SIMULADO NOIC
OLIMPÍADA BRASILEIRA DE FÍSICA
3ª Fase - 13 de novembro de 2021

Nível 3
Ensino Médio
3ª e 4ª séries

Escrito por Wanderson Faustino Patrício, Matheus Felipe R. Borges, Wesley Andrade e Ualype de Andrade

LEIA ATENTAMENTE AS INSTRUÇÕES:

1. Esta prova destina-se exclusivamente aos alunos dos **3ª e 4ª séries do nível médio.** Ela contém **oito** questões. Cada questão tem valor de 10 pontos e a prova um total de 80 pontos.

2. Todos os resultados numéricos devem ser expressos em unidades no Sistema Internacional e seguindo as instruções específicas da questão.

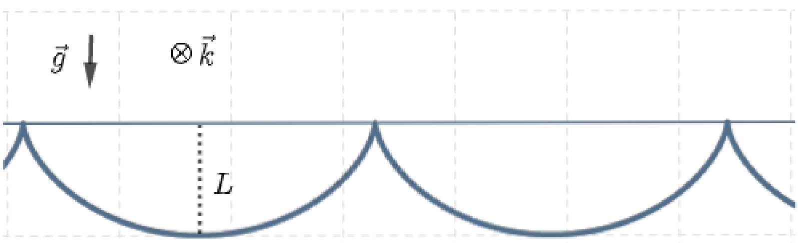
3. A duração máxima desta prova é de **quatro** horas.

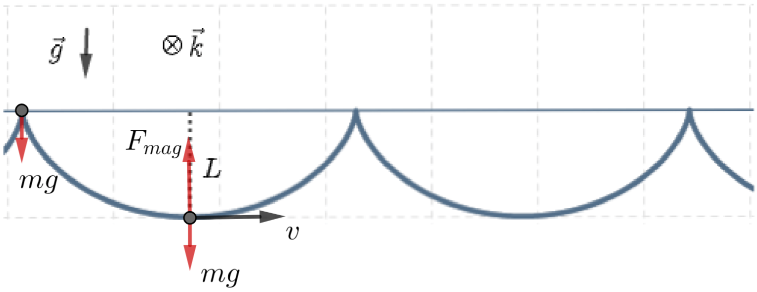
4. Se necessário, e a menos que indicado ao contrário, use: $\pi = 3,0$; $\sqrt{2} = 1,4$; $\sqrt{3} = 1,7$; $\sqrt{5} = 2,2$; $\operatorname{sen} 30° = 0,50$; $\cos 30° = 0,85$; aceleração gravitacional na superfície da terra $g = 10\,m/s^2$; constante gravitacional universal $G = 7,0 \times 10^{-11} m^3/(kg.s^2)$; calor específico da água líquida $c_a = 1,0\,cal/(g\,C)$; $1\,cal = 4,2\,J$; densidade da água líquida $\rho = 1,0\,g/cm^3$; velocidade da luz no vácuo $c = 3,0 \times 10^8\,m/s$; índice de refração do ar $n_{ar} = 1,0$

Questão 1. Efeito Blackett ou magnetismo gravitacional é uma hipótese inicialmente proposta pelo físico Arthur Schuster em uma tentativa de explicar como o campo magnético terrestre é gerado, mas em 1923 foi considerado inexistente por experimentos feitos por H. A. Wilson. A hipótese foi revivida em 1947 por Patrick Blackett, ganhador do nobel de física em 1948 por estudos nos campos da física nucelar e radiação cósmica, propondo que uma massa rotacionando pode gerar um campo magnético proporcional ao seu momento angular, esse é o chamado efeito Blackett. Esse efeito nunca foi totalmente aceito e o próprio Blackett considerou que foi refutado em 1950. Nesta questão consideraremos a existência de um campo gravitacional magnético $\vec{k}$, diferente do proposto por Blackett, que atua em massas de forma análoga a campos magnéticos em cargas elétricas, portanto, a força que atua em uma massa m com velocidade $\vec{v}$ devido um campo $\vec{k}$ é

$$\vec{F} = m(\vec{v} \times \vec{k})$$

Onde $\vec{v} \times \vec{k}$ é o produto vetorial entre $\vec{v}$ e $\vec{k}$. Considere que um corpo é liberado em uma região com gravidade g e um campo k perpendicular à g, a trajetória da partícula é mostrada na figura. Sabemos que o movimento vertical da massa é harmônico simples. Determine o deslocamento vertical máximo (L) da partícula.





