To be (extreme) or not to be?

Fábio Medeiros

1 Introdução

Vamos falar sobre o princípio do extremo nesse artigo. É uma ideia bem simples, mas que pode ser aplicada em problemas de alta dificuldade. Você verá que esse princípio se aplica em muitas áreas, mas nosso foco aqui é a combinatória. O primeiro problema de cada seção é simples e desejamos mostrar a moral do nosso tema, mas recomendamos pensar um pouco nos demais antes de ler a solução!

2 O Princípio

Dado um conjunto finito, existe um elemento com uma propridade mínima ou máxima (por exemplo, um menor elemento ou um maior). Isso é totalmente intuitivo, mas para não perdermos a formalidade, veja a demonstração:

(Princípio da Boa Ordem) Todo conjunto tem um elemento mínimo.

Demonstração. Seja C um conjunto não vazio de inteiros positivos e suponha, por absurdo, que C não possua elemento mínimo. Denote por S_n a sentença "n não é um elemento de C". Como C não possui elemento mínimo, S_1 é verdadeiro, pois 1 é o menor inteiro positivo.

Façamos uma indução: suponha que $S_1, S_2, \ldots, S_k$ são verdadeiros. Assim, seja $C' = C - k = \{x - k \mid x \in C\}$. Desse modo, C' continua sendo um conjunto de inteiros positivos (pois todos elementos de C são maiores do que k) e como C não possui elemento mínimo, C' não possui elemento mínimo. Assim, S'_1 vale. Logo, $1 \notin C' \Rightarrow 1 + k \notin C$. Portanto, nenhum elemento está em C, absurdo!

Para outras propriedades, a prova é análoga. Vamos ver uns problemas!

3 Exemplos

1. **(Leningrado 1988)** Alguns sapos estão em casinhas de um tabuleiro de xadrez. A cada segundo, um dos sapos pula para uma casa vizinha (uma casa é vizinha de outra se possue um lado em comum). Após muito tempo, verificou-se que cada um dos sapos passou por todas as casas do tabuleiro exatamente uma vez e voltado para sua casa inicial. Prove que em algum momento, todos os sapos estavam fora de suas casas iniciais.

Observação. Em nenhum momento temos dois sapos na mesma casa.

Solução. Eaí, ideias? Estamos perdidos em meio a um problema. Precisamos ganhar informações para trabalhar. Podemos ter uma ideia de tempo, pois cada sapo faz no mínimo 64 movimentos. Assim temos no mínimo $\#\text{sapos} \cdot 64$ segundos no mínimo. Mas isso parece inútil.

É aí que usamos o princípio do extremo. Seja S_1 o **primeiro** sapo que voltou à sua casa inicial. A um movimento antes de ele voltar à sua casa, todos os sapos devem ter pulado ao menos uma vez. Se não, ele não teria passado nas casas dos sapos parados. Desse modo, como S_1 é o primeiro a voltar à sua casa, um segundo antes de ele voltar todos estavam fora de suas casas inicias. Isso acontece, pois todos já saíram de suas casas e nenhum ainda voltou por S_1 ser o primeiro.

Legal, né? Saímos do nada para uma solução rápida. O princípio do extremo é muito útil quando nos falta informações e coisas para trabalhar nos problemas.

2. **(Folclore)** Cada equipe em um torneio de volêi joga com cada uma das outras exatamente uma vez. Ao fim do torneio, cada time faz uma lista com os nomes de todas as equipes vencidas por ele e de todas que foram vencidas pelos times que ele venceu. Se não houveram empates no torneio, prove que existe um time que tem o nome de todas as outras equipes em sua lista.

Solução. Seja A a equipe com **mais** vitórias. Se A ganhou de todos os outros, A tem todos os nomes. Se B ganhou de A, então B perdeu para algum dos times vencidos por A. Se não, B ganhou de A e de todos os times vencidos por A, ou seja, B tem mais vitórias do que A, absurdo! Logo, B está na lista de A. Portanto, A possui todos os times em sua lista!

