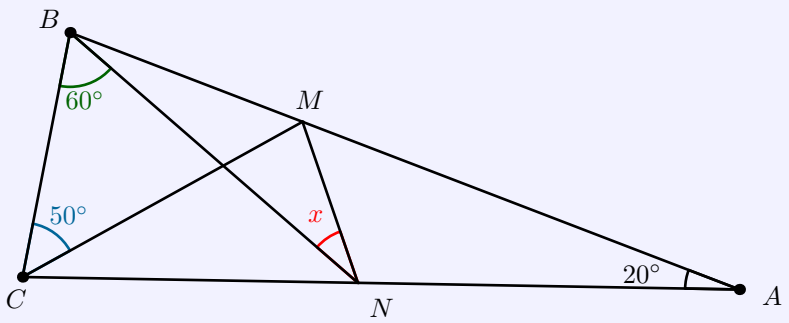
Agora sim estamos prontos para começar!

O problema a seguir é bem famoso e se encaixa numa classe de problemas que parecem ”mágicos”ao ver a solução sintética, mas viram entediantes quando se pega o jeito da coisa com trigonometria.

4 Problemas resolvidos

4.1 Introdutórios

1. (Triângulo Russo) Na figura abaixo, $AB = AC$. Determine $\angle BNM$.



Antes de ver a solução abaixo, tente resolver o problema sinteticamente.

Solução. Difícil, né? Mas veja como é bem mais natural pensar com trigonometria:

Marcando ângulos, é fácil obter $\angle NBA = 20°$, $\angle MCA = 30°$, *e* $\angle BNC = 40°$. Por lei dos senos em $\triangle CMN$ e $\triangle BMN$,

$$\frac{CM}{\sin(40° + x)} = \frac{MN}{\sin 30°} \qquad e \qquad \frac{BM}{\sin x} = \frac{MN}{\sin 20°}$$

Dividindo a primeira equação pela segunda, temos

$$\frac{CM \cdot \sin x}{BM \cdot \sin(40° + x)} = 2\sin 20° \Rightarrow \frac{\sin x}{\sin(40° + x)} = 2{\cdot}\sin 20°{\cdot}\frac{\sin 50°}{\sin 80°} = 2{\cdot}\sin 20°{\cdot}\frac{\sin 50°}{\sin 100°}$$

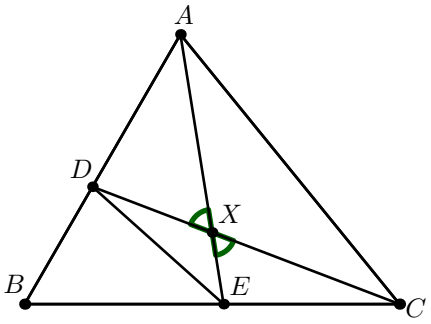
Usando lei dos senos em $\triangle BMC$ na primeira passagem. Daí,

$$\frac{\sin x}{\sin(140° - x)} = \frac{\sin 20°}{\cos 50°} = \frac{\sin 20°}{\sin 40°} = \frac{\sin 30°}{\cos 20°} = \frac{\sin 30°}{\sin 110°}$$

Então, pelo truque da cotangente, $x = 30°$.

OBS: caso tenha ficado curioso para a solução sintética, clique aqui.

2. (Rioplatense 2015) Seja ABC um triângulo acutângulo com com $AB < BC$ e sejam D e E pontos sobre os lados AB e BC, respectivamente, tais que $AD = DE = EC$. Os segmentos AE e DC se intersectam no ponto X. Se $AX = XC$, ache a medida de $\angle ABC$.



Solução. Já ouviu falar em congruência LLA? É pouco provável, pois ela não é uma congruência de verdade. Mesmo assim, é muito útil. Vamos ver!

Note que $\alpha = \angle EXC = \angle DXA$ e temos $XC = XA$; $AD = CE$. Temos dois pares de lados iguais e um ângulo arbitrário dos triângulos iguais (aqui que aparece o LLA!). Nesse momento a lei dos senos é uma ótima ideia:

- $\triangle XAD : \dfrac{AX}{\sin \angle ADX} = \dfrac{AD}{\sin \alpha} \Leftrightarrow \sin \angle ADX = \dfrac{AD \cdot AX}{\sin \alpha}$
- $\triangle XEC : \dfrac{CX}{\sin \angle XEC} = \dfrac{CE}{\sin \alpha} \Leftrightarrow \sin \angle XEC = \dfrac{CE \cdot CX}{\sin \alpha}$

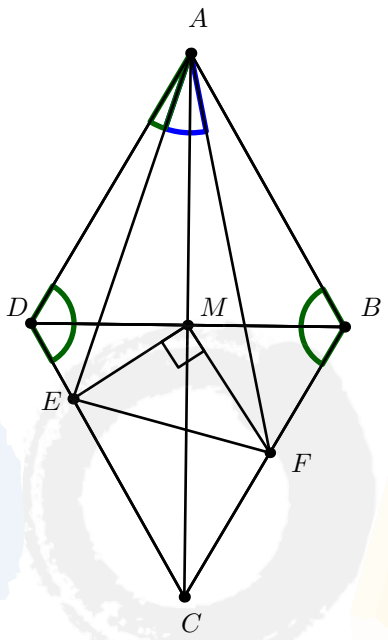
Mas as duas últimas expressões são iguais, pois $CE = AD, CX = AX$. Logo $\sin \angle ADX = \sin \angle XEC$. Entretanto, isso não nos garante que eles são iguais, podemos ter $\angle ADX = 180 - \angle XEC$. De fato, se fossem iguais, teríamos a congruência e aí $XE = XD \Rightarrow AE = AX + XE = CX + XD = CD$. Logo, teríamos $\triangle AEC \equiv \triangle ADC \Rightarrow \angle DAC = \angle ECA \Rightarrow \triangle ABC$ é isósceles, absurdo $(AB < AC)$!
Portanto, $\angle ADX = 180° - \angle XEC = 180° - (180° - \angle XEB) = \angle XEB \Rightarrow BDXE$ é cíclico $\Rightarrow \angle ABC = \angle DBE = \alpha$. Vamos marcar alguns ângulos para terminar: seja $\angle DAE = \angle DEA = x, \angle DCE = EDC = y \Rightarrow x + y = \alpha, \angle ADX = 180° - x - \alpha, \angle CEX = 180° - y - \alpha \Rightarrow 180° - x - \alpha = \angle ADX = 180° - \angle CEX = 180° - (180° - y - \alpha) = y + \alpha \Rightarrow 180 = 2\alpha + x + y = 3\alpha \Rightarrow \angle ABC = \alpha = 60°$.

Aprendizado: trigonometria é muito útil, mas é trabalhoso! Às vezes é necessária uma ánalise de casos no final, e pensar sintéticamente sempre ajuda.

4.2 Olímpicos

3. (TST Cone Sul 2017 - Adaptado) Seja ABCD um losango tal que os triângulos ABD e BCD sejam equiláteros. Sejam F e E pontos dos lados BC e CD, respectivamente, tais que $\angle EAF = 30°$. Seja M o ponto de interseção das diagonais AC e BD. Prove que $\angle EMF = 90°$.

Solução.



