Teorema de Desargues

June 26, 2023

Requisitos para o material

Para entender este material, é necessário que o aluno tenha conhecimentos básicos de geometria olímpica, como marcação de ângulos e potência de ponto; além de saber o básico de geometria projetiva, como projetar de retas em retas, de retas em círculos, quadriláteros harmônicos e polo/polar de um ponto com relação a um círculo.

Vou omitir a demonstração de Desargues no material porque foge do foco do conteúdo do material. Basicamente vou enunciá-lo e, em seguida, resolver problemas com ele; que é o mais útil a se fazer quando se trata de geometria olímpica.
Obs.: $r \cap s$ significa a interseção das duas retas r, s.

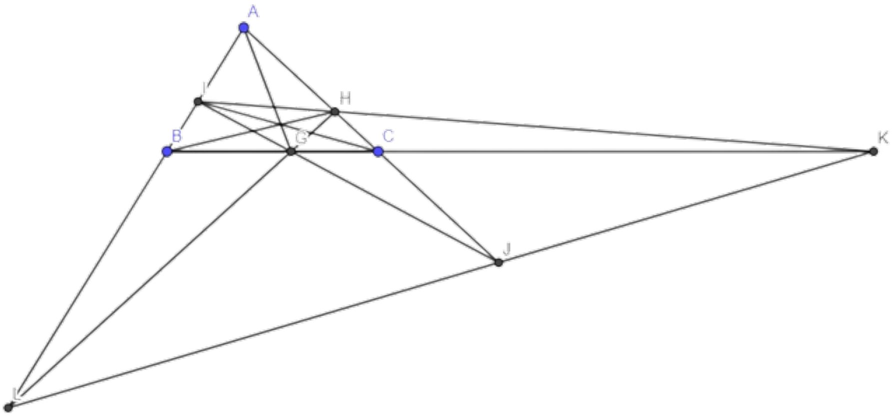
(Desargues) Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano. Então AA', BB', CC' concorrem se, e somente se $AB \cap A'B'$; $AC \cap A'C'$; $BC \cap B'C'$ são colineares. Se qualquer uma das duas condições for satisfeita, dizemos que os dois triângulos estão em perspectiva.

Vamos aos problemas que se utilizam do teorema... Desargues é útil sempre que houver alguma concorrência ou colinearidade esquisita em um problema com muitas retas (principalmente paralelas), e quando você aplica o Desargues (as vezes por tentativa e erro nos pontos selecionados) a figura toda se simplifica, reduzindo para algo que você consegue trabalhar melhor (não necessariamente algo mais fácil).

1. Seja ABC um triângulo. O exincentro relativo a A toca BC em A_1. Defina B_1, C_1 de maneira análoga. Seja A_2 a interseção de BC e B_1C_1. Definindo B_2, C_2 analogamente, prove que A_2, B_2, C_2 estão sobre uma mesma reta.

Solução:

Note primeiramente que, aplicando ceva no triângulo ABC, temos que AA_1, BB_1, CC_1 concorrem (este ceva provém do fato conhecido que $CA_1 = BD$, onde D é o contato do incírculo com BC e outras igualdades análogas). Note então que os triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ estão (nesta ordem) em perspectiva, e aplicando o teorema de desargues a ambos temos que $B_1C_1 \cap BC = A_2$, $B_1A_1 \cap AB = C_2$, $A_1C_1 \cap AC = B_2$ são colineares, como o problema pedia. ■

