SIMULADO NOIC
OLIMPÍADA BRASILEIRA DE FÍSICA
3ª Fase - 13 de novembro de 2021

Nível 1
Ensino Fundamental
8º e 9º anos

Escrito por Rafael Ribeiro, Matheus Felipe R. Borges, Wesley Andrade e Ualype de Andrade

LEIA ATENTAMENTE AS INSTRUÇÕES:

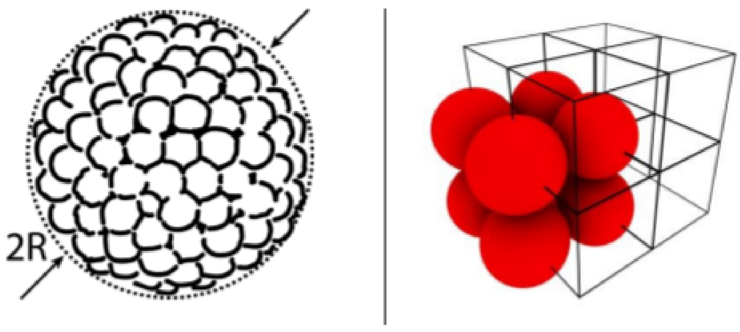
1. Esta prova destina-se exclusivamente aos alunos dos **8ª e 9º anos do nível fundamental.** Ela contém **oito** questões. Cada questão tem valor de 10 pontos e a prova um total de 80 pontos.

2. Todos os resultados numéricos devem ser expressos em unidades no Sistema Internacional e seguindo as instruções específicas da questão.

3. A duração máxima desta prova é de **quatro** horas.

4. Se necessário, e a menos que indicado ao contrário, use: $\pi = 3,0$; $\sqrt{2} = 1,4$; $\sqrt{3} = 1,7$; $\sqrt{5} = 2,2$; $\text{sen}\,30° = 0,50$; $\cos 30° = 0,85$; $\sin 45° = \cos 45° = 0,70$; aceleração gravitacional na superfície da terra $g = 10\,m/s^2$; calor específico da água líquida $c_a = 1,0\,cal/(g\,C)$; $1\,cal = 4,2\,J$; densidade da água líquida $\rho = 1,0\,g/cm^3$;

Questão 1. Núcleos atômicos são formados por prótons e nêutrons, partículas subatômicas conhecidas como núcleons. Em um modelo simplificado, um núcleo atômico é tido como uma esfera composta de A (onde $A \gg 1$) núcleons esféricos. O volume V do núcleo é maior do que o volume AV_N (sendo V_N o volume de um núcleon) de todos os núcleons somados, pois nem todo o espaço dentro do núcleo está preenchido por matéria. Considere um modelo no qual os núcleons estão dispostos no núcleo seguindo um empacotamento "cúbico simples" (CS), que consiste de uma rede cúbica no qual cada núcleon está dentro de um cubo imaginário e em contato com os núcleons vizinhos. Dessa forma, ao somar o volume de todos os cubos dessa rede, obtém-se o volume V do núcleo. Define-se $f = AV_N/V$ como sendo o fator de empacotamento atômico, que corresponde à razão entre o volume preenchido por matéria dentro do núcleo e o volume total deste. Determine o fator de empacotamento para o modelo utilizado. Na figura abaixo, temos a ilustração de um núcleo de raio R à esquerda, com os núcleons "empacotados"em seu interior, e à direita o formato do empacotamento CS, com os núcleons em vermelho.



Solução:

Essa situação foi abordada em um dos itens do problema teórico 3 da prova da IPhO 2010. A sua resolução, como veremos, é de certa forma bastante simples, envolvendo apenas conceitos geométricos acessíveis ao aluno do nível 1. A grande dificuldade reside em interpretar corretamente a situação apresentada no enunciado - que não é algo tão comum - de forma a nos permitir equacionar o que foi pedido, algo que costuma ser explorado em questões de terceira fase da OBF.