Temos $EMF = 90° \Leftrightarrow ME^2 + MF^2 = EF^2$. Por lei dos cossenos:

- I) $\triangle DEM : EM^2 = DE^2 + DM^2 - 2DE \cdot DM \cos 60 = DE^2 + DM^2 - DE \cdot DM$
- II) $\triangle BFM : FM^2 = DF^2 + DM^2 - 2DF \cdot DM \cos 60 = DF^2 + DM^2 - DF \cdot DM$
- III) $\triangle AEF : AE^2 + AF^2 - 2AE \cdot AF \cos 30 = AE^2 + AF^2 - \sqrt{3}AE \cdot AF = EF^2$

Fazendo I+II+III: $ME^2 + MF^2 + (AE^2 + AF^2 - \sqrt{3}AE \cdot AF) = EF^2 + (DE^2 + DM^2 - DE \cdot DM + BF^2 + BM^2 - BM \cdot BF)$. Logo, $ME^2 + MF^2 = EF^2 \Leftrightarrow AE^2 + AF^2 - \sqrt{3}AE \cdot AF = DE^2 + DM^2 - DE \cdot DM + BF^2 + BM^2 - BM \cdot BF (*)$. Temos coisas feias dos dois lados, como podemos juntá-las de modo a deixar o problema mais atacável?

Perceba que podemos juntar AE^2 com DE^2 e AF^2 com BF^2:

- i) Lei dos Cossenos: $\triangle ADE : AE^2 = AD^2 + DE^2 - 2AD \cdot DE \cos 120 = AD^2 + DE^2 + AD \cdot DE$
- ii) Lei dos Cossenos: $\triangle ABF : AF^2 = AB^2 + BF^2 - 2AB \cdot BF \cos 120 = AB^2 + BF^2 + AB \cdot BF$

Substituindo em $(*) : AD^2 + AD \cdot DE + AB^2 + AB \cdot BF - \sqrt{3}AE \cdot AF = DM^2 + BM^2 - DE \cdot DM - BF \cdot BM (*')$. Mesmo tendo uma equação maior, temos mais coisas envolvendo nossa figura base e menos coisas feias. Seja l o lado dos triângulos equiláteros $\Rightarrow (*') : 2l^2 + l(DE + BF) - \sqrt{3}AE \cdot AF = 2\frac{l^2}{4} - \frac{l}{2}(DE + BF) \Leftrightarrow \sqrt{3}AE \cdot AF = \frac{3}{2}l^2 + \frac{3}{2}l \cdot DE \cdot BF \Leftrightarrow \sqrt{3}AE \cdot AF = \frac{3}{2}l(l + DE + BF) \Leftrightarrow AE \cdot AF = \frac{\sqrt{3}}{2}l(l + DE + BF)(*'')$. Vamos escrever esses segmentos em função de l por lei dos senos:

- $AE : \frac{AE}{\sin 120} = \frac{l}{\sin 60 - x} \Leftrightarrow AE = \frac{l \sin 60}{\sin 60 - x}$
- $AF = \frac{AF}{\sin 120} = \frac{l}{\sin 30 + x} \Leftrightarrow AF = \frac{l \sin 60}{\sin 30 + x}$
- $DE : \frac{DE}{\sin x} = \frac{l}{\sin 60 - x} \Leftrightarrow DE = \frac{l \sin x}{\sin 60 - x}$
- $BF : \frac{BF}{\sin 30 - x} = \frac{l}{30} \Leftrightarrow BF = \frac{l \sin 30 - x}{\sin 30 + x}$

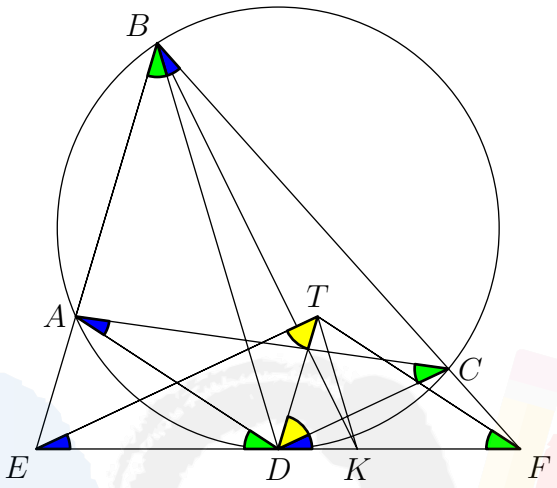
Substituindo em $(*'') : \frac{l^2 \sin 60^2}{\sin 60 - x \cdot \sin 30 + x} = \cos 30 l(l + \frac{l \sin x}{\sin 60 - x} + \frac{l \sin 30 - x}{\sin 30 + x} \overset{\div l^2 \sin 60}{\Leftrightarrow} \frac{\sin 60}{\sin 60 - x \cdot \sin 30 + x} = 1 + \frac{\sin x}{\sin 60 - x} + \frac{\sin 30 - x}{\sin 30 + x}$.

Como o problema é verdade, isso tem que ser verdade! Com o tempo, você perceberá que quando chegar em uma equação de senos e cossenos, o problema já está conscientemente acabado, a conta irá sair.

Queremos: $\sin 60 = \sin(60 - x)\sin(30 + x) + \sin(30 + x)\sin x + \sin(60 - x)\sin(30 - x) = \frac{1}{2}(\cos(30 - 2x) - \cos 90 + \cos 30 - cos(30 + 2x) + cos30 - cos(90 - 2x)) \Leftrightarrow 2\sin 60 = \cos(30 - 2x) + \cos 30 - \cos(30 + 2x) + cos30 - cos(90 - 2x) \Leftrightarrow 0 = \cos(30 - 2x) - \cos(30 + 2x) - \cos(90 - 2x) \Leftrightarrow \cos(90 - 2x) = \cos(30 - 2x) - \cos(30 + 2x) = 2\sin(30)\sin(2x) = \sin 2x$, fato! Assim, concluímos o problema.

4. (IMO Shortlist 2021) Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em um círculo Ω. A tangente a Ω por D encontra as semirretas BA e BC em E e F, respectivamente. Um ponto T é escolhido dentro de $\triangle ABC$ de modo que $\overline{TE} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{TF} \parallel \overline{AD}$. Seja $K \neq D$ um ponto no segmento DF satisfazendo $TD = TK$. Prove que as retas AC,DT e BK são concorrentes.

Solução. Seja $\angle CDF = \angle TEF = \alpha$ e $\angle ADE = \angle TFE = \beta$.



Não espere que ao tentar fazer um problema com métodos analíticos você magicamente encontre a solução só fazendo contas. Nesse caso, é essencial fazer uma boa figura e suspeitar que...

Conjectura: $TK \parallel BD$.

Prova. $TK \parallel BD \iff \angle TKE = \angle TKD \overset{?}{=} \angle BDE = \angle BCD = \angle CFD + \angle FDC$, mas $\angle TDK = \angle FDC + \angle TDC$, então queremos $\angle TDC = \angle ETD = \angle CFD$. Agora, faremos algumas contas.