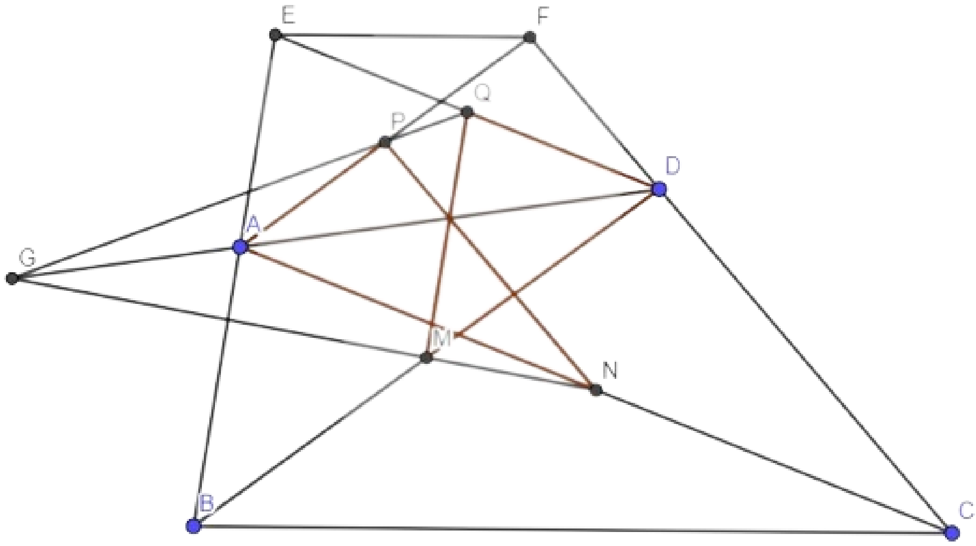


2. (Lemmas, livro do Titu) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo. A paralela de A a BD encontra CD em F e a paralela de D a AC toca AB em E. Se M, N, P, Q denotam os pontos médios dos segmentos BD, AC, DE, AF então prove que as retas PQ, MN, AD são concorrentes.

Solução:

Esse problema é muito interessante, porque o Desargues que funciona nele não é em relação ao primeiro triângulo que você pega, e sim a outro triângulo. Queremos A, D; P, Q; M, N em perspectiva, então precisamos de dois triângulos com pares destes pontos. O mais intuitivo parece ser tomar APN e DQM em perspectiva. Claro, possivelmente existe uma solução nesta linha, mas há uma ainda mais simples usando AQN e DPM! Note que usando desargues nestes dois triângulos precisamos que $T = QN \cap PM, J = AQ \cap DP, G = AN \cap DM$ sejam colineares.

Mas note que $AN \cap DM$ é o encontro G das diagonais de $ABCD$. Já J é o encontro das paralelas mencionadas por A e D. Portanto, $AJDG$ é paralelogramo. Então precisamos de T em JG. Mostraremos na verdade que T é o ponto médio de JG, e note que pelo paralelogramo mencionado tal ponto médio é o mesmo ponto que o ponto médio de AD. Agora, basta ver que QN, PM são bases médias relativas a A, D com relação aos triângulos ACF, DBE, respectivamente. Como a base média toca qualquer ceviana em seu ponto médio temos que de fato ambas as retas mencionadas passam pelo ponto médio de AD, que é T. ■



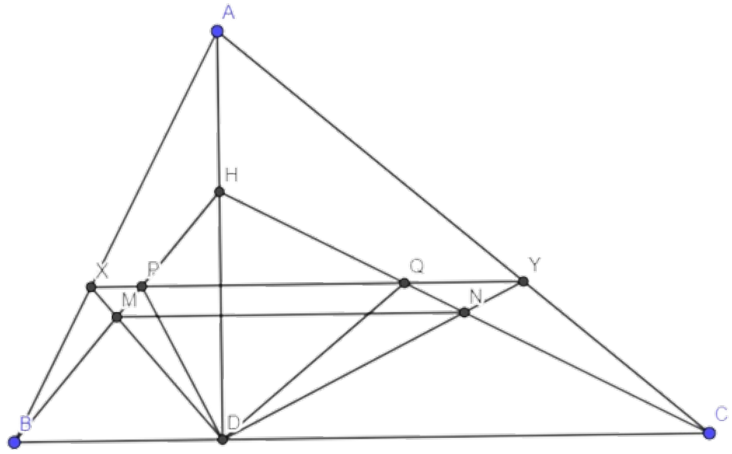
3. (Ibero 2014 P2) Seja ABC um triângulo acutângulo e H seu ortocentro. Seja D a interseção da altura de A com BC. Sejam M e N os pontos médios de BH e CH, respectivamente. DM e DN tocam AB e AC nos pontos X e Y, respectivamente. Se P é a interseção de XY com BH e Q a interseção de XY com CH, mostre que H, P, D, Q estão em uma circunferência.