Como foi dito no enunciado, o movimento da partícula na vertical é harmônico simples (MHS). Por isso, a aceleração - e consequentemente a força resultante - nos extremos tem mesmo módulo porém sentidos opostos

$$mg = -(mg - F_{mag})$$

$$F_{mag} = 2mg$$

A força magnética pode ser calculada usando a equação dada no enunciado:

$$F_{mag} = m(|\vec{v} \times \vec{k}|) = mkv$$

$$mkv = 2mg$$

$$v = \frac{2g}{k}$$

A velocidade na posição mais baixa pode ser calculada usando o teorema da energia cinética

$$W_{tot} = \Delta E_c$$

$$W_{peso} + W_{mag} = \Delta E_c$$

A força magnética não realiza trabalho sobre a partícula, visto que é sempre perpendicular à velocidade.

$$W_{mag} = 0$$

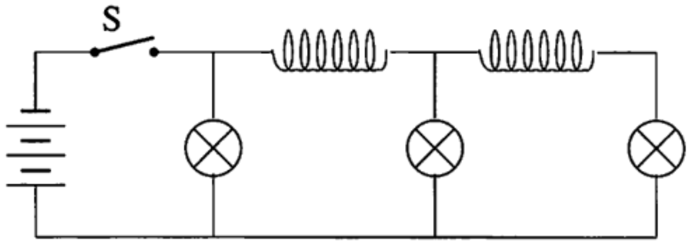
Portanto

$$W_{peso} = mgL = \frac{mv^2}{2}$$

$$gL = \frac{4g^2}{2k^2}$$

$$\boxed{L = \frac{2g}{k^2}}$$

Questão 2. Podemos interpretar o indutor como um elemento de circuito que se opões à variação de corrente. Para uma variação pequena de corrente ΔI em um tempo infinitesimal Δt, a voltagem que ele gera é dada por $V = -L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$, onde L é uma constante que chamamos de indutância. Veja que o sinal negativo representa a resistência que o indutor exerce à variação da corrente, evitando mudanças bruscas na mesma. Assim, considere o circuito mostrado na figura a seguir, consistindo de 3 lâmpadas idênticas e dois indutores, que está conectado a uma fonte de corrente contínua. A resistência ôhmica de cada indutor é desprezível.



Após algum tempo, a chave S é aberta. Qual é a razão entre o brilho da lâmpada mais à esquerda com o da lâmpada mais à direita imediatamente após a abertura da chave?

Solução:

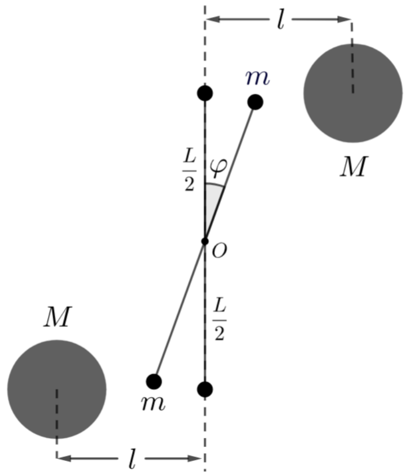
Como o indutor é um elemento que se opõe à variação de corrente, imediatamente após a abertura tem-se que a corrente nele vai se manter constante. Ou seja, chamando o primeiro indutor de 1 e o segundo de 2, temos que $I_1 = 2I$ e $I_2 = I$, considerando que antes chegava uma corrente $3I$ no sistema. Assim, após a abertura da chave, a lâmpada do meio e a da direita vão continuar recebendo uma corrente I, como antes, mas a da esquerda vai passar a receber a mesma corrente I_1 dada por $2I$. Portanto, como $P \propto I^2$, tem-se que