Conforme o enunciado nos diz, **a soma do volume de todos os cubos da rede é igual ao volume V do núcleo**. Primeiramente devemos encontrar o volume de cada cubo, que chamaremos de V_C. Veja que, no empacotamento cúbico simples, "cada núcleon está dentro de um cubo imaginário e em contato com os núcleos vizinhos". Isso significa que um cubo da rede comporta um único núcleon esférico, os quais tangenciam uns aos outros por estarem em contato. Desta forma, a superfície de um núcleon tangencia também todas as arestas do cubo, de forma que o conjunto núcleon+cubo é geometricamente representado por uma esfera inscrita em um cubo. Sendo r o raio do núcleon e L o lado do cubo, vale então que

$$L = 2r$$

Elevando ambos os lados ao cubo:

$$L^3 = 8r^3$$

Perceba que o membro esquerdo da equação é $V_C = L^3$. Por outro lado, podemos expressar r^3 em termos de V_N por meio do volume da esfera, isto é $V_N = \frac{4}{3}\pi r^3$. Substituindo na última equação:

$$V_C = 8 \cdot \frac{3}{4\pi} V_N = \frac{6}{\pi} V_N$$

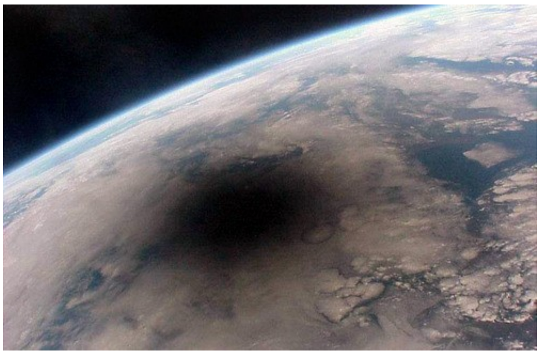
Por fim, retornemos à informação inicial de que o volume total dos cubos é igual ao volume v do núcleo (não núcleon, cuidado!). Como há 1 núcleon para cada cubo, a quantidade de cubos na rede é A. Equacionando e utilizando o resultado previamente obtido para V_C:

$$V = AV_C = AV_N \cdot \frac{6}{\pi}$$

Note que o fator de empacotamento requisitado é simplesmente AV_N/V. Logo:

$$\boxed{f = \frac{\pi}{6} \approx 0,5}$$

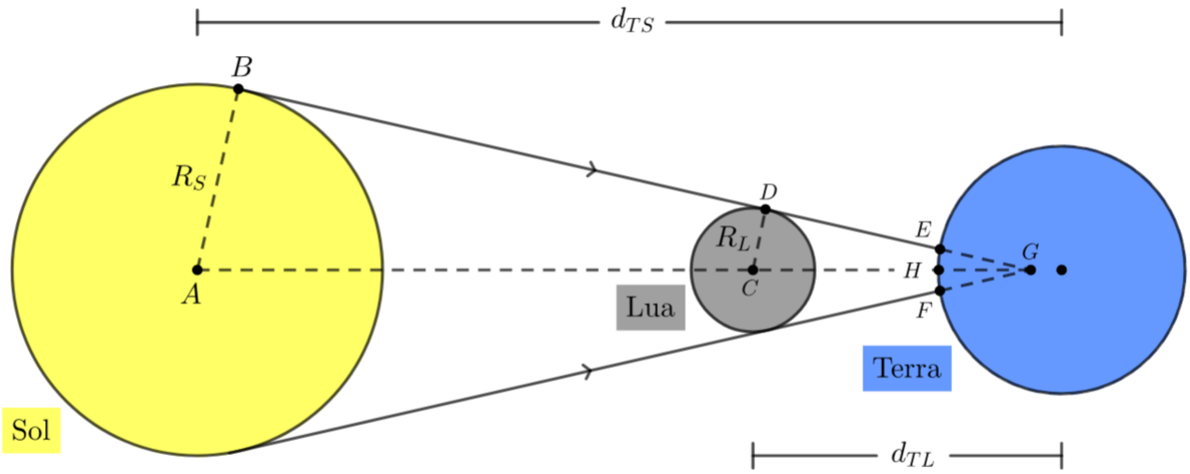
Questão 2. Em 21 de agosto de 2017, ocorreu um eclipse solar total, que ficou conhecido como "O Grande Eclipse Americano". O eclipse total foi visível no Oceano Pacífico Norte, na América do Norte e no Oceano Atlântico. Em outros locais como a América Central, na região do Caribe, ao norte da América do Sul e no oeste da Europa e da África o eclipse foi parcial. Ele foi estimado como um dos eclipses mais assistidos da história. Cálculos mais realistas acerca de eclipses são um pouco mais complicados, mas ainda podemos obter ótimas estimativas com algumas considerações para simplificar o problema. Calcule, em km, a largura da sombra da Lua na superfície terrestre em um eclipse solar total - isto é, a largura da região de umbra, na qual o eclipse é total. Considere que, no momento do eclipse, a distância terra-lua vale $d_{TL} = 3,6 \times 10^5\, km$, e a distância terra-sol $d_{TS} = 1,5 \times 10^8\, km$. Os raios do sol, da terra e da lua são respectivamente iguais a $R_S = 7,0 \times 10^5\, km$, $R_T = 6,4 \times 10^3\, km$ e $R_L = 1,7 \times 10^3\, km$. Considere órbitas coplanares para o movimento da terra em torno do sol e da lua em torno da terra, e despreze a curvatura da superfície terrestre na região de sombra da lua.



