SIMULADO NOIC
OLIMPÍADA BRASILEIRA DE FÍSICA
3ª Fase - 13 de novembro de 2021

Nível 2
Ensino Médio
1ª e 2ª séries

Escrito por Wanderson Faustino Patrício, Rafael Ribeiro, Matheus Felipe R. Borges, Wesley Andrade e Ualype de Andrade

LEIA ATENTAMENTE AS INSTRUÇÕES:

1. Esta prova destina-se exclusivamente aos alunos dos **1ª e 2ª séries do nível médio.** Ela contém **doze** questões. Cada questão tem valor de 10 pontos e a prova um total de 80 pontos.

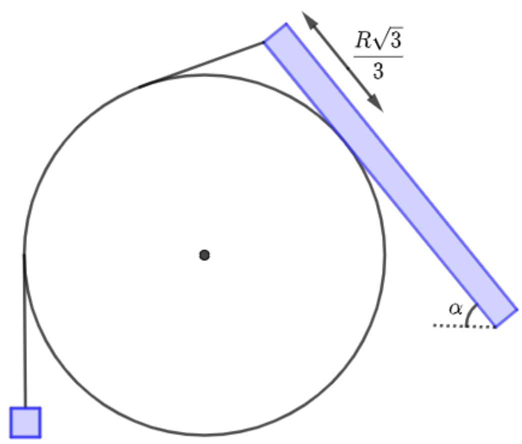
2. Os alunos da 1ª série podem escolher livremente oito questões para responder. Alunos da 2ª série devem responder as oito questões não indicadas como "exclusiva para alunos da 1ª série".

3. Todos os resultados numéricos devem ser expressos em unidades no Sistema Internacional e seguindo as instruções específicas da questão.

4. A duração máxima desta prova é de **quatro** horas.

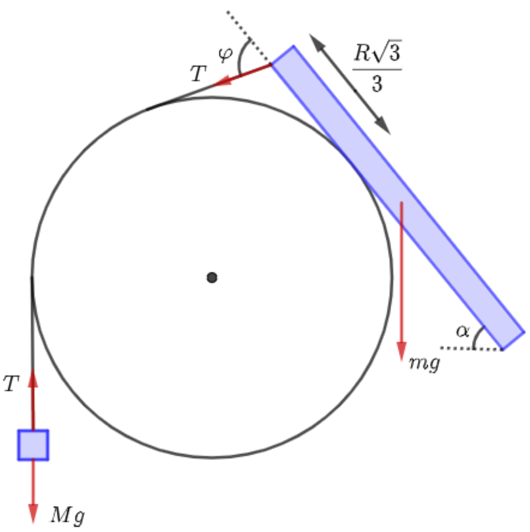
5. Se necessário, e a menos que indicado ao contrário, use: $\pi = 3,0$; $\sqrt{2} = 1,4$; $\sqrt{3} = 1,7$; $\sqrt{5} = 2,2$; $\operatorname{sen} 30° = 0,50$; $\cos 30° = 0,85$; aceleração gravitacional na superfície da terra $g = 10\, m/s^2$; constante gravitacional universal $G = 7,0 \times 10^{-11} m^3/(kg.s^2)$; calor específico da água líquida $c_a = 1\, cal/(g\, C)$; $1\, cal = 4,2\, J$; densidade da água líquida $\rho = 1,0\, g/cm^3$; velocidade da luz no vácuo $c = 3,0 \times 10^8\, m/s$; velocidade do som no ar $v_s = 340\, m/s$; índice de refração do ar $n_{ar} = 1,0$

Questão 1. (exclusiva para alunos de 1ª série) Através de uma tora redonda escorregadia com um raio R, cujo eixo é horizontal, é lançada uma corda sem peso. Nos extremos dela se fixa um peso de um lado e uma haste uniforme, fina e rígida do outro (ver figura). Na posição de equilíbrio estável, a haste faz um ângulo $\alpha = 30°$ com o horizonte. A distância da extremidade da haste à qual a corda está conectada até o ponto de tangência da haste na tora é $R\sqrt{3}/3$ Encontre a relação entre a massa M da carga e a massa m da haste.



Solução:

Para acharmos a relação entre as massas precisamos escrever as equações que regem o equilíbrio dos corpos.



Do equilíbrio da haste na sua direção e do equilíbrio da carga temos

$$T\cos\varphi = mg\sin\alpha$$

$$T = Mg$$

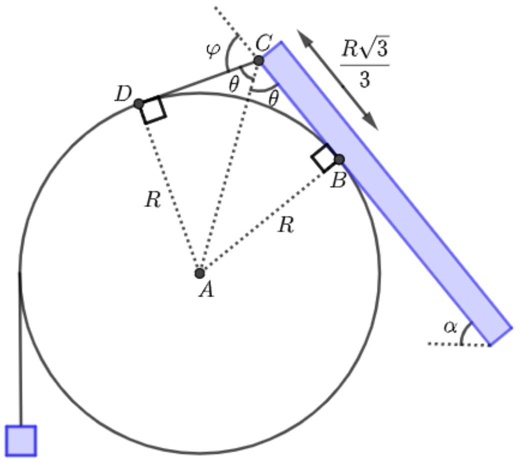
Logo

$$M\cos\varphi = m\sin\alpha$$

Como foi dito no enunciado $\alpha = 30°$, então

$$M\cos\varphi = m\frac{1}{2}$$

Agora precisamos encontrar o ângulo φ, para isso usaremos um pouco de trigonometria, veja a figura a seguir.