$$\boxed{P_1 : P_2 : P_3 = 4 : 1 : 1}$$

Questão 3. O experimento de Cavendish, realizado originalmente entre 1797 e 1798 por Henry Cavendish, foi o primeiro realizado em laboratório capaz de medir a força gravitacional entre massas. Apesar do valor da constante gravitacional (G) ser desconhecido na época de Cavendish, seu experimento permitiu determiná-lo com uma diferença menor que 1% do valor aceito atualmente. O experimento consistia de de uma balança de torção composta por uma haste leve de comprimento L com duas massas m nas extremidades, suspensa por um fio fixado ao seu centro (ponto O na figura). Duas esferas de massa M são então aproximadas das extremidades da haste, e fixadas a uma distância l. Como consequência, a haste é então defletida de um pequeno ângulo $\varphi \ll 1$ em relação à sua direção original (determinada pela linha tracejada na figura), o que ocasiona uma torção do fio, que exerce um torque restaurador $-\kappa\varphi$ na haste em relação ao ponto O, fazendo o sistema atingir uma nova posição de equilíbrio $\varphi = \varphi_0$. Vale que $\kappa l^3/mML^2 > G$. Caso precise, utilize a aproximação $(1+x)^n \approx 1 + nx$ para $|x| \ll 1$.

a) Determine, em função dos dados apresentados e de G, o ângulo de equilíbrio φ_0.

b) A haste é levemente perturbada dessa posição de equilíbrio. Determine o período de pequenas oscilações, em função de φ_0, M, l, L e G.



Solução:

a) Chame de d a distância entre m e M para um determinado ângulo φ de rotação. Como o ângulo é pequeno, a barra desvia muito pouco da vertical e podemos escrever que

$$d \approx l - \frac{L\varphi}{2}$$

Sendo assim, a força gravitacional sentida por cada uma das massas m é, em módulo:

$$F_G = \frac{GMm}{d^2} = \frac{GMm}{l^2}\left(1 - \frac{L\varphi}{2l}\right)^{-2} \approx \frac{GMm}{l^2}\left(1 + \frac{L\varphi}{l}\right)$$

Na última passagem, utilizamos a aproximação binomial $(1+x)^n \approx 1 + nx$, já que $\varphi \ll 1$. Note que nada foi informado acerca da ordem de grandeza de L comparado com l, então podemos assumir simplificadamente que isso não deve atrapalhar em nossa aproximação (o que poderia acontecer, por exemplo, se L fosse extremamente maior do que l). Com F_G, podemos obter o torque no ponto O aplicado pelas forças gravitacionais. Considerando o sentido horário como positivo para o torque, ele será dado por:

$$\tau_G = 2 \cdot F_G \cdot \frac{L}{2}\cos\varphi \approx \frac{GMmL}{l^2}\left(1 + \frac{L\varphi}{l}\right)$$

O fator 2 advém do torque provocado pela força em ambas as massas. Perceba também que utilizamos a aproximação $\cos\varphi \approx 1$ para ângulos pequenos.

Para a condição de equilíbrio $\varphi = \varphi_0$, o torque total deve ser nulo. Logo:

$$\tau = \tau_G - \kappa\varphi_0 = 0 \rightarrow \tau_G = \kappa\varphi_0$$

Substituindo τ_G:

$$\frac{GMmL}{l^2}\left(1 + \frac{L\varphi_0}{l}\right) = \kappa\varphi_0$$

Isolando:

$$\boxed{\varphi_0 = \frac{\frac{GMmL}{l^2}}{\kappa - \frac{GMmL^2}{l^3}} = \frac{\frac{L}{l}}{\frac{\kappa l^2}{GMmL} - 1}}$$

b) Agora, é necessário encontrar a equação de movimento da haste. Lembre-se da definição de torque total, que é essencialmente a 2ª Lei de Newton para rotações: $\tau = I\alpha$, sendo I o momento de inércia e α a aceleração angular. No nosso caso, o momento de inércia em relação ao ponto O é dado pela soma dos momentos de inércia das massas. Isto é:

$$I = 2 \cdot m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{2}$$

Sendo assim, retornando à equação do torque:

$$\tau = \tau_G - \kappa\varphi = \frac{mL^2}{2}\alpha$$

$$\frac{GMmL}{l^2}\left(1 + \frac{L\varphi}{l}\right) - \kappa\varphi = \frac{mL^2}{2}\alpha$$

$$\alpha = \frac{2GM}{Ll^2} - 2\left(\frac{\kappa}{mL^2} - \frac{GM}{l^3}\right)\varphi$$

