SIMULADO NOIC
OLIMPÍADA BRASILEIRA DE FÍSICA
3ª Fase - 4 de fevereiro de 2023

Nível 1
Ensino Fundamental
8º e 9º anos

Escrito por Akira Ito, Gabriel Hemétrio, Lucas Tavares, Vitória Bezerra, Rafael Ribeiro, Matheus Felipe R. Borges, e Ualype de Andrade

LEIA ATENTAMENTE AS INSTRUÇÕES:

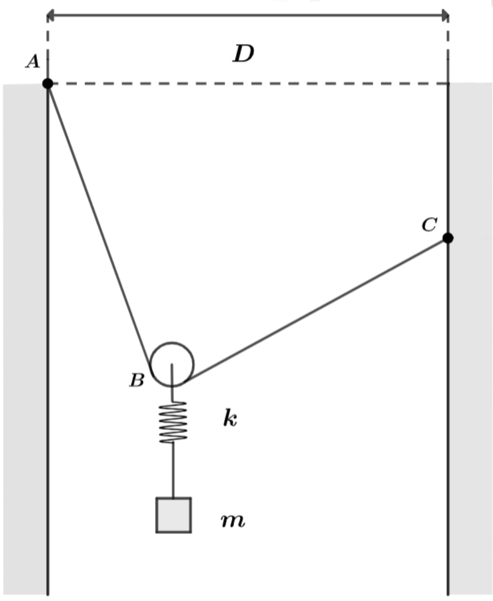
1. Esta prova destina-se exclusivamente aos alunos dos **8ª e 9º anos do nível fundamental.** Ela contém **oito** questões. Cada questão tem valor de 10 pontos e a prova um total de 80 pontos.

2. Todos os resultados numéricos devem ser expressos em unidades no Sistema Internacional e seguindo as instruções específicas da questão.

3. A duração máxima desta prova é de **quatro** horas.

4. Se necessário, e a menos que indicado ao contrário, use: $\pi = 3,0$; $\sqrt{2} = 1,4$; $\sqrt{3} = 1,7$; $\sqrt{5} = 2,2$; $\text{sen}\,30° = 0,50$; $\cos 30° = 0,85$; $\text{sen}\,45° = \cos 45° = 0,70$; aceleração gravitacional na superfície da terra $g = 10\,\text{m/s}^2$; calor específico da água líquida $c_a = 1\,\text{cal}/(\text{g}\,°\text{C})$; calor latente de fusão do gelo $L = 80\,\text{cal/g}$; $1\,\text{cal} = 4,2\,\text{J}$.

Questão 1. Um fio inextensível e de massa desprezível possui $L = 40,0\,\text{m}$ de comprimento. Suas extremidades A e C são presas a dois pontos de paredes paralelas, distantes $D = 20,0\,\text{m}$. A tração no fio tem intensidade de $500\,\text{N}$. O fio passa por uma polia ideal que sustenta, através de uma mola ideal de constante elástica $k = 1,00 \times 10^3\,\text{N/m}$, um corpo de massa m desconhecida. A configuração do equilíbrio está representada na figura a seguir.

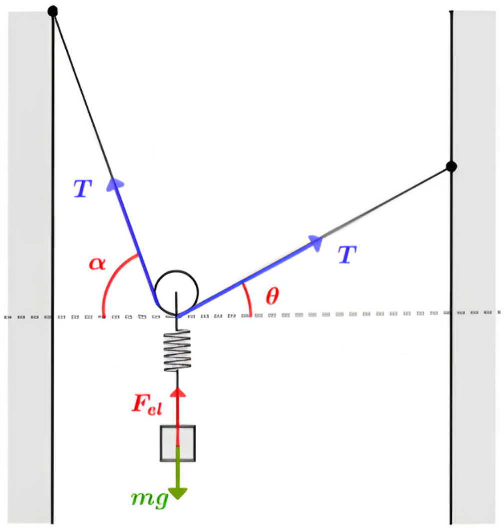


a) Determine o ângulo (em graus) formado entre as partes AB e BC do fio.

b) Determine a elongação da mola Δx e a massa m do corpo.

Solução:

a) Na figura abaixo, estão esquematizadas as forças, ângulos, e distâncias relevantes na solução. Primeiramente, sabe-se que a força de tração em um fio ideal se distribui de forma constante por toda a extensão deste fio. Denota-se por T a força de tração no fio, F_{el} a força elástica da mola e mg o peso da massa.