Perceba que os triângulos ABC e ACD são congruentes, logo os ângulos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{ACD}$ são iguais (representados por θ na figura). Da trigonometria

$$\tan\theta = \frac{R}{\frac{R\sqrt{3}}{3}}$$

$$\tan\theta = \sqrt{3}$$

Ou seja, $\theta = 60°$, podemos então calcular o ângulo φ

$$\varphi + 2\theta = 180°$$

$$\varphi = 60°$$

então

$$M\cos 60° = m\frac{1}{2}$$

$$M\frac{1}{2} = m\frac{1}{2}$$

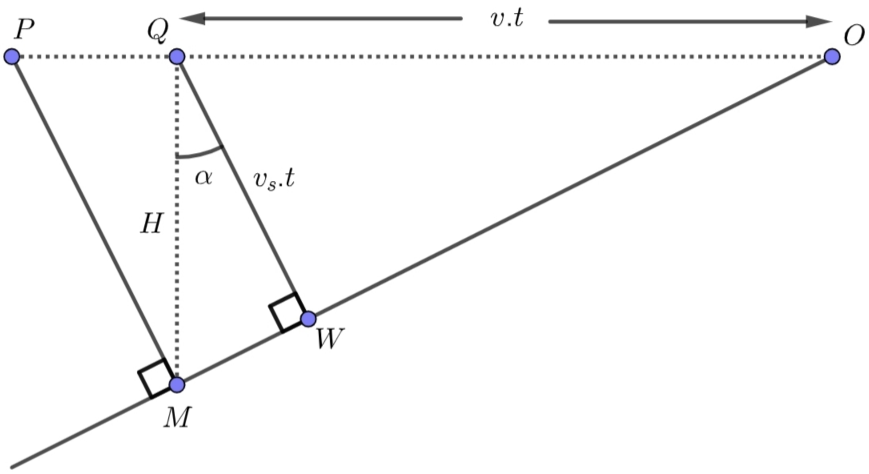
$$\boxed{M = m}$$

Questão 2. (exclusiva para alunos de 1ª série) No início da década de 1950, era de interesse de diversas agências aéreas ao redor do mundo, a criação de uma aeronave supersônica de transporte de passageiros. Em 1962, a partir de um acordo entre Inglaterra e frança, o avião Concorde começou a ser produzido, sendo finalizado 13 anos depois. Seus voos comerciais começaram em 21 de janeiro de 1976 e terminaram em 24 de outubro de 2003. Em 2003, Mario leu a seguinte notícia no jornal "O último voo do Concorde, avião supersônico que anda com duas vezes a velocidade do som, será realizado nesta sexta-feira dia 24 de outubro" e decidiu que queria assistir esse momento histórico. Assistindo à passagem do Concorde, Mario notou que escutou o barulho do avião 46 s depois a passagem sobre sua cabeça. Determine qual a altura de voo do Concorde.

Solução:

Para compreender plenamente a solução dessa questão, é recomendado ler previamente sobre o Cone de Mach na ideia 28(Clique aqui)

Na figura, o avião se movimenta ao longo da reta PO, Mario está no ponto M. $t = 46\,s$ após passar pela cabeça do observador (ponto Q) o avião se encontra no ponto O e Mário escuta o som emitido pelo avião.



Quando o avião atinge O, observador em M escuta o som emitido em P. Analisando a figura concluímos que:

- QO é a distância percorrida pelo avião no tempo t: $QO = v \cdot t$
- QW é a distância percorrida pelo som no mesmo tempo t: $QW = v_s \cdot t$, uma semelhança enter os triângulos $\triangle QWO$ e $\triangle QMO$ permite escrever:

$$\frac{QO}{WO} = \frac{QM}{QW}$$

$$\frac{vt}{\sqrt{(vt)^2 - (v_s t)^2}} = \frac{H}{v_s t}$$

$$\boxed{H = \frac{v_s t}{\sqrt{1 - (\frac{v_s}{v})^2}}}$$

Pela análise do trecho

"O último voo do Concorde, avião supersônico que anda com duas vezes a velocidade do som, será realizado nesta sexta-feira dia 24 de outubro"

Vemos que $v = 2v_s$ e pelos dados da prova $v_s = 340\,m/s$. Então

$$H = \frac{340 \times 46}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}}$$

$$H = \frac{340 \times 46 \times 2}{\sqrt{3}} = \frac{340 \times 46 \times 2}{1,7}$$

$$\boxed{H = 18400\, m}$$

Questão 3. (exclusiva para alunos de 1ª série) Sobre uma mesa, estão três bacias, duas com água e uma vazia. A renomada física Malu mora em Manaus, uma cidade muito quente e com sua própria escala de temperatura, a Magraus ($^\circ M$)! Utilizando um termômetro nessa escala, Malu vê que uma das bacias com água possui uma temperatura de $10,5\,^\circ M$, com $1\,L$ (litro) de água, e a outra uma temperatura de $15\,^\circ M$, com uma massa de água m. Sabendo que em Manaus, uma cidade nas margens do rio (aproximadamente no nível do mar), a água funde a $0\,^\circ M$ e ebule a $30\,^\circ M$, e que, após misturar as duas bacias a temperatura de equilíbrio foi $40\,^\circ C$, determine, em gramas, o valor de m.