3. **(APMO 2008/P2)** Os alunos em uma classe formam grupos, cada um contendo exatamente três membros, de modo que quaisquer dois grupos distintos tenham no máximo um membro em comum. Prove que, tendo 46 alunos na turma, existe um conjunto de 10 alunos no qual nenhum grupo está totalmente contido.

Solução. Tome S o **maior** conjunto tal que nenhum grupo está totalmente contido. Como o problema é verdade, o nosso conjunto S deve satisfazer o problema, então podemos brincar com ele para ganhar informações. (Note que, apenas assumindo isso, já ganhamos coisas para trabalhar, ou seja, saímos do zero. É isso que buscamos com o princípio do extremo!).

Seja X um aluno fora de S. Como S é maximal, se X estivesse em S teríamos um grupo dentro de S. Portanto, temos duas pessoas em S que formam um grupo com X. Assim, para cada X fora de S temos um par correspondente em S. Será que X e Y fora de S podem gerar um mesmo par? Não, se não os grupos de X e de Y teriam dois alunos em comum, contradição pelo enunciado. Logo, cada pessoa fora de S gera um único par em S. Portanto, sendo $|S|$ o número de elementos em S, temos $46 - |S| \leq \binom{|S|}{2} \Leftrightarrow \dfrac{|S|^2 - |S|}{2} \geq 46 - |S| \Leftrightarrow |S|^2 + |S| \geq 92 \Leftrightarrow |S|(|S|+1) \geq 92 \Leftrightarrow |S| \geq 10$.

4 Ideias na Teoria dos Números

Uma ideia recorrente em problemas de TN é a descida de fermat. Quando queremos provar que tal equação não admite solução, ou achar um conjunto infinito de soluções (a partir de uma gerar outra). Outras são pegar o menor primo que divide algo, ou uma derivação da descida de fermat que é o chamado ”root flipping”, mas isso foge do nosso foco nesse material.

1. Prove que $\sqrt{2}$ é irracional.

Suponha, por absurdo, que é racional. Desse modo, $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$. Tome p, q com $p + q$ **mínimo** (existe tomando mdc(p,q) = 1). Logo, $2 = \dfrac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow 2 \mid p \Rightarrow p = 2p_0 \Rightarrow 2q^2 = 4p_0^2 \Rightarrow q^2 = 2p_0^2 \Rightarrow 2 = \dfrac{q^2}{p_0^2} \Rightarrow \sqrt{2} = \dfrac{q}{p_0}$ e temos que $p_0 + q = \dfrac{p}{2} + q < p + q$, absurdo!

2. **(Putnam)** Prove que não existe n inteiro tal que $n \mid 2^n - 1$.

Suponha, por absurdo, que exista tal n. Seja p o **menor** primo que divide n. Portanto, $p \mid n \Rightarrow p \mid 2^n - 1 \Rightarrow 2^n \equiv 1 \pmod{p}$. Portanto, sendo $h = \text{ord}_p 2 \Rightarrow h \mid n$. Entretanto, $2^{p-1} \equiv 1$ pelo pequeno teorema de fermat. Assim, $h \mid p - 1 \Rightarrow h \mid \text{mdc}(n, p-1)$. Entretanto, $\text{mdc}(n, p-1) = 1$ pois p é o menor primo que divide n e todo divisor de $p - 1$ é menor que p. Logo, $h \mid 1 \Rightarrow h = 1 \Rightarrow 2^1 \equiv 1 (\text{mod p}) \Rightarrow p \mid 2 - 1 = 1$, absurdo!

5 Ideias na Geometria

Às vezes, a geometria se mistura com a combinatória... Comecemos com um exemplo bem simples para mostrar isso.

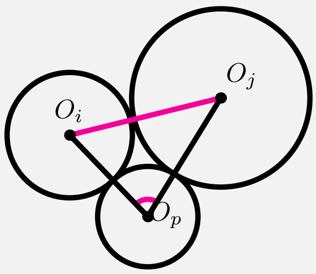
1. **(Folclore)** Há n aeroportos no Brasil onde as distâncias entre eles são duas a duas distintas. Um avião sai de cada aeroporto para o mais próximo dele. Prove que existem dois aeroportos que mandarão um avião para o outro.