Escrevendo em termos do desvio no ângulo de equilíbrio $\delta\varphi = \varphi - \varphi_0$, temos a familiar equação do movimento harmônico simples (MHS), na qual a aceleração (angular) é proporcional ao deslocamento do equilíbrio - nesse caso, o ângulo $\delta\varphi$ - :

$$\alpha = -\frac{2}{mL^2}\left(\kappa - \frac{GMmL^2}{l^3}\right)\delta\varphi$$

Da equação, identificamos facilmente a frequência angular das oscilações como:

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{mL^2}\left(\kappa - \frac{GMmL^2}{l^3}\right)}$$

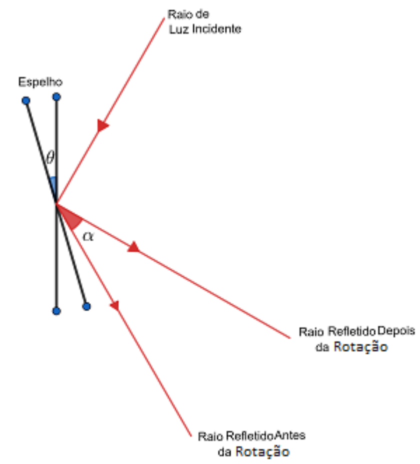
Da condição de equilíbrio encontrada no item passado, temos $\kappa - \frac{GMmL^2}{l^3} = \frac{GMmL}{l^2\varphi_0}$. Substituindo:

$$\omega = \sqrt{\frac{2GM}{\varphi_0 Ll^2}}$$

Logo, encontramos, finalmente:

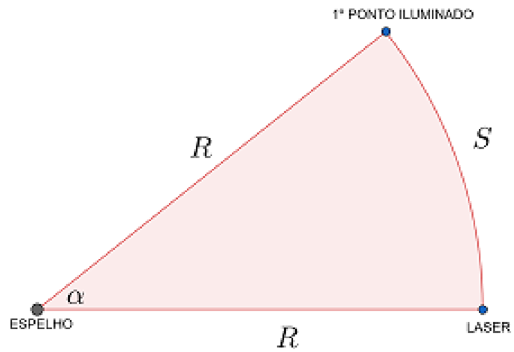
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\varphi_0 Ll^2}{2GM}}}$$

Questão 4. Espelhos são muito utilizados durante o nosso dia a dia. Desde o simples ato de pentear o cabelo pela manhã a observação de estrelas em um telescópio, várias ações do cotidiano são totalmente dependentes da utilização de espelhos. Com o intuito de calcular a velocidade da luz no ar, um estudante utiliza um aparato com um espelho plano giratório. O estudante faz incidir uma luz monocromática no espelho, e observa como a rotação do espelho altera a trajetória do raio de luz refletido.



a) Se o espelho gira com velocidade angular ω, e após um tempo t rotacionou um ângulo θ, qual será a deflexão angular α que o raio de luz refletido sofrerá? Expresse sua resposta em função de ω e t

b) Esse aparato é posto dentro de um sensor em formato de circunferência. Em um determinado ponto desse sensor há um laser emitindo luz em direção ao espelho. Num primeiro instante, o espelho está ajustado para que a luz do laser retorne a este sem sofrer deflexão. Inicialmente tanto o laser quanto o motor do espelho estão desligados. Em $t = 0$ o laser e o motor são ligados simultaneamente. Sabendo que o primeiro ponto iluminado no sensor está a uma distância S do laser (medido no perímetro da circunferência), qual é o valor da velocidade da luz no ambiente do experimento?



Dados:

- Velocidade angular do espelho: $\omega = 7\, rad/s$
- Raio do sensor: $R = 1\, km$
- Distância entre o laser e o 1º ponto iluminado: $S = 5\, cm$

c) Caso o experimento fosse realizado na água ($n_{ag} = 4/3$) a distância S seria quanto?