Solução:

Primeiro, devemos achar a correlação entre Magraus e Graus Celsius. Como temos informação dos pontos de fusão e ebulição da água em Magraus, tem-se a seguinte relação:

$$\frac{T_C - 0}{100 - 0} = \frac{T_M - 0}{30 - 0} \Rightarrow T_M = \frac{3}{10} T_C$$

Portanto, a temperatura de equilíbrio foi $T_M = 0,3 \cdot 40 = 12\,^\circ M$, o que permite equacionar:

$$Q_{total} = Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow mC(12 - 15) + 1 \cdot C(12 - 10,5) = 0$$

Então,

$$\boxed{m = 0,5 \text{ kg}}$$

Questão 4. (exclusiva para alunos de 1ª série) Em um jockey club, uma corrida de cavalos é realizada em uma pista composta por $1000\,m$. Natan, um profissional das apostas, analisa os 6 cavalos que irão correr e percebe que dois cavalos A e B são os com maior probabilidade de ganhar a corrida. O cavalo A sempre parte do repouso e tem uma aceleração de $20\,m/s^2$, já o cavalo B possui uma aceleração menor, de $17\,m/s^2$, entretanto, diferente de A, o cavalo B não parte do repouso e sua velocidade inicial não é fixa. Natan, contando com a sorte, apostou no cavalo B. Quais os possíveis valores da velocidade inicial de B para Natan ganhar a aposta?

Solução:

Perceba que o cavalo A chegará ao fim da corrida sempre em um tempo fixo

$$\Delta x = \frac{a_A t^2}{2}$$

$$1000\,m = \frac{(20\,m/s^2)t^2}{2}$$

$$t = 10\,s$$

Já o cavalo B muda o tempo de chegada dependendo de sua velocidade inicial, mas sabemos o seguinte: Para B chegar antes de A, em $10\,s$, B deve ter percorrido uma distância maior que $1000\,m$

$$\Delta x = V_B t + \frac{a_B t^2}{2}$$

$$t = 10\,s \implies \Delta x > 1000\,m$$

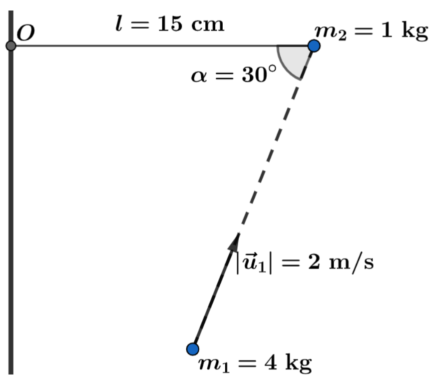
$$(10\,s)V_B + 850\,m > 1000\,m$$

Então

$$\boxed{V_B > 15\,m/s}$$

Essa é a condição para Natan ganhar a aposta.

Questão 5. Uma escola de Salvador decide incorporar uma nova modalidade esportiva às suas aulas de Educação Física, a *"Zinuca"*. Nesse jogo, uma bola de bilhar de massa $m_1 = 4$ kg é lançada de encontro a outra bola de massa $m_2 = 1$ kg, que se encontra em repouso e amarrada ao ponto O da parede por uma corda de comprimento $l = 15$ cm. Em uma jogada, a bola m_1 foi lançada com velocidade inicial $u_1 = 2$ m/s, fazendo um ângulo de $\alpha = 30°$ com a corda. Sabendo que a colisão dissipa $18,75\%$ da energia do sistema na forma de calor, determine o módulo da velocidade de cada bola logo após a colisão.



Solução:

Existem diferentes maneiras de se abordar esse problema. Nessa solução, usaremos o conceito de impulso linear. Denominando de v_1 e v_2 as velocidades de 1 e 2 após a colisão, e sendo I o impulso gerado pela colisão:

$$m_1(u_1 - v_1) = I$$

$$m_2 v_2 = I \operatorname{sen} \alpha$$

Substituindo uma equação na outra e substituindo os dados no SI:

$$m_2 v_2 = m_1(u_1 - v_1) \operatorname{sen} \alpha$$

$$v_2 = 2(2 - v_1) \tag{1}$$

As energias inicial e final do sistema são dadas por:

$$E_0 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2$$

$$E_f = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Podemos tirar do enunciado que $E_f = (1 - 0,1875)E_0 = 0,8125E_0$. Desse modo:

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = 0,8125 m_1 u_1^2$$

Com os valores do enunciado:

$$4v_1^2 + v_2^2 = 13 \tag{2}$$

Substituindo (1) em (2) e simplificando, obtemos:

$$8v_1^2 - 16v_1 + 3 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau:

$$v_1 = 1 \pm \frac{\sqrt{10}}{4}\text{m/s} = 1 \pm 0,77\text{m/s} = 1,77 \text{ ou } 0,23 \text{ m/s}$$

Substituindo na equação (1), temos:

$$v_2 = 2 - \pm\frac{\sqrt{10}}{2}\text{m/s} = 2 - \pm 1,54\text{m/s} = 0,46 \text{ ou } 3,54 \text{ m/s}$$

Como v_2 deve ser maior que v_1 de modo que as partículas não colidam novamente, concluímos que:

$$\boxed{v_1 = 0,23\text{m/s}} \tag{3}$$

$$\boxed{v_2 = 3,54\text{m/s}} \tag{4}$$

Questão 6. A Lua sempre foi um elemento central de diversas culturas mundo a fora, despertando o interesse de grandes mentes ao longo das eras. Um fenômeno lunar interessante de se observar é a existência das chamadas *superlua* e *microlua*, que ocorrem devido à trajetória elíptica da Lua: quando em seu perigeu, a Lua parece ser maior do que o normal; quando em seu apogeu, o astro se mostra menor que o usual.