Solução:

A questão lida com conhecimento básico de triângulos, geometria e eclipses (compreensão de fenômenos astronômicos). Uma ideia semelhante foi cobrada na prova da OBF 2017, nos níveis 1 (questão 2) e 2 (questão 1).

Acompanhe o diagrama abaixo, que mostram dois raios luminosos (segmentos marcados por flechas) que contribuem para a formação da região de umbra na situação de um Eclipse Solar segundo as circunstâncias do problema. Esses raios (um deles partindo do sol do ponto B) tangenciam as superfícies do Sol e da Lua nos pontos B e D respectivamente, e incidem na Terra nos pontos E e F. Desprezando a curvatura terrestre na região de sombra, nosso objetivo será encontrar o comprimento EF, da região de umbra, o qual faremos por meio de uma semelhança de triângulos.



Nos triângulos ΔABG e ΔCDG, vale, por semelhança, que:

$$\frac{AB}{AG} = \frac{CD}{CG} \Rightarrow \frac{R_S}{d_{TS}} = \frac{R_L}{CG}$$

Portanto:

$$CG = \frac{R_L}{R_S} d_{TS}$$

Agora, pela semelhança entre os triângulos ΔCDG e ΔHEG:

$$\frac{R_L}{CG} = \frac{EH}{CG - CH}$$

Substituindo $CH = d_{TL} - R_T$, resolvemos para CG:

$$1 - \frac{d_{TL} - R_T}{CG} = \frac{EH}{R_L}$$

$$CG = \frac{d_{TL} - R_T}{1 - \frac{EH}{R_L}}$$

Igualando ambas as expressões encontradas para CG, isolamos EH para encontrar a largura da umbra na superfície terrestre (atente para o fato de que a largura $EF = 2 \cdot EH$):

$$\frac{d_{TL} - R_T}{1 - \frac{EH}{R_L}} = \frac{R_L}{R_S} d_{TS} \Rightarrow \frac{EH}{R_L} = 1 - \frac{R_S}{R_L}\frac{d_{TL} - R_T}{d_{TS}} \implies$$

$$\implies \boxed{EF = 2\left[R_L - \frac{R_S}{d_{TS}}\left(d_{TL} - R_T\right)\right]}$$

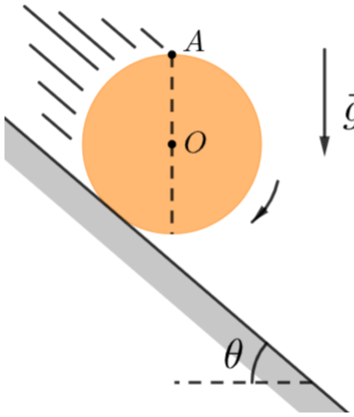
Substituindo os dados numéricos do enunciado, temos, por fim:

$$\boxed{EF = 99,7 \text{ km} \approx 1,0 \times 10^2 \text{ km}}$$

Questão 3. Um disco de pedra circular de raio $R = 15,0\,m$ rola sem deslizar sobre um plano inclinado de $\theta = 60,0°$ em relação à horizontal. A velocidade do centro do disco em um dado instante é de $v_o = 10,0\,m/s$, paralela ao plano. Nesse mesmo instante, um pequeno pedregulho desprende-se do ponto A na periferia do disco, sendo o segmento AO (O é o centro do disco) vertical. Determine

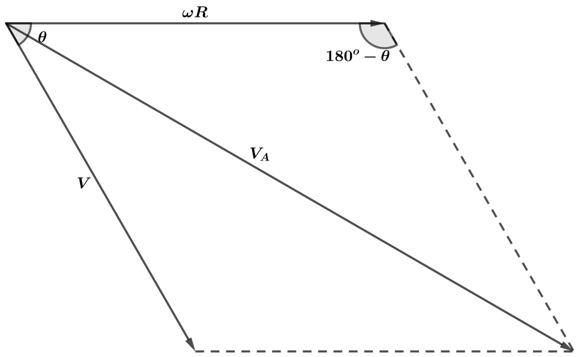
a) a velocidade inicial do pedregulho ao se desprender;

b) quanto tempo o pedregulho irá colidir com o plano após esse instante.