Solução:

a) Perceba que como o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, o ângulo total entre os raios será o dobro do de incidência. Logo, se o espelho gira um ângulo θ o ângulo de incidência diminuiu θ, portanto, o ângulo entre os raios diminuiu 2θ.

$$\alpha = 2\theta$$

$$\boxed{\alpha = 2\omega t}$$

b) O tempo para o raio chegar ao espelho será:

$$t = \frac{R}{v}$$

O ângulo girado pelo espelho será (considerando v a velocidade da luz no meio):

$$\alpha = 2\omega t = 2\omega \cdot \frac{R}{v}$$

Pela relação dos ângulos:

$$\alpha = \frac{S}{R}$$

$$2\omega \frac{R}{v} = \frac{S}{R}$$

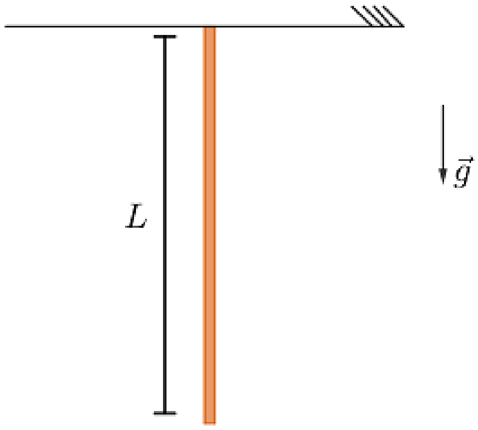
$$\boxed{v = \frac{2\omega R^2}{S} = 2,8 \cdot 10^8 \, m/s}$$

c) Considerando c a velocidade da luz no vácuo:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{2\omega R^2}{S}$$

$$\boxed{S = \frac{2n\omega R^2}{c} = 6,2 \, cm}$$

Questão 5. Considere uma corda homogênea de comprimento $L = 10\,m$ e massa $m = 2\,kg$, presa ao teto de uma sala, em um ambiente em que a aceleração da gravidade tem módulo $g = 10\,m/s^2$.



No instante $t = 0$ um pulso de onda é formado na extremidade livre da corda. Esse pulso sobe a corda até encostar no teto.

a) Qual é o módulo da força de tração na corda a uma altura y, medida a partir da extremidade livre?

b) Qual a velocidade do pulso a essa altura?

c) Quanto tempo levará para que o pulso atinja o teto da sala?

Solução:

a) A tração a altura y terá que suportar apenas o peso da corda que está abaixo daquela altura.

$$T(y) = m(y) \cdot g$$

Como a corda é homogênea:

$$\frac{m}{L} = \frac{m(y)}{y} \Longleftrightarrow m(y) = \frac{m}{L} \cdot y$$

$$\boxed{T(y) = \frac{mg}{L} \cdot y}$$

b) A velocidade de um pulso em uma corda sujeita a uma tração T é:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Em que μ é a densidade linear de massa.
Portanto:

$$v(y) = \sqrt{\frac{T(y)}{\mu}} = \sqrt{\frac{\frac{mg}{L} \cdot y}{\frac{m}{L}}}$$

$$\boxed{v(y) = \sqrt{gy}}$$

c) Elevando ambos os membros do resultado do item anterior temos:

$$v^2 = gy \iff v^2 = 0^2 + 2 \cdot \left(\frac{g}{2}\right) y$$

Percebemos que a equação anterior é análoga à Equação de Torricelli para o movimento uniformemente acelerado. Daí, vemos que o pulso sobe com aceleração constante e igual a $\frac{g}{2}$.

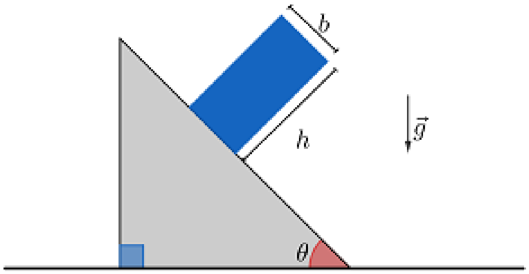
Aplicando na equação horária da posição:

$$y = y(0) + v(0) \cdot t + \frac{1}{2}\frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$L = \frac{gt^2}{4} \iff$$

$$\boxed{t = 2\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\,s}$$

Questão 6. Um corpo em formato de paralelepípedo, com uma face quadrada de lado $b = 50cm$ e aresta de comprimento $h = 1m$ é posto em cima de um plano inclinado.