Agora considere o planeta Beauxbatons, de uma galáxia muito distante, e seu satélite Frankia. Essa lua possui um período sideral de $T = 1$ semana, enquanto a massa de Beauxbatons é dada por $M = 1,44 \cdot 10^{24}$ kg. Sendo a excentricidade da órbita lunar $e = 0,5$ e $D = 700$ m o diâmetro de Frankia, determine:

a) o tamanho angular de Frankia em superlua, visto de Beauxbatons e medido em arcos de segundo (θ_S).

b) o tamanho angular de Frankia em microlua, visto de Beauxbatons e medido em arcos de segundo (θ_M).

c) a razão entre θ_S e θ_M.

Solução:

a) Sabendo a equação do período orbital, podemos obter o semi-eixo maior:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{MG}}$$

$$a = \sqrt[3]{MG\frac{T^2}{4\pi^2}}$$

Sabendo a definição de excentricidade ($e = \frac{c}{a}$), concluímos que a distância do perigeu à Beauxbatons é dada por:

$$r_P = a - c = (1-e)a = 0,5a$$

Logo:

$$\theta_S = \frac{D}{r_P} = 2\frac{D}{a} = 2D\sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{MGT^2}} = \frac{2 \cdot 700}{1008 \cdot 10^5}\text{rad} = \frac{1}{72000}\frac{180}{\pi}^{\circ} = \frac{1}{1200}^{\circ}$$

$$\boxed{\theta_S = 3"} \tag{5}$$

b) De maneira semelhante, a distância do apogeu ao planeta é:

$$r_A = a + c = (1+e)a = \frac{3}{2}a$$

Logo:

$$\theta_M = \frac{D}{r} = \frac{2}{3}\frac{D}{a} = \frac{1}{3}\theta_S$$

Com isso:

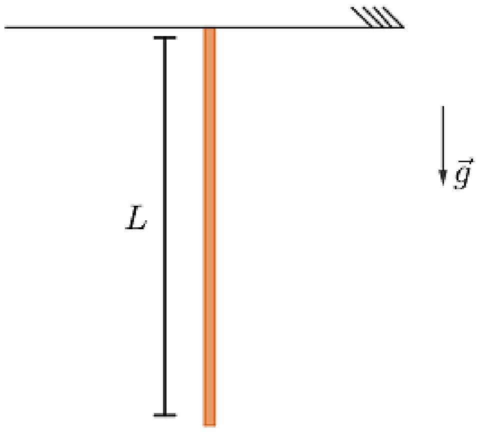
$$\boxed{\theta_M = 1"} \tag{6}$$

c) Como obtemos no item anterior:

$$\theta_M = \frac{1}{3}\theta_S$$

$$\boxed{\frac{\theta_S}{\theta_M} = 3} \tag{7}$$

Questão 7. Considere uma corda homogênea de comprimento $L = 10\,m$ e massa $m = 2\,kg$, presa ao teto de uma sala, em um ambiente em que a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10\,m/s^2$.



No instante $t = 0$ um pulso de onda é formado na extremidade livre da corda. Esse pulso sobe a corda até encostar no teto.

a) Qual é o módulo da força de tração na corda a uma altura y, medida a partir da extremidade livre?

b) Qual a velocidade do pulso a essa altura?

c) Quanto tempo levará para que o pulso atinja o teto da sala?

Solução:

a) A tração a altura y terá que suportar apenas o peso da corda que está abaixo daquela altura.

$$T(y) = m(y) \cdot g$$

Como a corda é homogênea:

$$\frac{m}{L} = \frac{m(y)}{y} \iff m(y) = \frac{m}{L} \cdot y$$

$$\boxed{T(y) = \frac{mg}{L} \cdot y}$$

b) A velocidade de um pulso em uma corda sujeita a uma tração T é:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Em que μ é a densidade linear de massa.

Portanto:

$$v(y) = \sqrt{\frac{T(y)}{\mu}} = \sqrt{\frac{\frac{mg}{L} \cdot y}{\frac{m}{L}}}$$

$$\boxed{v(y) = \sqrt{gy}}$$

c) Elevando ambos os membros do resultado do item anterior temos:

$$v^2 = gy \iff v^2 = 0^2 + 2 \cdot \left(\frac{g}{2}\right) y$$

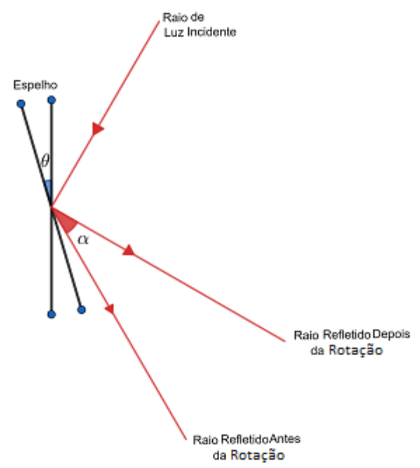
Percebemos que a equação anterior é análoga à Equação de Torricelli para o movimento uniformemente acelerado. Daí, vemos que o pulso sobe com aceleração constante e igual a $\frac{g}{2}$.
Aplicando na equação horária da posição:

$$y = y(0) + v(0) \cdot t + \frac{1}{2}\frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$L = \frac{gt^2}{4} \iff$$