Pelo Lema da Ceviana Qualquer em $(TD, \triangle ETF)$, temos

$$\frac{ED}{DF} = \frac{TE \cdot \sin \angle ETD}{TF \cdot \sin(\angle ETF - \angle ETD)} \Rightarrow \frac{\sin \angle ETD}{\sin(\angle ETF - \angle ETD)} = \frac{ED \cdot \sin \alpha}{DF \cdot \sin \beta} \qquad (I)$$

Por lei dos senos em $\triangle BEF$, temos

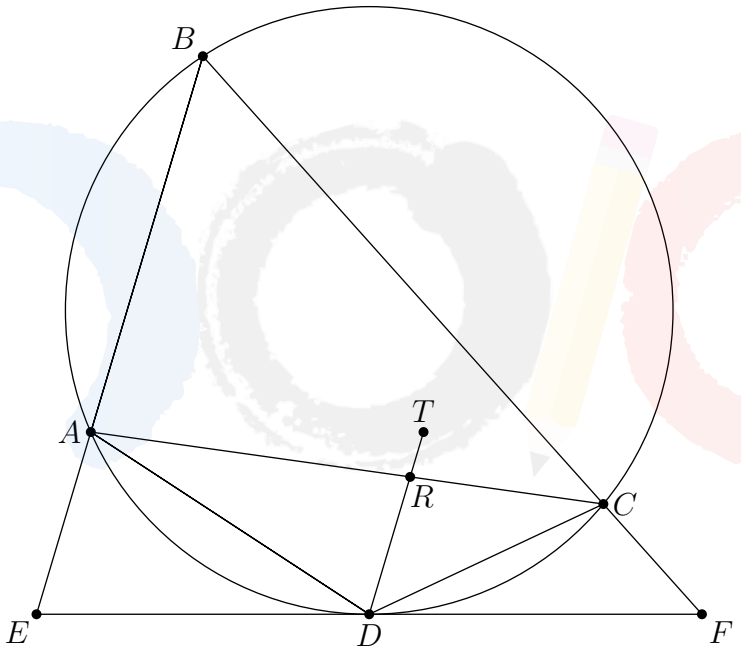
$$\frac{\sin \angle CFD}{\sin(180^\circ - \angle EBF - \angle CFD)} = \frac{BE}{BF} \qquad (II)$$

Mas veja que, pelo Lema da Ceviana Qualquer em $(BD,\ \triangle BEF)$, temos $(I) = (II) \Rightarrow \angle CFD = \angle ETD$ pelo truque da cotangente, já que as somas dos ângulos nas frações são iguais, como queríamos demonstrar.

Agora, é importante parar, respirar e fazer um plano pra saber de que forma vamos obter o resultado do enunciado, até porque ficar procurando fatos e apenas "rodeando"o problema não vai de fato resolvê-lo. Nesse caso, uma estratégia natural é mostrar que as retas DT e BK cortam o segmento AC na mesma razão. Lembre-se: Dizemos que "calculamos"algo quando o deixamos em função de coisas familiares, como lados do polígono de referência ou segmentos bem definidos por eles.

(i). Em que razão DT corta AC?

Seja $DT \cap AC = R$. Vamos calcular $CR : RA$.

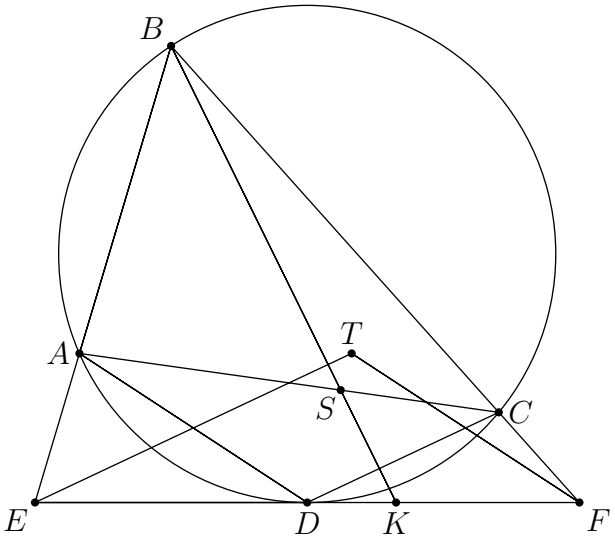


Pelo Lema da Ceviana Qualquer em $(DR,\ \triangle DAC)$, temos

$$\frac{CR}{RA} = \frac{CD \cdot \sin \angle CDT}{AD \cdot \sin \angle TDA} = \frac{CD \cdot \sin \angle BFE}{AD \cdot \sin \angle BEF} = \frac{CD \cdot BE}{AD \cdot BF}.$$

(ii). Em que razão BK corta AC?

Seja $AC \cap BK = S$. Vamos calcular $CS : SA$.



Pelo Lema da Ceviana Qualquer em $(BS, \triangle ABC)$, temos

$$\frac{CS}{SA} = \frac{BC \cdot \sin \angle CBK}{BA \cdot \sin \angle EBK} = \frac{BC \cdot FK \cdot BE}{BA \cdot KE \cdot BF}.$$

usando também o Lema da Ceviana Qualquer em $(BK, \triangle EBF)$.
Seja $\angle TDC = \angle BFE = \theta \Rightarrow \angle TDK = \alpha + \theta \Rightarrow \angle DTK = 180^\circ - 2(\alpha + \theta)$
Agora, pelo Lema da Ceviana Qualquer em $(TK, \triangle ETF)$, temos

$$\frac{FK}{KE} = \frac{TF \cdot \sin(\angle ETF - \angle ETK)}{TE \cdot \sin \angle ETK} = \frac{TF \cdot \sin(180^\circ - \alpha - \beta - (\theta + 180 - 2(\alpha + \theta)))}{TE \cdot \sin(\theta + (180^\circ - 2(\alpha + \theta)))}$$

$$\Rightarrow \frac{FK}{KE} = \frac{TF \cdot \sin(\alpha + \theta - \beta)}{TE \cdot \sin(180^\circ - \theta - 2\alpha)} = \frac{TF \cdot \sin \angle BCA}{TE \cdot \sin \angle BAC} = \frac{TF \cdot BA}{TE \cdot BC}.$$

Por fim, substituindo na expressão de $CS : SA$, chegamos em

$$\frac{CS}{SA} = \frac{BC \cdot FK \cdot BE}{BA \cdot KE \cdot BF} = \frac{BE \cdot TF}{BF \cdot TE}.$$

Como nosso objetivo é mostrar que

$$\frac{CR}{RA} = \frac{CS}{SA},$$

Basta então que

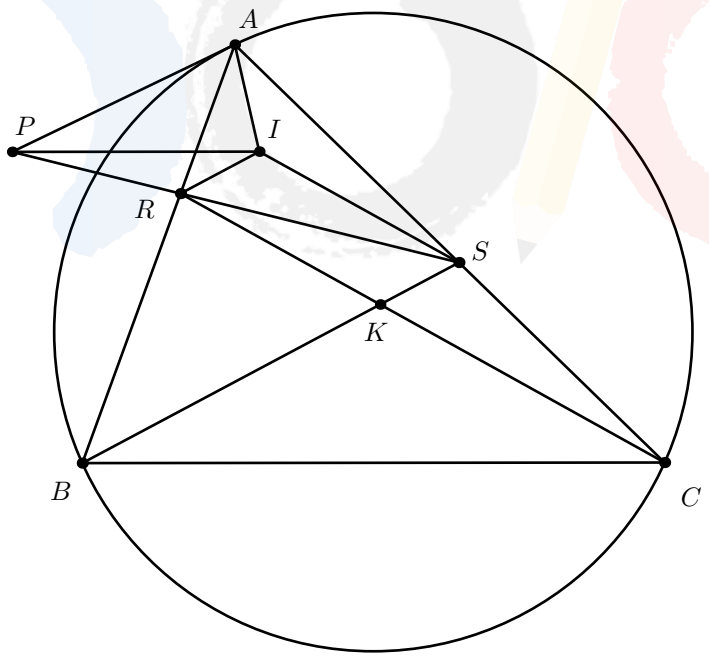
$$\frac{CD}{AD} = \frac{TF}{TE},$$

Mas isso é verdade, já que $\triangle CDA$ é semelhante a $\triangle FTE$.