Tome os dois aeroportos com menor distância entre eles. Esses dois aeroportos mandarão avião um para o outro, pois como é a menor distância, qualquer outro aeroporto está mais longe.

2. **(Folclore)** Temos um conjunto finito de moedas no plano, todas com diâmetros distintos. Prove que existe uma moeda com no máximo 5 outras moedas tangente à ela.

Parece verdade né? Mas está muito livre, precisamos trabalhar com coisas mais concretas. Imagine uma moeda gigante, parece que podem ter várias outras tangenciando ela, né? Vamos tentar com uma pequena então:

Sejam $M_1, M_2, \dots, M_k$ as moedas e seus centros e raios $(O_1, R_1), (O_2, R_2), \dots, (O_k, R_k)$, respectivamente. Tome a moeda de **menor** raio R_p. Suponha que temos 6 moedas tangentes à ela. Sem perda de generalidade, são as moedas $M_1, M_2, ..., M_6$. Considere os triângulos $O_pO_iO_j$ com $i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}$. Temos $O_pO_i = R_p + R_i < R_j + R_i \leq O_iO_j$ e $O_pO_j \leq O_iO_j$ analogamente. Logo, O_iO_j é o maior lado do triângulo, então $\angle O_iO_pO_j$ é o maior do triângulo $O_pO_iO_j \Rightarrow 3\angle O_iO_pO_j > 180° \Leftrightarrow \angle O_iO_pO_j > 60°$



Assim, se temos 6 cículos tangentes à M_p, temos 6 triângulos como mostrado acima, e cada um tem ângulo no O_p maior que 60°. Desse modo, $360° = \angle O_1O_pO_2 + O_2O_pO_3 + O_3O_pO_4 + O_4O_pO_5 + O_5O_pO_6 + O_6O_pO_1 > 6 \cdot 60° = 360°$, absurdo!

6 Filosofia e Instruções

Normalmente, usamos o princípio extremal para amarrar problemas que estão muito abertos, com pouca informação para trabalhar. Antes de partir de fato para uma abordagem extremal, pense em qual dos extremos faz mais sentido dar certo (em qual estamos mais próximos da solução). Algumas ideias comuns são:

Na Combinatória:

- Pegar o maior conjunto que satisfaz tal propriedade
- Pegar o maior caminho (em um grafo)
- Pegar o vértice com maior

Na Teoria dos Números:

- Descida de fermat
- Pegar o menor primo que divide algo

Na Geometria:

- Pegar o círculo de maior/menor raio
- Pegar o ponto com menor/maior distância a outro ponto

7 Problemas Propostos

Os problemas abaixo estão mais ou menos em ordem de dificuldade. Os dois primeiros são rápidos após a ideia extremal certa, os demais têm sua dificuldade! Caso você precise, temos **dicas** e **soluções** nas próximas páginas! Tente fazer os problemas antes de recorrer às dicas.

1. **(Folclore)** Em cada casa de um tabuleiro infinito é escrito um número inteiro positivo. Sabe-se que o número escrito em uma casa é a média aritmética das 4 casas vizinhas dele. Prove que todos os números são iguais.

2. **(Leningrado 1989)** Dado um natural $k > 1$, prove que é impossível colocar os números $1, 2, ..., k^2$ em um tabuleiro kxk, de forma que as somas dos números escritos em cada linha e em cada coluna sejam potências de 2.

3. **(Russia 1996)** Um palíndromo é um número que lido de trás para frente é igual ao original (por exemplo 16761 e 11 são palíndromos, mas 123210 não é). Ao escrever lado a lado os números de 1 até n, pode se formar um palíndromo?