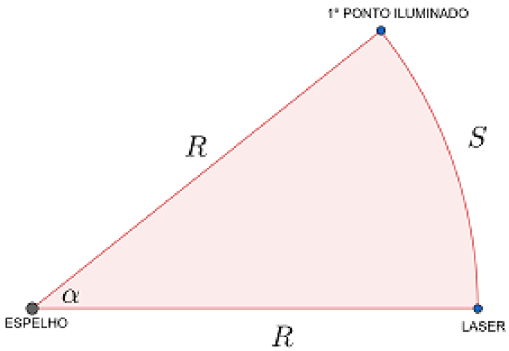
$$\boxed{t = 2\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\,s}$$

Questão 8. Espelhos são muito utilizados durante o nosso dia a dia. Desde o simples ato de pentear o cabelo pela manhã a observação de estrelas em um telescópio, várias ações do cotidiano são totalmente dependentes da utilização de espelhos. Com o intuito de calcular a velocidade da luz no ar, um estudante utiliza um aparato com um espelho plano giratório. O estudante faz incidir uma luz monocromática no espelho, e observa como a rotação do espelho altera a trajetória do raio de luz refletido.



a) Se o espelho gira com velocidade angular ω, e após um tempo t rotacionou um ângulo θ, qual será a deflexão angular α que o raio de luz refletido sofrerá? Expresse sua resposta em função de ω e t

b) Esse aparato é posto dentro de um sensor em formato de circunferência. Em um determinado ponto desse sensor há um laser emitindo luz em direção ao espelho. Num primeiro instante, o espelho está ajustado para que a luz do laser retorne a este sem sofrer deflexão. Inicialmente tanto o laser quanto o motor do espelho estão desligados. Em $t = 0$ o laser e o motor são ligados simultaneamente. Sabendo que o primeiro ponto iluminado no sensor está a uma distância S do laser (medido no perímetro da circunferência), qual é o valor da velocidade da luz no ambiente do experimento?



Dados:

- Velocidade angular do espelho: $\omega = 7\,rad/s$
- Raio do sensor: $R = 1\,km$
- Distância entre o laser e o 1º ponto iluminado: $S = 5\,cm$

c) Caso o experimento fosse realizado na água ($n_{ag} = 4/3$) a distância S seria quanto?

Solução:

a) Perceba que como o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, o ângulo total entre os raios será o dobro do de incidência. Logo, se o espelho gira um ângulo θ o ângulo de incidência diminuiu θ, portanto, o ângulo entre os raios diminuiu 2θ.

$$\alpha = 2\theta$$

$$\boxed{\alpha = 2\omega t}$$

b) O tempo para o raio chegar ao espelho será:

$$t = \frac{R}{v}$$

O ângulo girado pelo espelho será (considerando v a velocidade da luz no meio):

$$\alpha = 2\omega t = 2\omega \cdot \frac{R}{v}$$

Pela relação dos ângulos:

$$\alpha = \frac{S}{R}$$

$$2\omega\frac{R}{v} = \frac{S}{R}$$

$$\boxed{v = \frac{2\omega R^2}{S} = 2,8 \cdot 10^8\,m/s}$$

c) Considerando c a velocidade da luz no vácuo:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{2\omega R^2}{S}$$

$$\boxed{S = \frac{2n\omega R^2}{c} = 6,2\,cm}$$

Questão 9. Quando o ar no fundo de um recipiente é aquecido, ele se torna menos denso que o ar ao seu redor e sobe. Simultaneamente, o ar mais frio cai para baixo. Este processo de transferência de calor para cima é conhecido como convecção, e é extremamente importante no estudo de interiores estelares. Para modelar simplificadamente esse fenômeno, considere uma caixa fechada em formato de paralelepípedo de altura h, localizada em uma mesa horizontal. A caixa está cheia de ar com temperatura uniforme T_0. Em seguida, suponha que o fundo da caixa seja aquecido de modo que o ar próximo à base alcance instantaneamente a temperatura $T_0 + \Delta T$. Devido a isso, uma pequena parcela de ar quente na parte inferior começa a subir a partir do repouso - de forma praticamente isotérmica - até atingir o topo da caixa, onde sua temperatura é instantaneamente reduzida para T_0. Determine, em função de g, h, T_0 e ΔT, o tempo necessário para a parcela ascender ao topo. Considere que o ar é um gás ideal e que a altura h é pequena o suficiente para que a pressão e a densidade do ar variem muito pouco ao longo do recipiente. Negligencie transferências de calor e atrito entre a parcela de ar e o ar que a circunda.