■

5. (Vingança Olímpica 2017) Seja $\triangle ABC$ um triângulo de circuncírculo Γ. Suponha que existam pontos R e S sobre os lados AB e AC, respectivamente, tais que $BR = RS = SC$. A tangente por A a Γ intersecta RS em P. Seja I o incentro do triângulo $\triangle ARS$. Prove que $PA = PI$.

Solução.



Novamente, nossa estratégia é provar que o ponto que a questão nos dá e o ponto que satisfaz a propriedade desejada são iguais.

Veja que $\angle PAI = C + \frac{A}{2} = \angle(AI, BC)$, então basta mostrar que $PI \parallel BC$.
Seja Q o ponto em RS tal que $IQ \parallel BC$. Nosso objetivo é provar $P = Q$.
Com lei dos senos em $\triangle QIR$ e $\triangle QIS$, obtemos

$$\frac{QR}{IR} = \frac{\sin \angle QIR}{\sin \angle IQR} \quad e \quad \frac{QS}{IS} = \frac{\sin \angle QIS}{\sin \angle IQS}.$$

Logo,

$$\frac{QR}{QS} = \frac{IR}{IS} \cdot \frac{\sin \angle QIR}{\sin \angle QIS} = \frac{IR}{IS} \cdot \frac{KC}{KB}.$$

donde usamos $\angle QIR = \angle KBC$ e $\angle QIS = 180° - \angle KCB$, que é fácil obter marcando ângulos. Temos também $\angle IRS = \angle ABS$ e $\angle ISR = \angle ACR$, logo

$$\frac{QR}{QS} = \frac{IR}{IS} \cdot \frac{KC}{KB} = \frac{\sin \angle ACR}{\sin \angle ABS} \cdot \frac{\sin \angle CBS}{\sin \angle BCR} = \frac{\sin \angle CAK}{\sin \angle BAK}.$$

por Ceva Trigonométrico no ponto K.
Agora, vamos olhar um pouco para o P.
Por lei dos senos em $\triangle APR$ e $\triangle APS$, temos

$$\frac{PR}{AR} = \frac{\sin C}{\sin \angle APR} \quad e \quad \frac{PS}{AS} = \frac{\sin B}{\sin \angle APR}.$$

Então,

$$\frac{PR}{PS} = \frac{AR}{AS} \cdot \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{AR}{AS} \cdot \frac{AB}{AC}.$$

Logo, queremos

$$\frac{PR}{PS} = \frac{AR}{AS} \cdot \frac{AB}{AC} \stackrel{?}{=} \frac{QR}{QS} = \frac{\sin \angle CAK}{\sin \angle BAK}.$$

Mas note que, usando o Lema da Ceviana qualquer em $(AK, \triangle ABC)$ seguido do Teorema de Ceva, temos

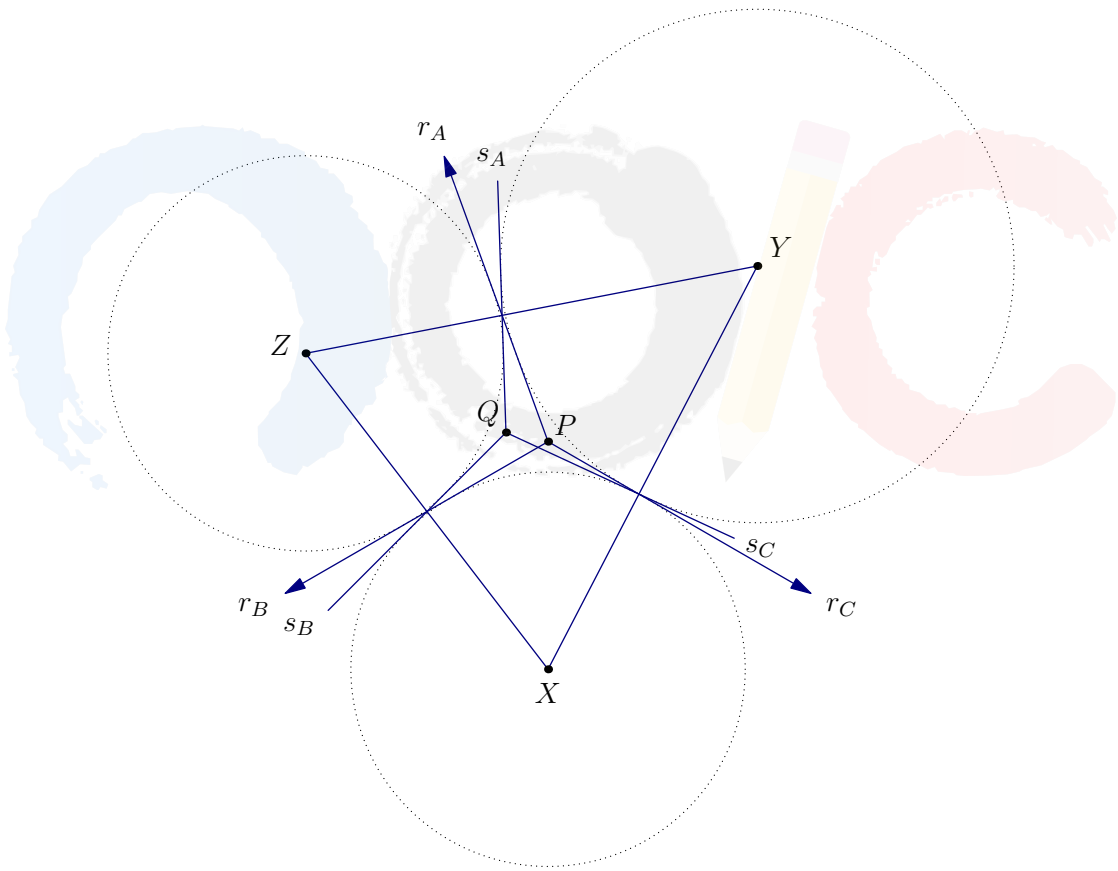
$$\frac{\sin \angle CAK}{\sin \angle BAK} = \frac{CS}{SA} \cdot \frac{AR}{RB} \cdot \frac{AB}{AC}.$$

.

Como $CS = RB$, obtemos exatamente a expressão desejada, implicando em $P = Q$, como queríamos demonstrar.

6. (OBM 2020) Sejam r_A, r_B e r_C semirretas de origem P. O círculo ω_a, de centro X, é tangente a r_B e r_C; o círculo ω_b , de centro Y, é tangente a r_C e r_A; e o círculo ω_c , de centro Z, é tangente a r_A e r_B. Suponha que P está no interior do triângulo XYZ, de modo que r_A, r_B e r_C sejam tangentes comuns internas aos círculos correspondentes. Sejam s_A a reta tangente internamente a ω_b e ω_c que não contém r_A, s_B a reta tangente internamente a ω_c e ω_a que não contém r_B e s_C a reta tangente internamente a ω_a e ω_b que não contém r_C. Prove que s_A, s_B e s_C têm um ponto comum Q, e prove que P e Q são conjugados isogonais no triângulo XYZ, ou seja, as retas XP e XQ são simétricas com relação à bissetriz de $\angle YXZ$ e as retas YP e YQ são simétricas com relação à bissetriz de $\angle XYZ$.

Solução.



Antes da solução, vamos provar um lema útil e conhecido.