4. **(TST Cone Sul 2019/P4)** Vinte jogadores participaram de um torneio de xadrez. Cada jogador enfrentou todo outro jogador exatamente uma vez e cada partida terminou na vitória de um dos dois ou em empate. Nesse torneio, notou-se que para cada partida que terminou em empate, cada um dos demais 18 jogadores venceu pelo menos um dos dois jogadores envolvidos nela. Sabemos ainda que pelo menos duas partidas terminaram em empate. Mostre que é possível nomear os jogadores como $P_1, P_2, ..., P_n$ de modo que o jogador P_k ganhou do jogador P_{k+1} para cada $k \in \{1, 2, ..., 19\}$.

5. **(IMO 2020/P5)** Um baralho de $n > 1$ cartas é dado. Um número inteiro positivo é escrito em cada cartão. O baralho tem a propriedade de que a média aritmética dos números em cada par de cartas é também a média geométrica dos números em alguma coleção de uma ou mais cartas. Para quais n segue-se que os números nas cartas são todos iguais?

8 Dicas

Você pensou mesmo nos problemas? (>'-'<) Se sim, vão algumas dicas! Se mesmo após as dicas abaixo você não conseguir resolver o problema, leia uma partezinha da solução e tente continuar por si mesmo. A prática que fará você aprender, não apenas ler soluções! ;)

1. Tome o menor número escrito no tabuleiro.

2. Tome a linha/coluna com menor soma.

3. Tome a maior cadeia de 0's consecutivos.

4. Qual o máximo de empates entre três jogadores? Tome a cadeia (como no enunciado) máxima.

5. Prove que podemos supor que o mdc de todas as cartas é 1. Tome a média aritmética das duas maiores cartas do baralho.

9 Soluções

Aqui mostraremos como construir uma solução a partir de passos intuitivos. O formato das soluções abaixo não deve ser replicado em uma prova, aqui mostramos como gerar uma solução na prova.

1. Moral: Em qualquer média M dos números $a_1, a_2, ..., a_n$, temos que $M \geq a_i$ para algum a_i e $M \leq a_j$ para algum a_j pela própria definição de média. Como pode não existir um maior número no tabuleiro, pegamos o menor que com certeza existe (os inteiros positivos tem um mínimo 1 e não tem máximo).
Solução: Tome o menor m dos números escritos. Sejam a, b, c, d os números escritos ao redor de m. Logo, $m = \frac{a+b+c+d}{4} \geq \frac{4m}{4} = m$, pois $a \geq m$ e os análogos. Como ocorre a igualdade $(m = m)$ devemos ter a igualdade em cada uma das outras igualdades. Logo, $a = b = c = d = m$. Repetindo isso em a, b, c, d temos que todas as casas do tabuleiro valem m.

2. Suponha, por absurdo, que seja possível. Tomamos então a linha/coluna com a menor soma 2^m. Como é a menor soma, é a menor potência de dois do tabuleiro, então divide a soma de todas as outras colunas e linhas. Portanto, $2^m \mid 1 + 2 + ... + k^2 = \frac{k^2(k^2+1)}{2}$. Note que k^2 e $k^2 + 1$ são dois números consecutivos, então um será par e o outro ímpar. Portanto, faz sentido separar em casos:

- k é impar: todos os fatores 2 estão em $\frac{k^2+1}{2}$. Mas $k^2 \equiv 1 (\text{mod } 4) \Rightarrow \frac{k^2+1}{2}$ é ímpar então $2^m \mid \text{ímpar} \cdot \text{ímpar} \Rightarrow 2^m = 1 \Rightarrow k = 1$ e temos um tabuleiro 1x1, absurdo!

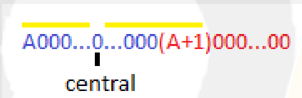
- k é par: todos os fatores 2 estão em $\frac{k^2}{2}$. Assim, $2^m \mid \frac{k^2}{2} \Rightarrow \frac{k^2}{2} \geq 2^m \geq 1 + 2 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$ pois a soma dos números na linha/coluna é no mínimo $1 + 2 + ... + k$. Portanto, $k^2 \geq k(k+1) = k^2 + k$, absurdo!

3. Moral: A partir dos números terminados em 0 sabemos bem quem os sucede. Além disso, a maior cadeia de 0's é interessante, pois ela terá que se repetir depois, será que isso faz sentido acontecer?