Solução:

Primeiramente, vamos escrever a equação de movimento da parcela. Note que o movimento ascendente é ocasionado pela resultante entre as duas forças atuantes: o empuxo e seu peso. Sendo assim, pela 2ª Lei de Newton:

$$E - mg = ma$$

Chamando a densidade da parcela de ρ e a do ar circundante de ρ_0:

$$\rho_0 V g - \rho V g = \rho V a \rightarrow a = \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right) g$$

Agora, escrevamos ρ_0 e ρ em função dos parâmetros do problema. Como ambos ar e parcela podem ser tratados como gases ideais, temos, pela equação de Clapeyron para a densidade de um gás ideal:

$$\rho_0 = \frac{P\mu}{RT_0} \quad (ar) \qquad\qquad \rho = \frac{P\mu}{R\,(T_0 + \Delta T)} \quad (parcela)$$

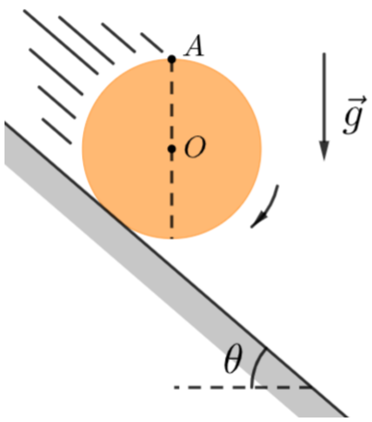
Em que μ é a massa molar do ar, a qual é irrelevante para este problema. Note que assumimos válido o equilíbrio mecânico da parcela com o ar, i.e. a pressão P da parcela é a mesma do ar circundante. Note que, como a pressão e a densidade variam muito pouco ao longo do recipiente, elas podem ser consideradas essencialmente constantes, utilizamos a temperatura da parcela como $T_0 + \Delta T$ durante todo o movimento de subida. Dividindo as equações e substituindo o resultado na aceleração, temos:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 + \frac{\Delta T}{T_0} \rightarrow a = \frac{g\Delta T}{T_0}$$

Portanto, o movimento da parcela é uniformemente acelerado. Sendo assim, o tempo necessário, a partir do repouso, para esta percorrer uma distância h e subir ao topo é dado por:

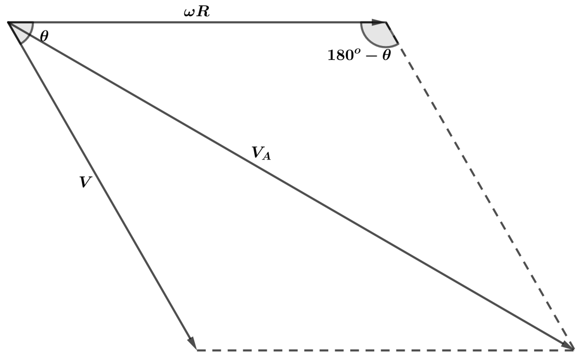
$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} \implies \boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g}\frac{T_0}{\Delta T}}}$$

Questão 10. Um disco de pedra circular de raio $R = 15,0\,m$ rola sem deslizar sobre um plano inclinado de $\theta = 60,0°$ em relação à horizontal. A velocidade do centro do disco em um dado instante é de $v_o = 10,0\,m/s$, paralela ao plano. Nesse mesmo instante, um pequeno pedregulho desprende-se do ponto A na periferia do disco, sendo o segmento AO (O é o centro do disco) vertical. Determine quanto tempo o pedregulho irá colidir com o plano após esse instante.



Solução:

Em um instante qualquer, o disco possui velocidade angular ω e a velocidade de seu centro é $V = v_o$. A condição de não-deslizamento implica que $v_o = \omega R$. A velocidade do ponto A pode ser vista como a soma vetorial da velocidade de rotação em torno do disco e da velocidade translacional do próprio disco, como pode ser visto na figura abaixo:



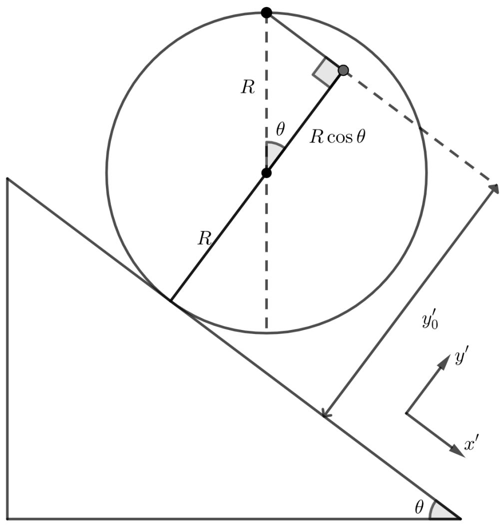
Usando a lei dos cossenos, a velocidade do ponto A é dada por:

$$V_A^2 = V^2 + (\omega R)^2 - 2V \cdot \omega R \cos(180^o - \theta) = 2V^2(1 + \cos\theta)$$

$$V_A = \sqrt{2(1 + \cos\theta)}v_0 = 10\sqrt{3}\, m/s$$

Nessa parte do problema, é mais interessante que estudemos o movimento usando eixos paralelo e perpendicular ao plano inclinado (x' e y', respectivamente). Decompondo os vetores velocidade e aceleração nesses eixos, a velocidade inicial do pedregulho em y' é dada por $V_{y_0'} = \omega R \sin\theta = V \sin\theta$ e sua aceleração nesse eixo é $a_{y'} = -g\cos\theta$.