Lema 1: Em um triângulo $\triangle ABC$, sejam D e E pontos sobre o lado BC. Então,

$$AD \text{ e } AE \text{ são isogonais} \iff \frac{BD}{DC} \cdot \frac{BE}{EC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

Prova. ($\Rightarrow$) Por lei dos senos em $\triangle CAD$ e $\triangle BAD$, temos

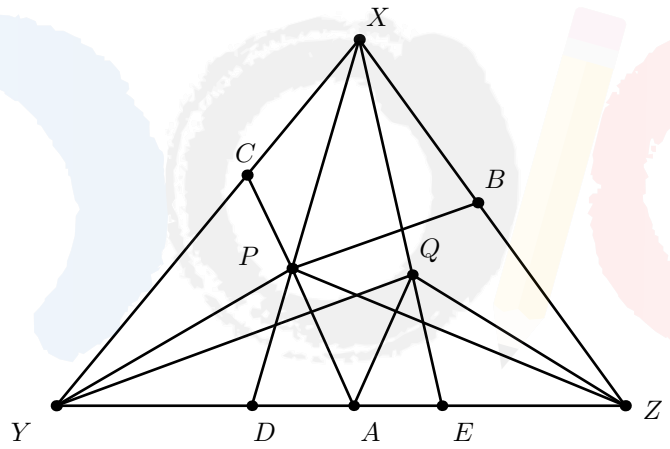
$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle CAD}.$$

De forma análoga, por lei dos senos em $\triangle BAE$ e $\triangle CAE$, temos

$$\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \angle BAE}{\sin \angle CAE}.$$

Multiplicando as equações, obtemos o resultado desejado.

OBS: ($\Leftarrow$) se dá pelo fato de que, dado um ponto D em BC, apenas um ponto E no interior satisfaz o valor desejado para $BE : EC$. Agora, vamos ao problema.



Seja $A = r_A \cap s_A$ (que também está em YZ). Defina B e C analogamente. Seja ainda $D = XP \cap YZ$. Como YZ bisecta $\angle(r_A, s_A)$ e as retas concorrem em A, temos que s_A é o reflexo de r_A por YZ. Nossa estratégia será definir Q como o conjugado isogonal de P em $\triangle XYZ$ e provar que s_A passa por Q. Assim, de modo análogo isso valerá para s_B e s_C e o problema estará resolvido.

Sejam $\angle BPX = \angle XPC = \alpha$, $\angle CPY = \angle YPA = \beta$ e $\angle APZ = \angle ZPB = \gamma$. Hora de buscar propriedades que nos ajudem nas contas! Veja que

$$\angle YPD = 180^\circ - \angle XPY = 180^\circ - \angle XPC - \angle CPY = 180^\circ - \alpha - \beta = \gamma = \angle APZ,$$

onde usamos $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Ou seja, PD e PA são isogonais em $\triangle YPZ$.

Agora, uma boa intuição nos leva a achar que...
Conjectura: QE e QA são isogonais em $\triangle YQZ$, se $E = XQ \cap YZ$.
Prova. Queremos mostrar, pelo **Lema 1**, que

$$\frac{YA \cdot YE}{AZ \cdot EZ} = \left(\frac{QY}{QZ}\right)^2.$$

e já temos

$$\frac{YD \cdot YE}{ZD \cdot EZ} = \left(\frac{XY}{XZ}\right)^2 \quad e \quad \frac{YD \cdot YA}{DZ \cdot AZ} = \left(\frac{PY}{PZ}\right)^2.$$

Multiplicando as duas últimas equações, temos

$$\left(\frac{YD}{ZD}\right)^2 \frac{YA \cdot YE}{AZ \cdot EZ} = \left(\frac{XY}{XZ}\right)^2 \left(\frac{PY}{PZ}\right)^2.$$

Então, basta provarmos que

$$\left(\frac{YD}{ZD}\right)^2 \left(\frac{QY}{QZ}\right)^2 = \left(\frac{XY}{XZ}\right)^2 \left(\frac{PY}{PZ}\right)^2,$$

Ou seja, queremos

$$\frac{YD}{ZD} \cdot \frac{QY}{QZ} \cdot \frac{XZ}{XY} \cdot \frac{PZ}{PY} = 1.$$

Por lei dos senos em $\triangle XDY$ e $\triangle XDZ$, temos

$$\frac{YD}{XY} = \frac{\sin \angle YXD}{\sin \angle XDY} \quad e \quad \frac{ZD}{XZ} = \frac{\sin \angle ZXD}{\sin \angle XDZ}$$

.

Dividindo a primeira equação pela segunda e usando $\angle XDY + \angle XDZ = 180°$,

$$\frac{YD}{ZD} \cdot \frac{XZ}{XY} = \frac{\sin \angle YXP}{\sin \angle PXZ}$$

Por lei dos senos em $\triangle QYZ$ e $\triangle PYZ$, temos

$$\frac{QY}{QZ} = \frac{\sin \angle QZY}{\sin \angle QYZ} = \frac{\sin \angle PZX}{\sin \angle PYX} \quad e \quad \frac{PZ}{PY} = \frac{\sin \angle PYZ}{\sin \angle PZY}$$

Finalmente, usando Ceva Trigonométrico em P no $\triangle XYZ$,

$$\frac{YD}{ZD} \cdot \frac{QY}{QZ} \cdot \frac{XZ}{XY} \cdot \frac{PZ}{PY} = \frac{\sin \angle YXP}{\sin \angle PXZ} \cdot \frac{\sin \angle PZX}{\sin \angle PYX} \cdot \frac{\sin \angle PYZ}{\sin \angle PZY} = 1.$$

Para finalizar o problema, vamos marcar ângulos (de novo). Veja que

$$\angle PAY = 180^\circ - \angle PYA - \angle YPA = 180^\circ - \angle PYZ - \angle DPZ$$

$$= 180^\circ - \angle QYX - (\angle PXZ + \angle XZP) = 180^\circ - \angle QYX - \angle QXY - \angle YZQ$$

$$= 180^\circ - \angle EQY - \angle YZQ = 180^\circ - \angle AQZ - \angle AZQ$$

$$= \angle QAZ$$

.

Logo, obtemos que QA é o reflexo de r_A por YZ, ou seja, a própria reta s_A. Lembre que esse resultado é análogo para B e C!

Assim, s_A, s_B e s_C concorrem no conjugado isogonal de P no triângulo XYZ.

■

5 Problemas para praticar (Ignore a ordem!)

1. (Reta de Schwatt) Seja ABC um triângulo acutângulo com altura AD. Seja M_a e N_a os pontos médios de AD e BC, respectivamente. Defina M_b, N_b, M_c, N_c de maneira análoga. Prove que as retas M_aN_a, M_bN_b e M_cN_c concorrem no ponto simediano do triângulo ABC.

2. (OBM 2018 N2) Seja ABC um triângulo acutângulo de circuncentro O e ortocentro H. A circunferência de centro X_A passa pelos pontos A e H e tangencia o circuncírculo do triângulo ABC. Defina de maneira análoga os pontos X_B e X_C. Sejam O_A, O_B e O_C os simétricos de O em relação aos lados BC, CA e AB, respectivamente. Prove que as retas O_AX_A, O_BX_B e O_CX_C são concorrentes.

3. (Cone Sul 2022) Seja ABC um triângulo com incírculo ω, tangente à BC, CA, AB em D, E, F. A perpendicular por B a BC intersecta EF em M, e a perpendicular por C à BC intersecta EF em N. Sejam P and Q as interseções de DM e DN com ω, respectivamente. Prove que $DP = DQ$.

4. (OMCPLP 2023) Seja D um ponto no interior de um triângulo ABC tal que $AD = CD$, $\angle DAB = 70°$, $\angle DBA = 30°$ e $\angle DBC = 20°$. Determine a medida do ângulo $\angle DCB$.

