Desigualdade das Médias

Autor: Luca Zanardi Lamardo

1 Introdução

Neste material, serão vistas as desigualdades mais conhecidas do mundo da álgebra, as conhecidas *Desigualdades das Médias*.

Definição. Dados n números reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, dizemos que a *Média Aritmética* deles é dada por $MA = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$. Além disso, a *Média Geométrica*, que é dada por $MG = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}$.
Duas desigualdades um pouco menos utilizadas, mas também muito importantes são a *Média Quadrática* e a *Média Harmônica*, que são, respectivamente: $MQ = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$ e $MH = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$.

Propriedades. A desigualdade das médias é extremamente simples de ser lembrada, e diz apenas que, para quaisquer n reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, é válido que:

$$MQ \geq MA \geq MG \geq MH.$$

Prova. Primeiramente, provaremos que $MA \geq MG$.
Note que $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0, \forall\ a_1, a_2$ reais positivos (pois qualquer número ao quadrado é não-negativo). Porém, expandindo isso, obtemos:

$$\sqrt{a_1}^2 - 2\sqrt{a_1 \cdot a_2} + \sqrt{a_2}^2 \geq 0 \iff a_1 + a_2 \geq 2 \cdot \sqrt{a_1 \cdot a_2}$$
$$\iff \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2}.$$

Assim, provamos que $MA \geq MG$, para $n = 2$.
Agora, provaremos por indução que, para todo $n = 2^x$ (potência de 2), isso também ocorre (o caso base foi provado acima).
Suponha que $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_x}{x} \geq \sqrt[x]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_x}$ ($x = 2^k$, para facilitar o entendimento). Queremos provar que $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2x}}{2x} \geq \sqrt[2x]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{2x}}$.

Veja que o lado esquerdo da espressão pode ser escrito como $\frac{(a_1+\ldots a_x)+(a_{x+1}+\cdots+a_{2x})}{2x} = \frac{\frac{a_1+\ldots a_x}{x}+\frac{a_{x+1}+\cdots+a_{2x}}{x}}{2}$. Aplicando a hipótese de indução, e logo em seguida o caso base da indução, obtemos que:

$$\frac{\frac{a_1+\ldots a_x}{x}+\frac{a_{x+1}+\cdots+a_{2x}}{x}}{2} \geq \frac{\sqrt[x]{a_1\ldots a_x}+\sqrt[x]{a_{x+1}\ldots a_{2x}}}{2} \geq$$
$$\geq \sqrt{\sqrt[x]{a_1\ldots a_x}\cdot\sqrt[x]{a_{x+1}\ldots a_{2x}}} = \sqrt[2x]{a_1\ldots a_{2x}}$$

Como queríamos provar. Assim, provamos que $MA \geq MG$, para potências de 2. Agora provaremos que, se isso for válido para algum n, isso também será válido para $n-1$ (Dessa forma, será válido para todos os inteiros, pois qualquer inteiro a tem uma potência de 2 maior que ele, podendo assim subtrair 1 dessa potência de 2 repetidas vezes).

Considere agora que $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$. Tome $a_n = \frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$. Obteremos:

$\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}+\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}}{n} = \frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n]{a_1\ldots a_{n-1}\cdot\frac{a_1+\ldots a_{n-1}}{n-1}}$.

Elevando ambos os lados a n, conseguimos que:

$$\left(\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\right)^n \geq a_1\ldots a_{n-1}\cdot\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$$
$$\iff \left(\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} \geq a_1\ldots a_{n-1}$$
$$\iff \frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1\ldots a_{n-1}}$$

Como queríamos demonstrar.

Obs. Fica como exercício para o leitor ver que a igualdade ocorre se, e somente se todos os n termos forem iguais.

Agora, provaremos que $MG \geq MH$. Veja que, por $MA \geq MG$, temos que:

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdots\frac{1}{a_n}} \iff \frac{1}{\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}$$
$$\iff \sqrt[n]{a_1\ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

Como queríamos provar.

Por fim, basta apenas provar que $MQ \geq MA$. Considere agora $MA = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$, por simplicidade. Veja que, como qualquer número ao quadrado é maior ou igual a zero, a soma de quadrados também será.

Então:

$$
\begin{aligned}
&(a_1 - MA)^2 + (a_2 - MA)^2 + \cdots + (a_n - MA)^2 \geq 0 \\
\implies & a_1^2 - 2a_1 \cdot MA + MA^2 + \ldots + a_n^2 - 2a_n \cdot MA + MA^2 \geq 0 \\
\implies & a_1^2 + \cdots + a_n^2 + n \cdot MA^2 \geq 2 \cdot MA \cdot (a_1 + \cdots + a_n)
\end{aligned}
$$

Porém, como $MA = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$, teremos que $a_1 + \cdots + a_n = n \cdot MA$. Dessa maneira:

$$
\begin{aligned}
&a_1^2 + \cdots + a_n^2 + n \cdot MA^2 \geq 2 \cdot MA \cdot (a_1 + \cdots + a_n) = 2n \cdot MA^2 \\
\implies & a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geq n \cdot MA^2 \\
\iff & \frac{a_1^2 + \ldots a_n^2}{n} \geq MA^2 \\
\iff & \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots a_n^2}{n}} \geq MA = \frac{a_1 + \ldots a_n}{n}
\end{aligned}
$$

2 Problemas resolvidos

Exemplo 1: Prove que, para todo $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Demonstração. Veja que $\frac{x+\frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = \sqrt{1} = 1 \implies x + \frac{1}{x} \geq 2$. □

Exemplo 2: Prove que, para todos números $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, teremos que $(x_1 + \cdots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$.