Geometricamente, obtemos que a "altura"inicial do pedregulho em relação ao eixo y' é:



$$y_0' = R + R\cos\theta = (1 + \cos\theta)R$$

Desse modo, podemos escrever a equação horária para o eixo y'.

$$y' = y_0' + V_{y_0'}t + \frac{1}{2}a_{y'}t^2 = (1 + \cos\theta)R + V\sin\theta\ t - \frac{1}{2}g\cos\theta\ t^2$$

Queremos descobrir o instante em que o pedregulho atinge o plano, para o qual vale que $y' = 0$. Logo, com os valores numéricos substituídos:

$$0 = 22,5 + 5\sqrt{3}t - 2,5t^2$$

$$5t^2 - 10\sqrt{3}t - 45 = 0$$

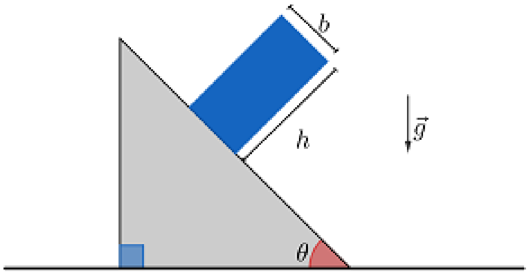
Resolvendo a equação do segundo grau, obtemos:

$$t = \frac{10\sqrt{3} \pm \sqrt{1200}}{10}\, s = \frac{10\sqrt{3} \pm 20\sqrt{3}}{10}\, s = (1 \pm 2)\sqrt{3}\, s$$

Note que buscamos $t > 0$, já que a colisão ocorrerá após o lançamento. Portanto, escolhemos a raiz positiva, e, assim:

$$\boxed{t = 3\sqrt{3}\, s \approx 5,10\, s}$$

Questão 11. Um corpo em formato de paralelepípedo, com uma face quadrada de lado $b = 50cm$ e aresta de comprimento $h = 1m$ é posto em cima de um plano inclinado.



O ângulo de abertura do plano começa a aumentar a partir de $\theta = 0$.

Sabendo que o coeficiente de atrito entre a caixa e o plano é $\mu = 0,75$, o que acontece primeiro: o deslizamento ou o tombamento da caixa?

Solução:

i) Analisando a condição de deslizamento: Para que o corpo deslize a força peso na direção do plano deve superar a força de atrito máxima:

$$P_x \geq F_{at_{max}}$$

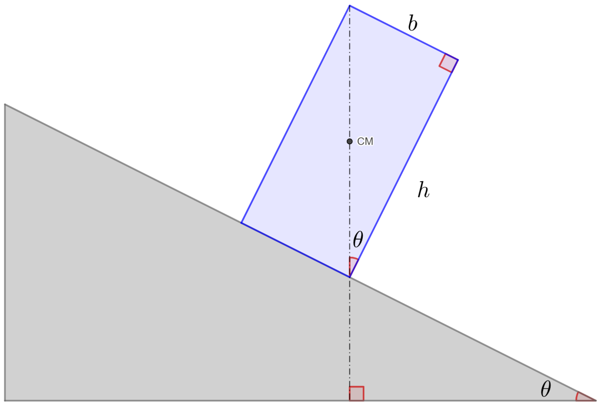
$$mg \sin\theta \geq \mu N$$

$$mg \sin\theta \geq \mu mg \cos\theta$$

$$\tan\theta \geq \mu$$

$$\tan(\theta_{desl}) = 0,75 \quad (*)$$

ii) Analisando a condição de tombamento: Para que o corpo tombe, o seu centro de massa deve estar fora da área de contato entre o corpo e o chão. Na condição de iminência de tombar, o centro de massa estará alinhado com a quina.



$$\tan(\theta) = \frac{b}{h}$$

$$\tan(\theta_{tomb}) = 0,5 \ \ (**)$$

De $(*)$ e $(**)$ temos:

$$\tan(\theta_{tomb}) < \tan(\theta_{desl}) \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta_{tomb} < \theta_{desl}}$$

O corpo tomba antes de começar a deslizar.

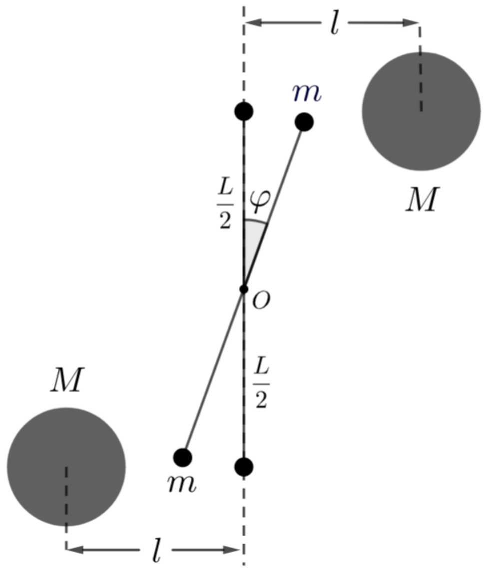
Questão 12. O experimento de Cavendish, realizado originalmente entre 1797 e 1798 por Henry Cavendish, foi o primeiro realizado em laboratório capaz de medir a força gravitacional entre massas. Apesar do valor da constante gravitacional (G) ser desconhecido na época de Cavendish, seu experimento permitiu determiná-lo com uma diferença menor que 1% do valor aceito atualmente. O experimento consistia de de uma balança de torção composta por uma haste leve de comprimento L com duas massas m nas extremidades, suspensa por um fio fixado ao seu centro (ponto O na figura). Duas esferas de massa M são então aproximadas das extremidades da haste, e fixadas a uma distância l. Como consequência, a haste é então defletida de um pequeno ângulo $\varphi \ll 1$ em relação à sua direção original (determinada pela linha tracejada na figura), o que ocasiona uma torção do fio, que exerce um torque restaurador $-\kappa\varphi$ na haste em relação ao ponto O, fazendo o sistema atingir uma nova posição de equilíbrio $\varphi = \varphi_0$. Vale que $\kappa l^3/mML^2 > G$. Caso precise, utilize a aproximação $(1+x)^n \approx 1 + nx$ para $|x| \ll 1$.