Solução:

a) Em um instante qualquer, o disco possui velocidade angular ω e a velocidade de seu centro é $V = v_o$. A condição de não-deslizamento implica que $v_o = \omega R$. A velocidade do ponto A pode ser vista como a soma vetorial da velocidade de rotação em torno do disco e da velocidade translacional do próprio disco, como pode ser visto na figura abaixo:

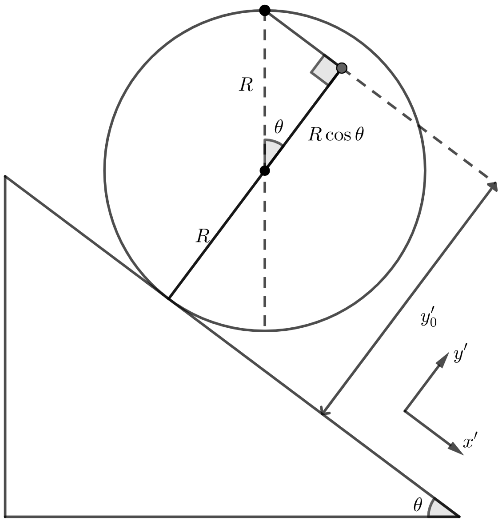


Usando a lei dos cossenos, a velocidade do ponto A é dada por:

$$V_A^2 = V^2 + (\omega R)^2 - 2V \cdot \omega R \cos(180^o - \theta) = 2V^2(1 + \cos\theta)$$

$$\boxed{V_A = \sqrt{2(1+\cos\theta)}v_0 = 10\sqrt{3}\,m/s \approx 17\,m/s}$$

b) Nessa parte do problema, é mais interessante que estudemos o movimento usando eixos paralelo e perpendicular ao plano inclinado (x' e y', respectivamente). Decompondo os vetores velocidade e aceleração nesses eixos, a velocidade inicial do pedregulho em y' é dada por $V_{y_0'} = \omega R \sin\theta = V \sin\theta$ e sua aceleração nesse eixo é $a_{y'} = -g\cos\theta$. Geometricamente, obtemos que a "altura"inicial do pedregulho em relação ao eixo y' é:



$$y'_0 = R + R\cos\theta = (1+\cos\theta)R$$

Desse modo, podemos escrever a equação horária para o eixo y'.

$$y' = y'_0 + V_{y'_0}t + \frac{1}{2}a_{y'}t^2 = (1+\cos\theta)R + V\sin\theta\ t - \frac{1}{2}g\cos\theta\ t^2$$

Queremos descobrir o instante em que o pedregulho atinge o plano, para o qual vale que $y' = 0$. Logo, com os valores numéricos substituídos:

$$0 = 22,5 + 5\sqrt{3}t - 2,5t^2$$

$$5t^2 - 10\sqrt{3}t - 45 = 0$$

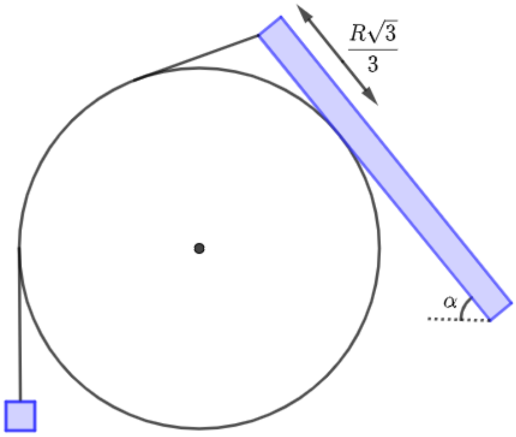
Resolvendo a equação do segundo grau, obtemos:

$$t = \frac{10\sqrt{3} \pm \sqrt{1200}}{10}\,s = \frac{10\sqrt{3} \pm 20\sqrt{3}}{10}\,s = (1 \pm 2)\sqrt{3}\,s$$