5. (OBM 2011) Seja ABC um triângulo e H seu ortocentro. AS retas BH e CH encontram AC e AB em E e F, respectivamente. O circuncírculo de AEF intersecta (ABC) em Q. Prove que as bissetrizes de BQC e BHC concorrem em BC.

6. (Rioplatense 2008) Seja ABC um triângulo, onde $AB < AC$. Sejam X, Y, Z os pontos de contato do incírculo com BC, CA, AB, respectivamente. No circuncírculo de ABC, seja U o ponto médio do arco BC que contém A. A reta UX intersecta (ABC) em K. Seja T o ponto de interseção de AK e YZ. Prove que XT é perpendicular à YZ.

7. (NIMO 2014) Seja ABC um triângulo e Q ser tal que $AB \perp QB$ e $AC \perp QC$. Seja I o incentro do $\triangle ABC$. O incírculo tangencia BC, CA e AB nos pontos D, E, e F, respectively. Seja P a interseção de QI e EF, prove que $DP \perp EF$.

8. (IMOSL 2012) Seja ABC um triângulo com $AB \neq AC$ e circumcentro O. A bissetriz de $\angle BAC$ intersecta BC at D. Seja E a reflexão de D pelo ponto médio de BC. As retas por D e E perpendiculares a BC intersectam as retas AO e AD em X e Y respectivamente. Prove que o quadrilátero $BXCY$ é cíclico.

9. (IMOSL 2012) Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico com diagonais AC e BD se intersectando em E. Os prolongamentos dos lados AD e BC por A e B se encontram em F. Seja G o ponto tal que $ECGD$ é um paralelogramo, e seja H o reflexo de E por AD. Prove que D,H,F,G são concíclicos.

10. (IMOSL 2012) In an acute triangle ABC the points D,E and F are the feet of the altitudes through A,B and C respectively. The incenters of the triangles AEF and BDF are I_1 and I_2 respectively; the circumcenters of the triangles ACI_1 and BCI_2 are O_1 and O_2 respectively. Prove that I_1I_2 and O_1O_2 are parallel.

11. (IMOSL 2019) Let ABC be an acute-angled triangle and let D, E, and F be the feet of altitudes from A, B, and C to sides BC, CA, and AB, respectively. Denote by ω_B and ω_C the incircles of triangles BDF and CDE, and let these circles be tangent to segments DF and DE at M and N, respectively. Let line MN meet circles ω_B and ω_C again at $P \neq M$ and $Q \neq N$, respectively. Prove that $MP = NQ$.

12. (IMOSL 2015) Let ABC be an acute triangle with orthocenter H. Let G be the point such that the quadrilateral $ABGH$ is a parallelogram. Let I be the point on the line GH such that AC bisects HI. Suppose that the line AC intersects the circumcircle of the triangle GCI at C and J. Prove that $IJ = AH$.

13. Seja ABC um triângulo acutângulo, O seu circuncentro e H seu ortocentro. A mediatriz de AH intersecta AB e AC em P e Q, respectivamente. Prove que OA é bissetriz de $\angle POQ$.

14. (OBM 2020) Seja ABC um triângulo. Os círculos ex-inscritos (que tangenciam um lado e os prolongamentos de outros dois lados) tocam os lados BC, CA e AB nos pontos U, V e W, respectivamente. Sejam r_u a reta que passa por U e é perpendicular a BC, r_v a reta que passa por V e é perpendicular a CA e r_w a reta que passa por W e é perpendicular a AB. Prove que as retas r_u, r_v e r_w passam por um mesmo ponto.

15. (Sérvia 2023) Seja ABC um triângulo com circuncentro O e ortocentro H. Sejam O_a, O_b, O_c os circuncentros de $\triangle AOH$, $\triangle BOH$, $\triangle COH$. Prove que AO_a, BO_b, CO_c são concorrentes.

16. (IMOSL 2016) Seja ABC be a triangle with circumcircle Γ and incenter I and let M be the midpoint of $\overline{BC}$. The points D, E, F are selected on sides $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ such that $\overline{ID} \perp \overline{BC}$, $\overline{IE} \perp \overline{AI}$, and $\overline{IF} \perp \overline{AI}$. Suppose that the circumcircle of $\triangle AEF$ intersects Γ at a point X other than A. Prove that lines XD and AM meet on Γ.

17. (IMO 1996) Seja P um ponto no interior do triângulo ABC tal que

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$$

Sejam D e E os incentros dos triângulos APB e APC, respectivamente. Mostre que AP, BD e CE concorrem.

18. (IMO 2001) Let ABC be a triangle with $\angle BAC = 60°$. Let AP bisect $\angle BAC$ and let BQ bisect $\angle ABC$, with P on BC and Q on AC. If $AB + BP = AQ + QB$, what are the angles of the triangle?

6 Dicas/Links do AoPS

1. Solução na próxima seção.

2. Solução na próxima seção.

3. Solução na próxima seção.

4. Solução na próxima seção.

5. Prove que a razão em que dividem BC é igual. Lembre-se de que a reflexão de H por BC está em (ABC). AoPS

6. AoPS

7. AoPS

8. AoPS

9. AoPS

10. AoPS

11. Calcule PM e QN a partir de lei dos senos em ω_b e ω_c, respectivamente (coloque em função de r_1 e r_2). Os ângulos nessas leis dos senos podem ser transferidos ao MND. AoPS