a) Determine, em função dos dados apresentados e de G, o ângulo de equilíbrio φ_0.

b) A haste é levemente perturbada dessa posição de equilíbrio. Determine o período de pequenas oscilações, em função de φ_0, M, l, L e G.

Solução:

a) Chame de d a distância entre m e M para um determinado ângulo φ de rotação. Como o ângulo é pequeno, a barra desvia muito pouco da vertical e podemos escrever que



$$d \approx l - \frac{L\varphi}{2}$$

Sendo assim, a força gravitacional sentida por cada uma das massas m é, em módulo:

$$F_G = \frac{GMm}{d^2} = \frac{GMm}{l^2}\left(1 - \frac{L\varphi}{2l}\right)^{-2} \approx \frac{GMm}{l^2}\left(1 + \frac{L\varphi}{l}\right)$$

Na última passagem, utilizamos a aproximação binomial $(1+x)^n \approx 1 + nx$, já que $\varphi \ll 1$. Note que nada foi informado acerca da ordem de grandeza de L comparado com l, então podemos assumir simplificadamente que isso não deve atrapalhar em nossa aproximação (o que poderia acontecer, por exemplo, se L fosse extremamente maior do que l). Com F_G, podemos obter o torque no ponto O aplicado pelas forças gravitacionais. Considerando o sentido horário como positivo para o torque, ele será dado por:

$$\tau_G = 2 \cdot F_G \cdot \frac{L}{2}\cos\varphi \approx \frac{GMmL}{l^2}\left(1 + \frac{L\varphi}{l}\right)$$

O fator 2 advém do torque provocado pela força em ambas as massas. Perceba também que utilizamos a aproximação $\cos\varphi \approx 1$ para ângulos pequenos.
Para a condição de equilíbrio $\varphi = \varphi_0$, o torque total deve ser nulo. Logo:

$$\tau = \tau_G - \kappa\varphi_0 = 0 \rightarrow \tau_G = \kappa\varphi_0$$

Substituindo τ_G:

$$\frac{GMmL}{l^2}\left(1 + \frac{L\varphi_0}{l}\right) = \kappa\varphi_0$$

Isolando:

$$\boxed{\varphi_0 = \frac{\frac{GMmL}{l^2}}{\kappa - \frac{GMmL^2}{l^3}} = \frac{\frac{L}{l}}{\frac{\kappa l^2}{GMmL} - 1}}$$

b) Agora, é necessário encontrar a equação de movimento da haste. Lembre-se da definição de torque total, que é essencialmente a 2ª Lei de Newton para rotações: $\tau = I\alpha$, sendo I o momento de inércia e α a aceleração angular. No nosso caso, o momento de inércia em relação ao ponto O é dado pela soma dos momentos de inércia das massas. Isto é:

$$I = 2 \cdot m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{2}$$

Sendo assim, retornando à equação do torque:

$$\tau = \tau_G - \kappa\varphi = \frac{mL^2}{2}\alpha$$

$$\frac{GMmL}{l^2}\left(1 + \frac{L\varphi}{l}\right) - \kappa\varphi = \frac{mL^2}{2}\alpha$$

$$\alpha = \frac{2GM}{Ll^2} - 2\left(\frac{\kappa}{mL^2} - \frac{GM}{l^3}\right)\varphi$$

Escrevendo em termos do desvio no ângulo de equilíbrio $\delta\varphi = \varphi - \varphi_0$, temos a familiar equação do movimento harmônico simples (MHS), na qual a aceleração (angular) é proporcional ao deslocamento do equilíbrio - nesse caso, o ângulo $\delta\varphi$ - :

$$\alpha = -\frac{2}{mL^2}\left(\kappa - \frac{GMmL^2}{l^3}\right)\delta\varphi$$

Da equação, identificamos facilmente a frequência angular das oscilações como:

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{mL^2}\left(\kappa - \frac{GMmL^2}{l^3}\right)}$$

Da condição de equilíbrio encontrada no item passado, temos $\kappa - \dfrac{GMmL^2}{l^3} = \dfrac{GMmL}{l^2\varphi_0}$. Substituindo:

$$\omega = \sqrt{\frac{2GM}{\varphi_0 Ll^2}}$$

Logo, encontramos, finalmente:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\varphi_0 Ll^2}{2GM}}}$$