Note que buscamos $t > 0$, já que a colisão ocorrerá após o lançamento. Portanto, escolhemos a raiz positiva, e, assim:

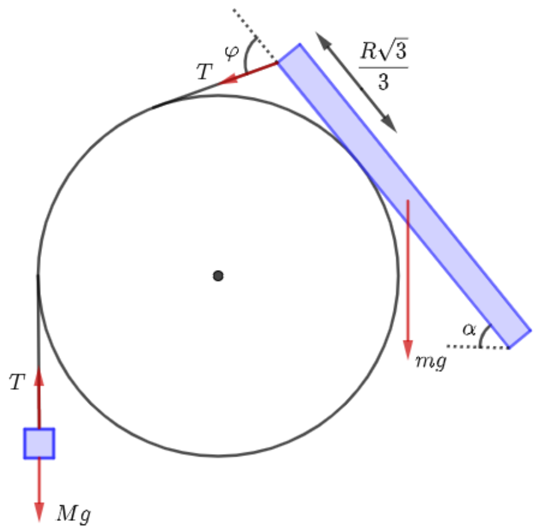
$$\boxed{t = 3\sqrt{3}\,s \approx 5,10\,s}$$

Questão 4. Através de uma tora redonda escorregadia com um raio R, cujo eixo é horizontal, é lançada uma corda sem peso. Nos extremos dela se fixa um peso de um lado e uma haste uniforme, fina e rígida do outro (ver figura). Na posição de equilíbrio estável, a haste faz um ângulo $\alpha = 30°$ com o horizonte. A distância da extremidade da haste à qual a corda está conectada até o ponto de tangência da haste na tora é $R\sqrt{3}/3$ Encontre a relação entre a massa M da carga e a massa m da haste.



Solução:

Para acharmos a relação entre as massas precisamos escrever as equações que regem o equilíbrio dos corpos.



Do equilíbrio da haste na sua direção e do equilíbrio da carga temos

$$T\cos\varphi = mg\sin\alpha$$

$$T = Mg$$

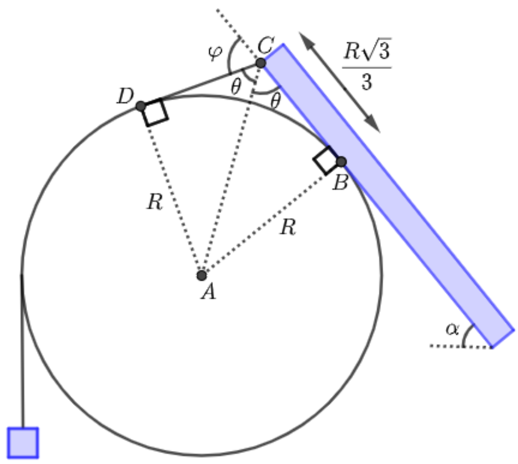
Logo

$$M\cos\varphi = m\sin\alpha$$

Como foi dito no enunciado $\alpha = 30°$, então

$$M\cos\varphi = m\frac{1}{2}$$

Agora precisamos encontrar o ângulo φ, para isso usaremos um pouco de trigonometria, veja a figura a seguir.



Perceba que os triângulos ABC e ACD são congruentes, logo os ângulos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{ACD}$ são iguais (representados por θ na figura). Da trigonometria