Solução:

Muitas vezes, Desargues não mata o problema de cara, e é só uma parte/um lema que te ajuda na solução. Este e o próximo problema exemplificam muito bem isso. Lembrando que Desargues tem o intuito de facilitar, e não complicar ainda mais a figura.

Note que precisamos somente que $XY||BC$, pois se isso for verdade, como $\angle DHQ = B$ e $MD = MB$, então $BDPX$ seria um trapézio isósceles, implicando que $\angle DPQ = B$, mostrando a ciclicidade, pois daí $\angle DPQ = \angle DHQ$. Agora, note que $MN||BC$ e precisamos de $XY||MN||BC$. Isso te lembra algo? Sim! Usaremos ele aqui: note que precisamos basicamente que as três retas mencionadas concorram no *ponto do infinito*, um conceito bem importante de geometria projetiva.

Para isso, basta usar o Desargues mais intuitivo possível: nos triângulos BMX, CNY. Precisamos então que $BM \cap CN; BX \cap CY; MX \cap NY$ sejam colineares, mas estes três pontos são (nesta ordem) H, A, D, que são colineares por definição. ■



4. (EGMO 2020 P3) Seja ABC um triângulo com um ângulo obtuso em A. Sejam E e F as interseções da bissetriz externa do ângulo A com as alturas de ABC a B e C, respectivamente. Sejam M e N os pontos dos segmentos EC e FB respectivamente tais que $\angle EMA = \angle BCA$ e $\angle ANF = \angle ABC$. Prove que os pontos E, F, N, M pertencem a um mesmo círculo.

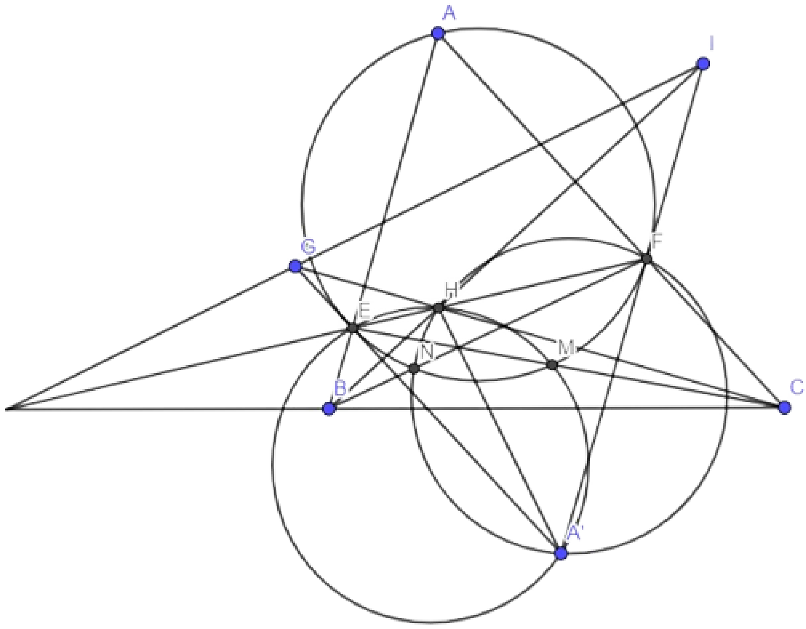
Solução:

Este problema novamente só usará Desargues no final da solução, e ele é muito difícil, não pelas técnicas, mas pela ideia que resolve ele.