12. AoPS

13. Lema da Ceviana Qualquer em $\triangle AOB$, $\triangle AOC$ e um pouco de fé.

14. AoPS

15. AoPS

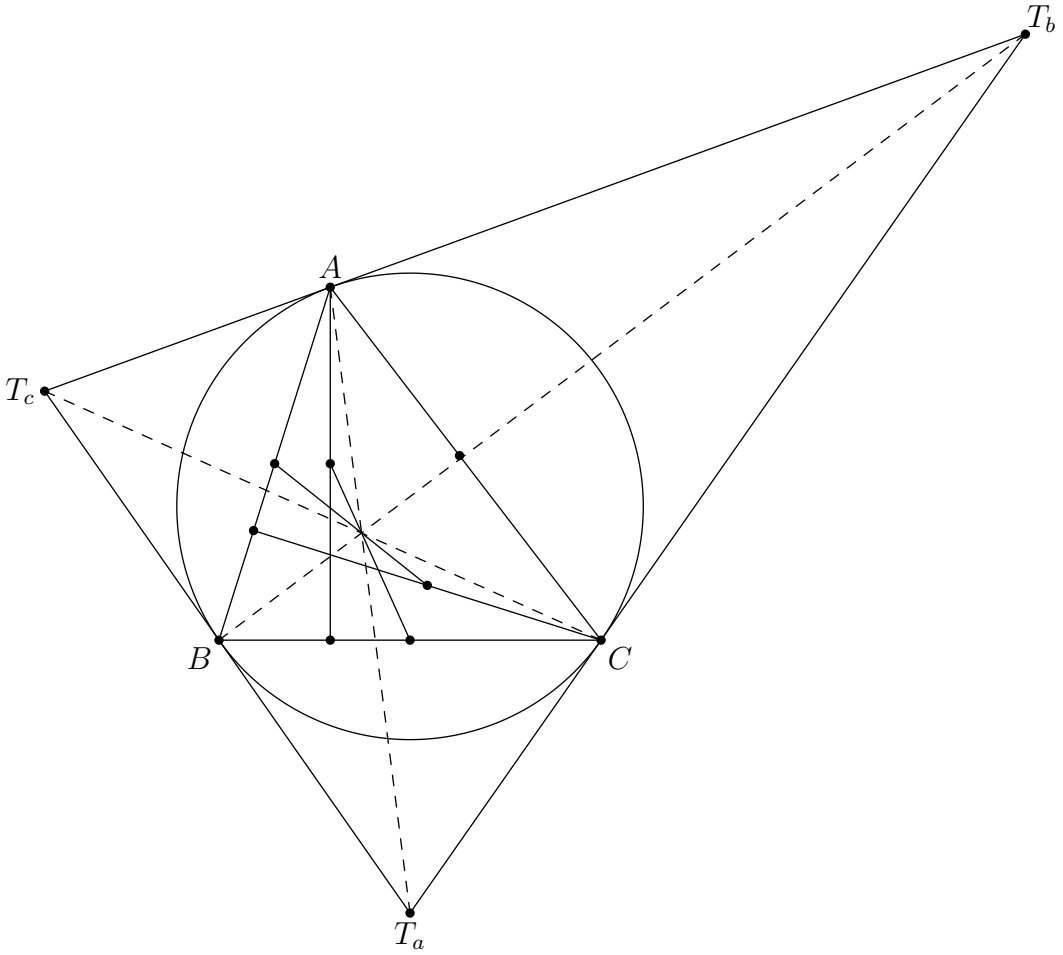
16. AoPS

17. AoPS

18. AoPS

7 Soluções

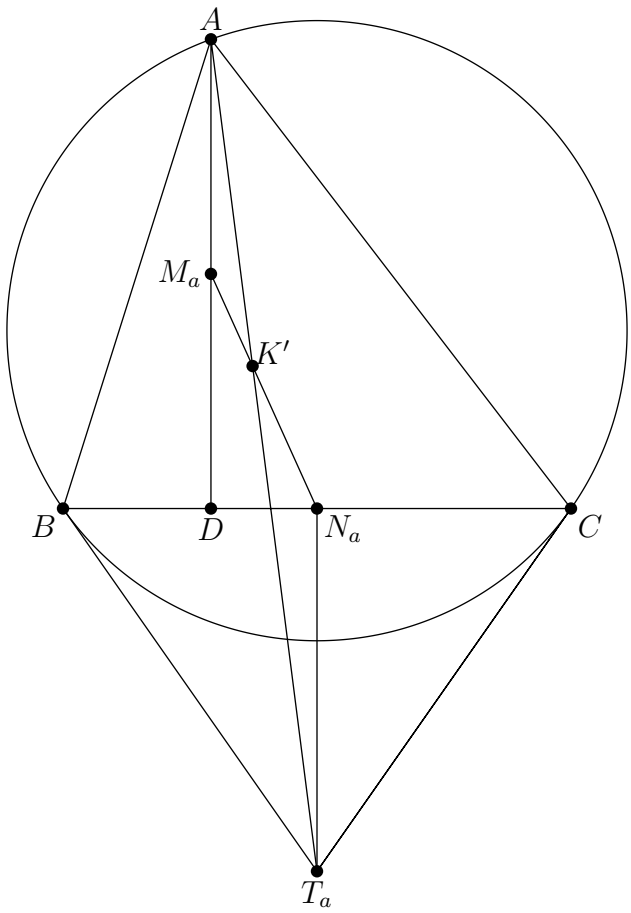
1. (Reta de Schwatt) Seja ABC um triângulo acutângulo com altura AD. Seja M_a e N_a os pontos médios de AD e BC, respectivamente. Defina M_b, N_b, M_c, N_c de maneira análoga. Prove que as retas M_aN_a, M_bN_b e M_cN_c concorrem no ponto simediano do triângulo ABC.



Solução. Vamos mostrar que K (ponto simediano) está em M_aN_a. Daí, de modo análogo, o mesmo valerá para M_bN_b e M_cN_c e estamos feitos.

Para isso, usaremos o mesmo método do problema da IMO Shortlist que resolvemos antes, ou seja, provaremos que M_aN_a e CT_c cortam o segmento AT_a na mesma razão.

(i). Em que razão M_aN_a corta AT_a?



Seja K' a interseção de M_aN_a com AT_a.
Veja que $TN_a \parallel AD \Rightarrow \triangle K'M_aA \approx \triangle K'N_aC$. Logo,

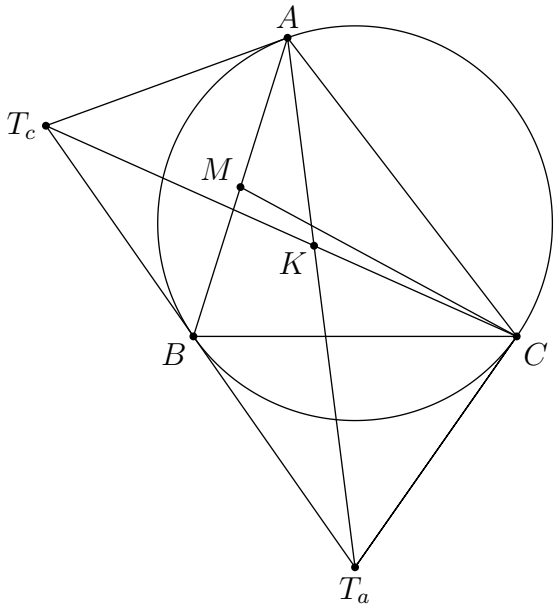
$$\frac{AK'}{K'T} = \frac{AM_a}{TN_a} = \frac{AD}{2TN_a},$$

Mas $AD = AB \cdot \sin B$ e $2TN_a = BC \cdot \tan A$, então $AK'{:}K'T =$

$$\frac{AB \cdot \sin B}{BC \cdot \tan A} = \frac{\sin B \cdot \sin C \cdot \cos A}{\sin A^2}. \qquad (I)$$

Agora, vamos à segunda parte do problema.

(ii). Em que razão CT_c corta AT_a?
Seja $\angle ACK = \theta$ e M o ponto médio do lado AB.



Pelo Lema da Ceviana Qualquer em $(CK, \triangle ACT_a)$, temos que $AK{:}KT =$

$$\frac{AC \cdot \sin\theta}{CT_a \cdot \sin(A+C-\theta)} = \frac{2\cos A}{BC} \cdot \frac{AC \cdot \sin\theta}{\sin(A+C-\theta)} = \frac{2\cos A \cdot \sin B}{\sin A} \cdot \frac{\sin\theta}{\sin(A+C-\theta)} \qquad (II)$$

Como queremos $(I) = (II)$, basta que

$$2 \cdot \frac{\sin\theta}{\sin(A+C-\theta)} = \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{AB}{BC} \qquad (III)$$

Lembre que $\theta = \angle ACK = \angle BCM$ pois CT_c é simediana.
Pelo Lema da Ceviana Qualquer em $(CM, \triangle ACB)$,

$$\sin\theta = \frac{AC \cdot \sin(C-\theta)}{BC}$$

.

Substituindo em (III) e usando $\sin(A+C-\theta) = \sin(B+\theta)$, basta

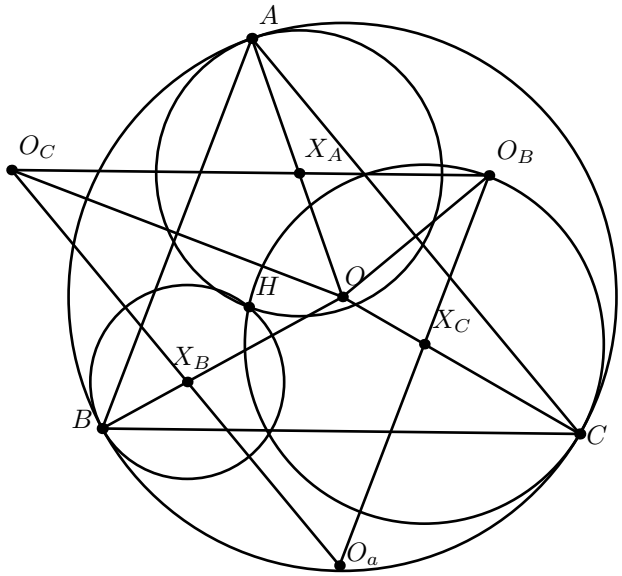
$$\frac{AB}{2AC} = \frac{\sin(C-\theta)}{\sin B + \theta},$$

Mas isso é verdade por lei dos senos em $\triangle AMC$.