$$\tan\theta = \frac{R}{\frac{R\sqrt{3}}{3}}$$

$$\tan\theta = \sqrt{3}$$

Ou seja, $\theta = 60°$, podemos então calcular o ângulo φ

$$\varphi + 2\theta = 180°$$

$$\varphi = 60°$$

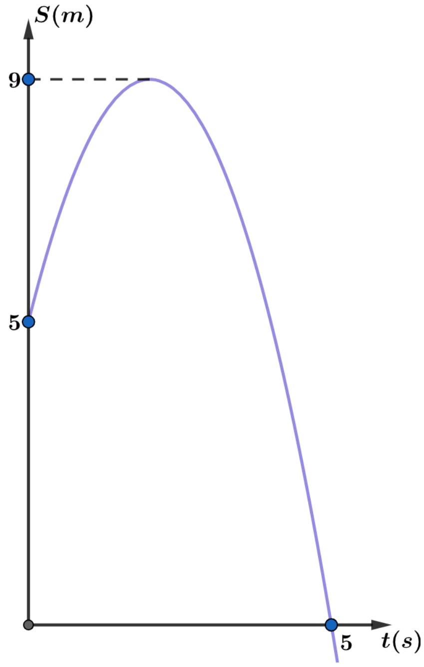
então

$$M\cos 60° = m\frac{1}{2}$$

$$M\frac{1}{2} = m\frac{1}{2}$$

$$\boxed{M = m}$$

Questão 5. Em $t = 0$ s, o móvel A parte em MRU da coordenada $S_0 = 0$ com velocidade de 4 m/s. Enquanto isso, B se move de acordo com a representação gráfica abaixo.



De posse dessas informações, determine:

a) o instante em que B inverte seu movimento.

b) o momento em que A e B se cruzam.

c) a posição S do encontro entre A e B.

Solução:

a) Pelo gráfico, sabemos que $S_0 = 5\text{m}$, que a velocidade é nula para $S_B = 9\text{m}$ e que $t = 5\text{s}$ é uma das raízes para a equação $S(t)$. Partindo da Equação de Torricelli e dos dados acima, e utilizando todas as nossas variáveis no SI:

$$V_B^2 = V_0^2 + 2a\Delta S$$

$$0 = V_0^2 + 2a \times (9 - 5) = V_0^2 + 8a$$

$$V_0^2 = -8a \tag{1}$$

Pela equação do espaço do MRUV, aplicada para o instante $t = 5\text{s}$, obtemos:

$$S_B = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$0 = 5 + 5V_0 + \frac{25}{2}a$$

Simplificando e substituindo a por $-\frac{V_0^2}{8}$:

$$0 = 1 + V_0 - \frac{5}{16}V_0^2$$

Com isso, finalmente obtemos:

$$V_0 = \frac{16 \pm 24}{10}\text{m/s}$$

Pelo gráfico, $V_0 > 0$. Logo, a única resposta possível é:

$$V_0 = 4\text{m/s}$$

Usando isso e (1), podemos isolar a:

$$a = -2\text{m/s}^2$$

Podemos agora usar a equação horária da velocidade para obter o instante para qual $V_B = 0$ (ponto de inversão):

$$V_B = V_0 + at$$

$$0 = 4 - 2t$$

$$\boxed{t = 2\,\text{s}} \tag{2}$$

b) Com os resultados do item anterior, podemos construir a equação horária de B:

$$S_B = 5 + 4t - t^2$$

Podemos também construir a equação de S_A, uma vez que sua velocidade inicial é de $v_0 = 18\text{km/h} = 5\text{m/s}$.

$$S_A = V_0 t = 5t$$

Igualando S_A e S_B:

$$5 + 4t - t^2 = 5t$$

$$t^2 + t - 5 = 0$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}\,\text{s}$$

Descartando a resposta negativa:

$$\boxed{t = \frac{\sqrt{21} - 1}{2}\text{s} \approx 1,8\,\text{s}} \tag{3}$$

c) Simplesmente inserindo o valor de t do último item na expressão $S_A(t)$, temos:

$$\boxed{S = 5 \times \frac{\sqrt{21} - 1}{2}\,\text{m} \approx 9,0\,\text{m}} \tag{4}$$

Questão 6. Sobre uma mesa, estão três bacias, duas com água e uma vazia. A renomada física Malu mora em Manaus, uma cidade muito quente e com sua própria escala de temperatura, a Magraus ($°M$)! Utilizando um termômetro nessa escala, Malu vê que uma das bacias com água possui uma temperatura de $10,5\,°M$, com $1\,L$ (litro) de água, e a outra uma temperatura de $15\,°M$, com uma massa de água m. Sabendo que em Manaus, uma cidade nas margens do rio (aproximadamente no nível do mar), a água funde a $0\,°M$ e ebule a $30\,°M$, e que, após misturar as duas bacias a temperatura de equilíbrio foi $40\,°C$, determine, em g, o valor de m.