O ângulo de abertura do plano começa a aumentar a partir de $\theta = 0$.

Sabendo que o coeficiente de atrito entre a caixa e o plano é $\mu = 0,75$, o que acontece primeiro: o deslizamento ou o tombamento da caixa?

Solução: i) Analisando a condição de deslizamento: Para que o corpo deslize a força peso na direção do plano deve superar a força de atrito máxima:

$$P_x \geq F_{at_{max}}$$

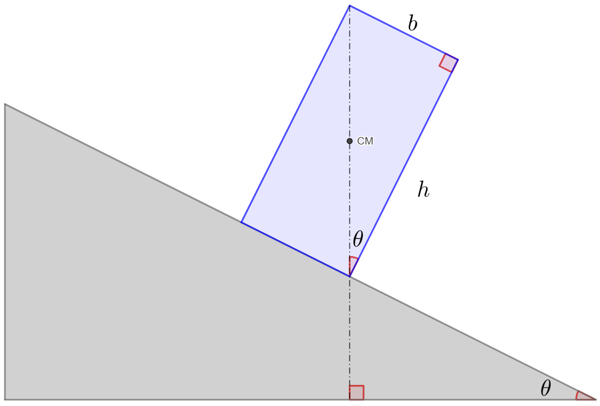
$$mg\sin\theta \geq \mu N$$

$$mg\sin\theta \geq \mu mg\cos\theta$$

$$\tan\theta \geq \mu$$

$$\tan(\theta_{desl}) = 0,75 \quad (*)$$

ii) Analisando a condição de tombamento: Para que o corpo tombe, o seu centro de massa deve estar fora da área de contato entre o corpo e o chão. Na condição de iminência de tombar, o centro de massa estará alinhado com a quina.



$$\tan(\theta) = \frac{b}{h}$$

$$\tan(\theta_{tomb}) = 0,5 \quad (**)$$

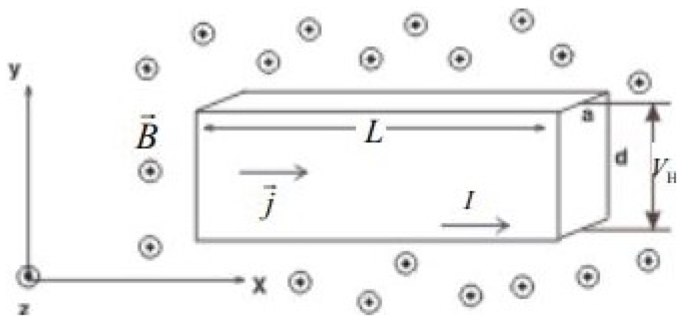
De $(*)$ e $(**)$ temos:

$$\tan(\theta_{tomb}) < \tan(\theta_{desl}) \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta_{tomb} < \theta_{desl}}$$

O corpo tomba antes de começar a deslizar.

Questão 7. Muitos carros hoje estão equipados com sensores de velocidade baseados no Efeito Hall. O sensor Hall, localizado na carroceria próximo da roda, consiste de uma chapinha de material semicondutor através da qual passa uma corrente I, montada em frente a um ímã que produz um campo magnético aproximadamente uniforme de magnitude B. Como resultado, é gerado um sinal de tensão transversal de magnitude V_H (tensão Hall).



a) Considere uma chapinha semicondutora de largura $d = 1,0\,cm$, espessura $a = 250\,\mu m$ e comprimento $L = 1,0\,cm$, situada em um campo magnético uniforme de módulo $B = 0,1\,T$ e por onde passa uma corrente $I = 16\,mA$. Supondo que essa corrente seja devido a portadores de carga $q = 1,6 \cdot 10^{-19}\,C$, de densidade $n = 10^{19}\,cm^{-3}$, calcule, em m/s, a velocidade desses portadores de carga.

b) Calcule, em volts, o valor da voltagem Hall V_H que deve ser gerada entre o plano superior e inferior da chapinha para compensar o efeito do campo magnético sobre os portadores de carga.