Demonstração. Aqui, usaremos algo que não foi provado diretamente. Note que, como vimos, $MA \geq MG$. Porém, por outro lado, $MG \geq MH$. Logo, por transitividade, teremos que $MA \geq MH$. Escrevendo isso com nossos termos, teremos que $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$.

Note que é interessante utilizar essa desigualdade, pois aparecem ambos a soma dos termos, como também a soma dos inversos. De fato, obtemos diretamente disso que $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n \cdot n = n^2$. □

Exemplo 3: Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tais que $a + b = 1$. Prove que:
$(a + \frac{1}{a})^2 + (b + \frac{1}{b})^2 \geq \frac{25}{2}$.

Faremos essa questão de duas maneiras diferentes. Ambas envolvem a média quadrática, o que é esperado, pois temos termos ao quadrado aparecendo, mas a primeira também utiliza a média geométrica, enquanto a segunda usa a média harmônica.

Demonstração. 1: Considere $A = \left(a + \frac{1}{a}\right)$, e $B = \left(b + \frac{1}{b}\right)$. Queremos provar que $A^2 + B^2 \geq \frac{25}{2}$. Note primeiramente que:

$$\sqrt{\frac{A^2 + B^2}{2}} \geq \frac{A + B}{2} \iff A^2 + B^2 \geq 2 \cdot \left(\frac{(A+B)^2}{4}\right) =$$

$$= \frac{(A+B)^2}{2} = \frac{\left(a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b}\right)^2}{2} = \frac{(a + b + \frac{a+b}{ab})^2}{2} = \frac{(1 + \frac{1}{ab})^2}{2}$$

Porém, note agora que $\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2} \geq \sqrt{ab} \implies ab \leq \frac{1}{4} \implies \frac{1}{ab} \geq 4$.
Dessa maneira, temos: $A^2 + B^2 \geq \frac{(1+\frac{1}{ab})^2}{2} \geq \frac{(1+4)^2}{2} = \frac{25}{2}$. □

Demonstração. 2: Agora, vamos começar o problema de uma maneira diferente. Expandindo ambos os quadrados, teremos:

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + b^2 + 2 \cdot b \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} =$$
$$= a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + 2 + \frac{1}{b^2} =$$
$$= a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 4$$

Queremos provar que isso é maior ou igual a $\frac{25}{2} \iff a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{25}{2} - 4 = \frac{17}{2}$.
Agora, note que:
$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2} \iff a^2 + b^2 \geq 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Por fim, perceba que $MQ \geq MA$, $MA \geq MG$ e $MG \geq MH \implies MQ \geq MH$. Aplicando isso com os termos $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{b}$, obtemos:

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}{2}} \geq \frac{2}{\frac{1}{\frac{1}{a}} + \frac{1}{\frac{1}{b}}} = \frac{2}{a+b} = 2$$
$$\iff \frac{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}{2} \geq 4$$
$$\iff \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 8$$

Dessa forma, obtemos que $a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{1}{2} + 8 = \frac{17}{2}$. □

3 Problemas para praticar

Problema 1: Tome os números reais positivos $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$ de forma que a sequência $[b_i]$, $i = 1, \ldots, n$ seja uma permutação de $[a_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Prove que $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geq n$.

Problema 2: Prove que, para todos os reais positivos a, b, c, é verdade que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Problema 3: Prove, utilizando as desigualdades das médias, que $sen(x) + cos(x) \leq \sqrt{2}$.

Problema 4: Ache o valor mínimo de $6x + \frac{24}{x^2}$, onde $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Problema 5: Encontre o mínimo da expressão $x^2 + \frac{1}{x}$, e o valor de x que o atinge.

Problema 6: Prove que, se $a, b \in \mathbb{R}$ e $a + b = 1$, então $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$.

Problema 7: Prove que se $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ e $a_1 + \cdots + a_n = n$, teremos que $(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \cdots \cdot (a_n + 1) \leq 2^n$.

Problema 8: Encontre todas as n-uplas $(x_1, \ldots, x_n)$ que satisfazem a seguinte equação:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot \sqrt{x_i - i^2} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{2}$$

Obs. $x_i \in \mathbb{R}, x_i \geq i^2$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Problema 9: Prove que se $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \cdot b \cdot c = 1$, teremos que $(a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1) \geq 8$.