Redefina o problema trocando A e H, o ortocentro. Observe que para construir P, Q você deve refletir A por EF para obter A' e, por definição, e as interseções de $(HA'F), (HA'E)$ com FB, EC são N, M, respectivamente. Por eixo radical, como $HNA'F, HMA'E$ são cíclicos, só precisamos ter HA', FB, EC concorrendo em um mesmo ponto. Agora, pelo teorema de Desargues em HBC, EFA' só precisamos ter $A'F \cap BH = I, A'E \cap CH = G; GI, BC, EF$ concorrendo.

Para isso, provaremos que F está na mediatriz de CI e na mediatriz de BG, e como isso valeria analogamente para E, teremos que os três concorrem por simetria.

Olhe para o triângulo HCI: $CF \perp HI$ e $IF \perp HC$, pois como $AE = AF$ $A'FAE$ é um losango, e portanto $AB || A'I$. Agora, para finalizar, note que o ângulo $\angle IFC$ é dividido ao meio pela reta EF, pois $\angle HFA' = \angle HFA$. Isso implica que EF é mediatriz de CI, e portanto é mediatriz de BG analogamente, implicando a concorrência. ■



Problemas Propostos

Problemas Fáceis

1. (Ibero 2009 P2) Dado um triângulo ABC, seja r a bissetriz externa de $\angle ABC$. P e Q são os pés das perpendiculares de A e C a r. Se $CP \cap BA = M$ e $AQ \cap BC = N$, mostre que MN, r e AC coincidem.

2. (Oral Moscow 2020) Os prolongamentos de lados opostos de um quadrilátero convexo $ABCD$ se intersectam nos pontos P e Q. Pontos são marcados nos lados de $ABCD$ (um por lado), que são os vértices de um paralelogramo com dois dos lados paralelos a PQ. Prove que o ponto de interseção das diagonais desse paralelogramo está em uma das diagonais do quadrilátero $ABCD$.

Problemas Médios

3. Dado um triângulo ABC, seja D o pé da bissetriz de A e P um ponto no segmento AD. $BP \cap AC = E$, $CP \cap AB = F$, $BP \cap DF = K$, $CP \cap DE = L$. Prove que AK, AL são isogonais com relação a A no triângulo ABC.

4. Seja ABC um triângulo e seja D um ponto do segmento BC, $D \neq B$ e $D \neq C$. O círculo (ABD) encontra o segmento AC novamente em um ponto interior E. O círculo (ACD) encontra o segmento AB novamente em um ponto interior F. Seja A' o reflexo de A na reta BC. As retas $A'C$ e DE se encontram em P e as retas $A'B$ e DF se encontram em Q, Prove que as retas AD, BP e CQ são concorrentes (ou todas paralelas).

Problemas Difíceis

5. No triângulo ABC, I é o incentro e O o circumcentro. D, E, F são os pontos de tangência do círculo com os lados BC, CA, AB, respectivamente. I_A, I_B, I_C são exincentros. Seja $A_1 = EI_C \cap FI_B$, defina B_1 e C_1 de forma semelhante. Prove que (AA_1I), (BB_1I), (CC_1I) são coaxiais e IO é o eixo radical desses

três círculos.

6. (Iran RMM TST 2 P4) Em um trapézio $ABCD$ com AD paralelo a BC, os pontos E, F estão nos lados AB, CD respectivamente. A_1, C_1 estão em AD, BC de modo que A_1, E, F, A; e C_1, E, F, C estão sobre um mesmo círculo. Prove que as retas A_1C_1, BD, EF são concorrentes.

7. (G8 2012 IMO Shortlist) Seja ABC um triângulo circunscrito a ω e ℓ uma reta sem pontos em comum com ω. Denote por P o pé da perpendicular do centro de ω a ℓ. As retas BC, CA, AB intersectam ℓ nos pontos X, Y, Z diferentes de P. Prove que os circumcírculos dos triângulos AXP, BYP e CZP têm um ponto comum diferente de P ou são tangentes em P.