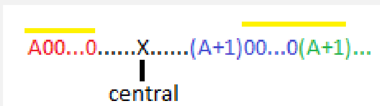
Solução. Suponha que é possível. Tome a maior cadeia de 0's do número escrito ao colocar os números de 1 até n lado a lado. Note que ela não pode ser formada por dois números diferentes $\overline{xx+1}$, pois se não $x+1$ começaria com 0. Note que não pode ser no meio de um número (como por exemplo 10200000), pois se chegamos aí, passamos por 10000000 antes. Logo, a maior cadeia de 0's aparece no número $\overline{a00...0}$ onde $a \in \{1,...,9\}$.

Vamos supor que a quantidade de dígitos do número escrito é ímpar e então temos um centro de reflexão definido, mas se for par o argumento é o mesmo. Temos dois casos:

- O centro de reflexão do nosso palíndromo está na maior cadeia de 0's . Portanto, temos um número $\overline{a0000...0...0000}$ (onde o 0 destacado é o central) e escrevemos ao seu lado $\overline{(a+1)0000...0...0001}$. Olhando simetricamente através do 0 central temos $\overline{a00..0}$ de um lado e $\overline{0...00(a+1)}$ que não é a mesma coisa, absurdo!



- O centro de reflexão não está na maior cadeia de 0's. Tome a maior cadeia de 0's que está mais próxima do centro pela esquerda, caso tenhamos duas repetidas: $\overline{123....\mathbf{a00...0}...}$centro.... Como é um palíndromo, deverá aparecer novamente após o centro de maneira refletida. Então a próxima cadeia de 0's do mesmo tamanho após o centro será a $\overline{(a+1)\mathbf{00...0}}$ seguido de $\overline{\mathbf{(a+1)}00...1}$. Portanto, olhando de maneira refletida através do centro, temos que $\overline{a00...0}$ vira $\overline{0...00a+1}$, absurdo! (Se a=9, a+1=10 mas continua errado).



Portanto, nenhum n é tal que esse número é palíndromo.

4. Para simplificar a notação, denotaremos $A \to B$ se A ganhou de B e $A - B$ se A empatou com B.

Fato: Entre 3 jogadores temos no máximo 1 empate (i.e. cada jogador empata no máximo uma vez).

Demonstração: Suponha que (i)$A - B$ e (ii)$B - C$. Logo, por (i) temos que C ganhou de A ou B, mas $C - B$. Logo, $C \to A$. Fazendo a mesma coisa pro outro lado, temos que $A \to C$, absurdo!

Tome a maior cadeia $P_1 \to P_2 \to ... \to P_k$. Suponha, por absurdo, que exista A fora da cadeia. Note que não pode ocorrer $P_k \to A$, se não aumentaríamos a cadeia. Vamos separar nos dois casos restantes:

- $A \to P_k$:
  - $P_{k-1} \to A$: então poderíamos colocar A na cadeia em $P_{k-1} \to A \to P_k$, absurdo.
  - $P_{k-1} - A$: então P_k deve ter ganhado de pelo menos um dos dois, mas $P_{k-1} \to P_k$ e $A \to P_k$, absurdo!

  Portanto, $A \to P_{k-1}$. Fazendo o mesmo processo voltando, temos que $A \to P_{k-2}$, $A \to P_{k-3}$, ..., $A \to P_1$. Logo, podemos colocar o A no começo da cadeia: $A \to P_1 \to ... \to P_k$, absurdo!

- $A - P_k$: como os outros casos são absurdos e P_k só empata uma vez pelo **Fato**, podemos supor que A é o único fora da cadeia (i.e. $k = 19$). Assim, temos uma cadeia $P_1 \to P_2 \to ... \to P_{19}$ e $A - P_{19}$. Portanto, A não empatou com mais ninguém da sequência. Se $A \to P_x \Rightarrow A \to P_{x-1}$, se não $P_{x-1} \to A \to P_x$ e poderíamos encaixá-lo na cadeia, absurdo! Logo, se $A \to P_x \Rightarrow A \to P_{x-1} \Rightarrow ... \Rightarrow A \to P_1$ e poderíamos colocar A no começo da sequência, absurdo. Portanto, A não ganhou de ninguém da sequência, logo perdeu para todos os demais. Entretanto, o enunciado nos garante que houve ao menos dois empates. Como A e P_k já têm um empate, houve um empate entre $P_x - P_y$ e então A ganhou de ao menos um dos dois, mas $P_x \to A$ e $P_y \to A$, absurdo!