■

2. (OBM 2018 N2) Seja ABC um triângulo acutângulo de circuncentro O e ortocentro H. A circunferência de centro X_A passa pelos pontos A e H e tangencia o circuncírculo do triângulo ABC. Defina de maneira análoga os pontos X_B e X_C. Sejam O_A, O_B e O_C os simétricos de O em relação aos lados BC, CA e AB, respectivamente. Prove que as retas O_AX_A, O_BX_B e O_CX_C são concorrentes.

Solução.



Fato: O_A é o circuncentro de $\triangle BHC$ (e resultados análogos).
Prova. Temos $O_AB = O_AC$ e $\angle BO_AC = 2\angle A = 2(180^\circ - \angle BHC)$, então O_A é o circuncentro de $\triangle BHC$.

Com isso, sabemos que O_BO_C é a mediatriz de AH e portanto X_A, O_B e O_C são colineares. Agora, pelo Teorema de Ceva, basta

$$\prod_{\text{cyc}} \frac{O_bX_a}{X_aO_c} = 1$$

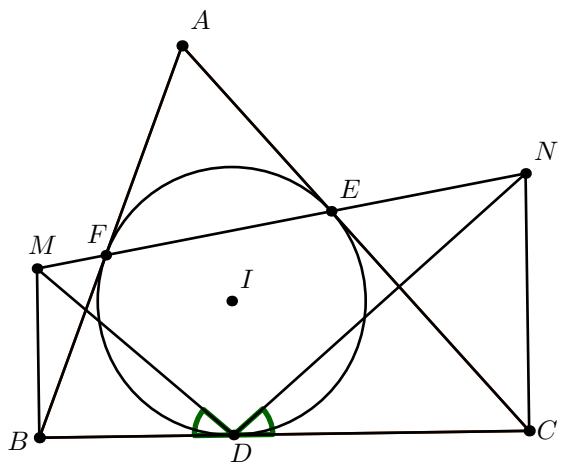
Mas pelo Lema da Ceviana Qualquer em $(OX_A, \triangle OO_BO_C)$, temos

$$\prod_{\text{cyc}} \frac{O_bX_a}{X_aO_c} = \prod_{\text{cyc}} \frac{OO_b}{OO_c} \cdot \frac{\sin \angle O_bOX_a}{\sin \angle X_aOO_c} = \prod_{\text{cyc}} \frac{OO_b}{OO_c} \cdot \frac{\sin \angle B}{\sin \angle C} = 1,$$

pois, pela ciclicidade, os termos se cancelam.
Assim, O_AX_A, O_BX_B e O_CX_C são concorrentes, como queríamos demonstrar.

3. (Cone Sul 2022) Given is a triangle ABC with incircle ω, tangent to BC, CA, AB at D, E, F. The perpendicular from B to BC meets EF at M, and the perpendicular from C to BC meets EF at N. Let DM and DN meet ω at P and Q. Prove that $DP = DQ$.

Solução:



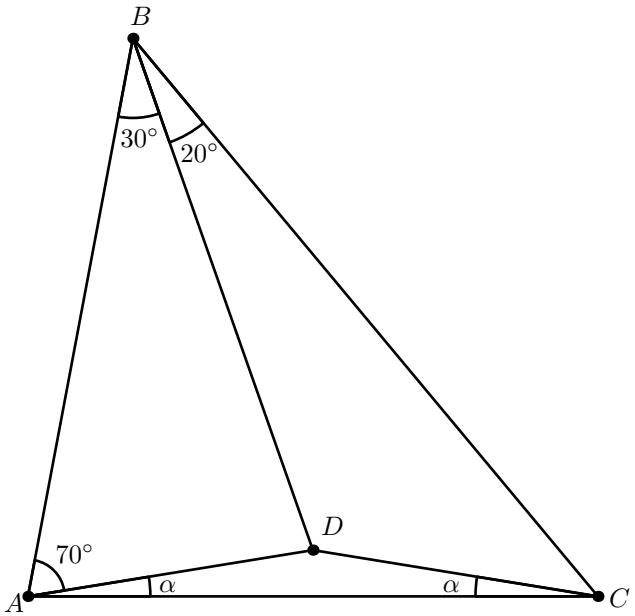
Note que $DP = DQ \Leftrightarrow \angle PDB = \angle QDC$, pois correspondem aos arcos DP e DQ. Logo, basta $\triangle MDB \approx \triangle NDC \Leftrightarrow \dfrac{MB}{DB} = \dfrac{NC}{DC} \Leftrightarrow \dfrac{MB}{BF} = \dfrac{NC}{CE}$. Mas, por lei dos senos em $\triangle MFB$ e $\triangle NEC$:

$$\frac{MB}{BF} = \frac{\sin MFB}{\sin FMB} = \frac{\sin AFE}{\sin 180 - FMB} = \frac{\sin AEF}{\sin MNC} = \frac{NC}{CE},$$

onde usamos que $MB \parallel CN$ pois são perpendiculares à BC.

4. (OMCPLP 2023) Seja D um ponto no interior de um triângulo ABC tal que $AD = CD$, $\angle DAB = 70°$, $\angle DBA = 30°$ e $\angle DBC = 20°$. Determine a medida do ângulo $\angle DCB$.

Solução. Essa é uma clássica aplicação de Ceva Trigonométrico.
Se $\angle DAC = \angle DCA = \alpha$, temos $\angle DCB = 60° - \alpha$.



Aplicando Ceva Trigonométrico:

$$\frac{\sin\alpha \cdot \sin 30° \cdot \sin(60° - \alpha)}{\sin 70° \cdot \sin 20° \cdot \sin\alpha} = 1 \Rightarrow \sin(60° - \alpha) = 2\sin 70° \sin 20°$$

Usando a transformação de produto em soma, temos

$$\Rightarrow \cos(30° + \alpha) = \sin(60° - \alpha) = 2\sin 70° \sin 20° = \cos 50°.$$

Então, a única possibilidade é $\alpha = 20° \Rightarrow \angle DCB = 40°$.

8 Referências

1. Art of Problem Solving. https://artofproblemsolving.com/

2. Vingança Olímpica. https://www.obm.org.br/semana-olimpica/

3. Para Além dos Pontos Notáveis - Rafael Filipe. https://www.obm.org.br/content/uploads/2020/02/23_SO_Rafael_Filipe_Para_Alem_dos_Pontos_Notaveis_Nivel_3_compressed.pdf

4. Carlos Shine, Geometria com Contas, Revista Eureka! 17. https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka17.pdf

5. Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads, Evan Chen.

6. Soluções de Gabriel Paiva e Rodrigo Porto divulgadas pela OBM.

7. Practice Problems in Geometry, Navneel Singhal.

8. Treinamento Cone Sul 2013, Régis Barbosa.

9. Seleção Cone Sul. https://sites.google.com/site/selecaoconesul/

(levi.fb.123@gmail.com e mfcfabio22@gmail.com).