Solução:

Primeiro, devemos achar a correlação entre Magraus e Graus Celsius. Como temos informação dos pontos de fusão e ebulição da água em Magraus, tem-se a seguinte relação:

$$\frac{T_C - 0}{100 - 0} = \frac{T_M - 0}{30 - 0} \Rightarrow T_M = \frac{3}{10}T_C$$

Portanto, a temperatura de equilíbrio foi $T_M = 0,3 \cdot 40 = 12\ ^\circ M$, o que permite equacionar:

$$Q_{total} = Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow mC(12 - 15) + 1 \cdot C(12 - 10,5) = 0$$

Então,

$$\boxed{m = 0,5 \text{ kg}}$$

Questão 7. Em um jockey club, uma corrida de cavalos é realizada em uma pista composta por $1000\,m$. Natan, um profissional das apostas, analisa os 6 cavalos que irão correr e percebe que dois cavalos A e B são os com maior probabilidade de ganhar a corrida. O cavalo A sempre parte do repouso e tem uma aceleração de $20\,m/s^2$, já o cavalo B possui uma aceleração menor, de $17\,m/s^2$, entretanto, diferente de A, o cavalo B não parte do repouso e sua velocidade inicial não é fixa. Natan, contando com a sorte, apostou no cavalo B. Quais os possíveis valores da velocidade inicial de B para Natan ganhar a aposta?

Solução:

Perceba que o cavalo A chegará ao fim da corrida sempre em um tempo fixo

$$\Delta x = \frac{a_A t^2}{2}$$

$$1000\,m = \frac{(20\,m/s^2)t^2}{2}$$

$$t = 10\,s$$

Já o cavalo B muda o tempo de chegada dependendo de sua velocidade inicial, mas sabemos o seguinte: Para B chegar antes de A, em $10\,s$, B deve ter percorrido uma distância maior que $1000\,m$

$$\Delta x = V_B t + \frac{a_B t^2}{2}$$

$$t = 10\,s \Longrightarrow \Delta x > 1000\,m$$

$$(10\,s)V_B + 850\,m > 1000\,m$$

Então

$$\boxed{V_B > 15\,m/s}$$

Essa é a condição para Natan ganhar a aposta.

Questão 8. Um motorista de automóvel identifica um aclive à sua frente, para o qual ele estima uma inclinação de $\alpha = 45,0°$ com a horizontal. O conjunto carro+motorista possui massa $M = 0,500\,t$ (toneladas). O motorista decide subir o aclive aceleradamente, partindo do repouso e mantendo uma aceleração constante. Um tempo $\tau = 5,00\,s$ após o início de seu movimento acelerado, o carro apresenta uma velocidade $v = 20,0\,m/s$. Determine a potência média desenvolvida pelo motor do automóvel durante esse mesmo intervalo de tempo.

Solução:

Primeiramente, vamos entender a situação física: o carro sobe aceleradamente pelo aclive devido à resultante entre a força de atrito sobre os pneus (que aponta plano acima) e o seu peso. Essas são as duas forças que realizam trabalho. Chamando de W_{Fat} o trabalho da força de atrito e W_g o trabalho da força gravitacional (peso), temos, pelo teorema da energia cinética:

$$W = W_{Fat} + W_g = \frac{1}{2}Mv^2 - 0$$

Sendo D a distância percorrida no plano, a diferença de altura entre o início e fim do intervalo é dada por $D\sin\alpha$. Logo, calculando o trabalho resistivo da força peso e isolando W_{Fat}:

$$W_{Fat} = \frac{Mv^2}{2} + MgD\sin\alpha$$

Do MRUV,

$$D = \frac{1}{2}a\tau^2 = \frac{1}{2}v\tau$$

, usando $v = a\tau$. Logo:

$$W_{Fat} = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}Mgv\tau\sin\alpha$$

Note que, simplificadamente - como é esperado o tratamento de uma questão de olimpíada a nível nacional -, W_{Fat} equivale ao trabalho realizado pelo motor do carro, necessário para girar as rodas contra o chão e promover a atuação do atrito. Logo, a potência média desenvolvida pelo motor é, por definição:

$$Pot_m = \frac{W_{Fat}}{\tau}$$

Muito cuidado para não confundir com a potência instantânea! A última seria obtida multiplicando-se a velocidade v do carro pela intensidade da força de atrito Fat.

Desta forma:

$$\boxed{Pot_m = \frac{1}{2}\frac{Mv^2}{\tau} + \frac{1}{2}Mgv\sin\alpha}$$

Substituindo os dados:

$$\boxed{Pot_m = 5,50 \times 10^4 \ W}$$