Portanto, não existe A fora da cadeia e assim temos uma cadeia completa concluindo o problema.

5. Suponha que temos uma distribuição de números nas cartas com não todas iguais. Sejam $a_1 < a_2 < ... < a_m$ os números distintos escritos. Se $\text{mdc}(a_1, a_2, ..., a_m) = d > 1$, defina $b_i = \frac{a_i}{d} \Rightarrow d\frac{b_i + b_j}{2} = \frac{a_i + a_j}{2} = \sqrt[k]{a_{r_1}a_{r_2}...a_{r_k}} = d\sqrt[k]{b_{r_1}b_{r_2}...b_{r_k}}$. Assim, podemos trocar os a_i's pelos b_i's e continua satisfazendo. Assim, podemos supor que $\text{mdc}(a_1, a_2, ..., a_m) = 1$.

Tome então o par (a_{m-1}, a_m). (essa ideia surge, pois a média geométrica normalmente é pequena, então pegamos a maior média aritmética para buscar uma contradição).

Note que $\frac{a_{m-1} + a_m}{2} = \sqrt[k]{b_1 b_2 ... b_k}$ onde cada b_i está em $\{a_n\}$ e podemos ter repetição. Se nenhum b_i for a_m então $\frac{a_{m-1} + a_m}{2} = \sqrt[k]{b_1 b_2 ... b_k} \leq \sqrt[k]{a_{m-1}^k} = a_{m-1} \Rightarrow 2a_{m-1} \geq a_{m-1} + a_m$, absurdo! Logo, a_m aparece na média geométrica. Conseguimos ganhar informação de TN agora: se $p \mid a_m \Rightarrow p \mid \sqrt[k]{a_m b_2 b_3 ... b_k} = \frac{a_{m-1} + a_m}{2} \Rightarrow p \mid a_{m-1}$. Faz sentido tentar copiar essa ideia (se conseguirmos que p divide todos a_i's então teríamod uma contradição!). Vamos tentar uma indução:

Indução: Vamos provar que se $p \mid a_m \Rightarrow p \mid a_i$ para todo i.

Base Indutiva: Se $p \mid a_m \Rightarrow p \mid a_{m-1}$ como mostramos.

Passo Indutivo: Se $p \mid a_m \Rightarrow p \mid a_{m-1}, a_{m-2}, ..., a_{j+1}$.

Assim, tome o par (a_m, a_j). Temos $\frac{a_m + a_j}{2} = \sqrt[k]{b_1 b_2 ... b_k}$ onde cada b_i está em $\{a_n\}$. Se nenhum b_i for maior que a_j então $\frac{a_m + a_j}{2} = \sqrt[k]{b_1 b_2 ... b_k} \leq \sqrt[k]{a_j^k} = a_j \Rightarrow 2a_j \geq a_m + a_j$, absurdo! Logo $p \mid \sqrt[k]{b_1 b_2 ... b_k} = \frac{a_m + a_j}{2} \Rightarrow p \mid a_j$.

Indução concluída! Assim, temos um fator de todos os números, absurdo! Portanto, para qualquer n, todas as cartas devem ser iguais.

10 Encerramento e Referências

Espero que tenha gostado do material! Caso tenha sugestões ou dúvidas, não exite em enviar um email para mfcfabio22@gmail.com.

Referências:

- POTI - Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo
- Olympiad Combinatorics, Pranav Sriram
- Treinamento Olímpico, SBM
- Ser Extremo ou Não? 25ª Semana Olímpica, Maria Clara Werneck
- AOPS