Problema 10: (Generalização do problema 9) Prove que se $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ e $a_1 a_2 \cdots + a_n = 1$, teremos que $(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \cdots \cdot (a_n + 1) \geq 2^n$.

4 Dicas:

Problema 1: Aplique $MA \geq MG$ na expressão da esquerda.

Problema 2: Note que $a^2 + b^2 \geq 2ab \implies \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \geq ab$.

Problema 3: Utilize $MQ \geq MA$.

Problema 4: Veja que aplicando $MA \geq MG$ com $6x$ e $\frac{24}{x^2}$ diretamente, não chegamos num valor exato. Tente representar $6x$ de maneira gerar duas parcelas de x diferentes na multiplicação da MG.

Problema 5: Utilize uma ideia parecida com a dica do problema 4, mas agora com $\frac{1}{x}$.

Problema 6: Note que utilizar $MQ \geq MA$ *apenas uma vez* não funciona diretamente.

Problema 7: Utilize a desigualdade $MA \geq MG$.

Problema 8: Tente provar que um dos lados da equação é sempre maior ou igual do que o outro (e assim utilizar as condições de igualdade para achar as soluções).

Problema 9: Expanda a multiplicação.

Problema 10: Expanda a multiplicação e agrupe os termos em n grupos, de acordo com a quantidade de a_i's multiplicando (há $\binom{n}{k}$ termos com k a_i's multiplicando cada). Por exemplo, agrupe os termos como: $(1) + (a_1 + \cdots + a_n) + (\sum a_i a_j) + \ldots$

5 Soluções:

Problema 2:

Demonstração. Como foi dito na dica, perceba que $\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2} \geq ab$. Similarmente: $\frac{a^2}{2}+\frac{c^2}{2} \geq ca$ e $\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{2} \geq bc$.
Somando as três desigualdades, conseguimos que $2\cdot\frac{a^2}{2}+2\cdot\frac{b^2}{2}+2\cdot\frac{c^2}{2} = a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$. □

Problema 4:

Demonstração. Veja que, tentando aplicar $MA \geq MG$ diretamente, obtemos que $6x+\frac{24}{x^2} \geq 2\cdot\sqrt{\frac{144}{x}}$, que não nos ajuda. Porém, se interpretarmos $6x$ como $3x+3x$, obtemos que:
$3x+3x+\frac{24}{x^2} \geq 3\cdot\sqrt[3]{3x\cdot 3x\cdot\frac{24}{x^2}} = 3\sqrt[3]{216} = 18$.
Assim, achamos uma cota inferior para $6x+\frac{24}{x^2}$. Agora, precisamos provar que nossa expressão de fato atinge tal cota mínima, para ser o menor valor.
De fato, para a igualdade ocorrer, precisamos que $3x = 3x = \frac{24}{x^2} \iff x = 2$. Quando $x = 2$, obtemos que $6x+\frac{24}{x^2} = 6\cdot 2+\frac{24}{4} = 12+6 = 18$. Dessa forma, o valor mínimo da expressão realmente é 18. □

Problema 8:

Demonstração. Note que, como teremos n variáveis reais, e precisamos achar todas as n-uplas que satisfazem o problema, é de se esperar que hajam restrições quanto ao problema (ou então as respostas seriam caóticas).
Dessa maneira, uma boa estratégia é tentar provar que um lado será sempre maior ou igual ao outro, restringindo assim o problema ao caso de igualdade. Vamos analisar cada expressão com "i"individualmente, como a seguir:
$i\cdot\sqrt{x_i-i^2}\ VS\ \frac{x_i}{2}$ ("VS"será substituído por $\geq$ ou $\leq$ depois, pois estamos comparando as duas expressões).

$$i\cdot\sqrt{x_i-i^2}\ VS\ \frac{x_i}{2}$$
$$\iff i^2(x_i - i^2)\ VS\ \left(\frac{x_i}{2}\right)^2$$
$$\iff i^2\cdot x_i\ VS\ \left(\frac{x_i}{2}\right)^2+i^4$$

Porém, note que:

$$\left(\frac{x_i}{2}\right)^2+i^4 \geq 2\cdot\sqrt{\left(\frac{x_i}{2}\right)^2\cdot i^4} = 2\cdot\frac{x_i}{2}\cdot i^2 = i^2\cdot x_i$$

Assim, VS faz o papel de $\leq$. Dessa maneira, conseguimos que

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot \sqrt{x_i \ - i^2} \ \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{2}$$

Assim, como queremos que a igualdade ocorra, temos que:

$$\left(\frac{x_i}{2}\right)^2 = i^4 \iff x_i = 2i^2, \ \forall \ i = 1,2,\ldots,n$$

Checando o resultado, obtemos que

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot \sqrt{x_i \ - i^2} \ = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \sqrt{2i^2 \ - i^2} \ = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2 \cdot 1^2 + \cdots + 2 \cdot n^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} i^2.$$

$\square$