Solução:

a) Durante um intervalo de tempo Δt, digamos que as cargas se movem de Δx. Então, a corrente é dada por:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Para encontrar a quantidade de carga Δq atravessando a seção de comprimento Δx nesse intervalo de tempo, devemos multiplicar a densidade numérica pelo volume da região e pela carga individual de carga portador:

$$\Delta q = n \cdot da\Delta x \cdot q = nda\Delta xq$$

Então:

$$I = nda \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot q = ndavq \Longrightarrow \boxed{v = \frac{I}{ndaq}}$$

Assim, substituindo, temos que

$$\boxed{v = 0,004 \text{ m/s}}$$

b) Para compensar o efeito magnético, deve-se ter $F_e = F_m$. Ou seja,

$$qE_H = qvB \Rightarrow E_H = vB \tag{1}$$

Portanto, $V_H = E_H \cdot d = vBd$. Então,

$$\boxed{V_H = 8 \text{ mV}}$$

Questão 8. Quando o ar no fundo de um recipiente é aquecido, ele se torna menos denso que o ar ao seu redor e sobe. Simultaneamente, o ar mais frio cai para baixo. Este processo de transferência de calor para cima é conhecido como convecção, e é extremamente importante no estudo de interiores estelares. Para modelar simplificadamente esse fenômeno, considere uma caixa fechada em formato de paralelepípedo de altura h, localizada em uma mesa horizontal. A caixa está cheia de ar com temperatura uniforme T_0. Em seguida, suponha que o fundo da caixa seja aquecido de modo que o ar próximo à base alcance instantaneamente a temperatura $T_0 + \Delta T$. Devido a isso, uma pequena parcela de ar quente na parte inferior começa a subir a partir do repouso - de forma praticamente isotérmica - até atingir o topo da caixa, onde sua temperatura é instantaneamente reduzida para T_0. Determine, em função de g, h, T_0 e ΔT, o tempo necessário para a parcela ascender ao topo. Considere que o ar é um gás ideal e que a altura h é pequena o suficiente para que a pressão e a densidade do ar variem muito pouco ao longo do recipiente. Negligencie transferências de calor e atrito entre a parcela de ar e o ar que a circunda.

Solução:

Primeiramente, vamos escrever a equação de movimento da parcela. Note que o movimento ascendente é ocasionado pela resultante entre as duas forças atuantes: o empuxo e seu peso. Sendo assim, pela 2ª Lei de Newton:

$$E - mg = ma$$

Chamando a densidade da parcela de ρ e a do ar circundante de ρ_0:

$$\rho_0 V g - \rho V g = \rho V a \rightarrow a = \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right) g$$

Agora, escrevamos ρ_0 e ρ em função dos parâmetros do problema. Como ambos ar e parcela podem ser tratados como gases ideais, temos, pela equação de Clapeyron para a densidade de um gás ideal:

$$\rho_0 = \frac{P\mu}{RT_0} \quad (ar) \qquad\qquad \rho = \frac{P\mu}{R\left(T_0 + \Delta T\right)} \quad (parcela)$$

Em que μ é a massa molar do ar, a qual é irrelevante para este problema. Note que assumimos válido o equilíbrio mecânico da parcela com o ar, i.e. a pressão P da parcela é a mesma do ar circundante. Note que, como a pressão e a densidade variam muito pouco ao longo do recipiente, elas podem ser consideradas essencialmente constantes, utilizamos a temperatura da parcela como $T_0 + \Delta T$ durante todo o movimento de subida. Dividindo as equações e substituindo o resultado na aceleração, temos:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 + \frac{\Delta T}{T_0} \rightarrow a = \frac{g\Delta T}{T_0}$$

Portanto, o movimento da parcela é uniformemente acelerado. Sendo assim, o tempo necessário, a partir do repouso, para esta percorrer uma distância h e subir ao topo é dado por:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} \implies \boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g}\frac{T_0}{\Delta T}}}$$