Como a polia está em equilíbrio, a força resultante atuando sobre ela na horizontal deve ser zero. Dessa forma,

$$T\cos\alpha = T\cos\theta$$

$$\cos\alpha = \cos\theta \tag{1}$$

Logo, temos:

$$\alpha = \theta$$

Agora, da figura mostrada, veja que:

$$AB\cos\alpha + BC\cos\theta = D$$

Da equação 1, então, temos:

$$(AB + BC)\cos\alpha = D$$

Note que $AB + BC = L$. Logo:

$$\cos\alpha = \frac{D}{L} = \frac{1}{2}$$

Portanto, temos que $\alpha = \theta = 60°$. Chamando-se o ângulo formado entre as partes AB e BC de Ω, veja que:

$$\alpha + \Omega + \theta = 180°$$

$$\Omega = 180^\circ - 2\alpha$$

Por fim:

$$\boxed{\Omega = 60,0^\circ}$$

b) Ao analisar o equilíbrio das forças na polia ideal na direção vertical:

$$F_{el} = T \operatorname{sen} \alpha + T \operatorname{sen} \theta = 2T \operatorname{sen} \alpha$$

Da Lei de Hooke:

$$k\Delta x = T\sqrt{3}$$

Note que, na linha passada, usamos $\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{3}/2$. Substituindo os valores, temos:

$$\Delta x = \frac{500 \times 1,7}{1,00 \times 10^3}\,\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta x = 0,850\,\mathrm{m}}$$

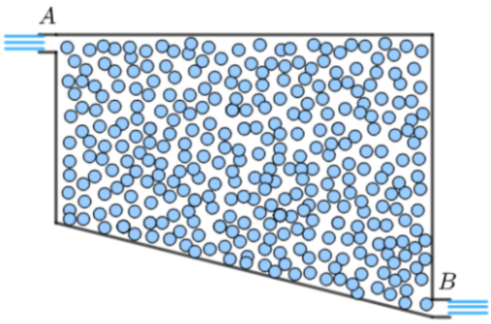
Agora, equacionando o equilíbrio de forças na massa m:

$$F_{el} = mg$$
$$2T \operatorname{sen} \alpha = T\sqrt{3} = mg$$

Novamente, substituindo os valores:

$$\boxed{m = 85,0\,\mathrm{kg}}$$

Questão 2. Um contêiner especial, tendo um fundo de inclinação constante, possui uma entrada em A e uma saída em B. O recipiente contém uma grande quantidade de gelo a $T_0 = 0,00°$ C. Pela entrada em A, Papeus Philip libera um jato d'água a uma temperatura $T_A = 28,0°$ C e com vazão constante de $r_A = 3,00$ g/s (gramas por segundo). Os espaços entre as pedras de gelo permitem que a água flua normalmente (sem obstruções) até a saída em B. A saída de água é mais larga que a entrada para evitar o acúmulo de água no contêiner. Além disso, as paredes do contêiner podem ser consideradas adiabáticas. Lula Maveres, amigo de Papeus, verifica que a água atravessando a saída do contêiner em B possui temperatura $T_B = 1,00°$ C. Sabendo disso, calcule a vazão r_B, em g/s, da água na saída.



Solução: Devemos primeiramente entender a física envolvida quando a água entra no contêiner. O jato de água incidente, em contato com o gelo, cede calor à ele e faz uma parte fundir e tornar-se água líquida (como a quantidade de gelo é muito grande, podemos assumir que há gelo suficiente para que o processo dure um tempo consideravelmente longo). Assim, o jato de água resultante na saída–cuja temperatura será menor que a do de entrada–será composto pela água incidente em A e pelo gelo que virou água. Agora, equacionemos a situação.

Chame de Δm_A a massa de água que entrou no contêiner durante um pequeno intervalo de tempo Δt, de forma que $r_A = \Delta m_A/\Delta t$. Chame de Δm_G a massa de gelo que derrete em consequência da interação com a massa de água. Como as paredes do recipiente são adiabáticas, a soma dos calores totais envolvidos no processo será nulo. Sendo assim:

$$\Delta Q = \Delta m_A c_a (T_B - T_A) + \Delta m_G L + \Delta m_G c_a (T_B - T_0) = 0$$

Aqui, consideramos o calor sensível perdido pela água ao resfriar, aquele recebido pelo gelo ao fundir e do aquecimento do gelo que tornou-se água líquida. Note que a temperatura final do conjunto é a do jato de saída, T_B. Prosseguindo, isolamos Δm_G:

$$\Delta m_g = \left[\frac{c_a(T_A - T_B)}{L + c_a(T - T_0}\right] \Delta m_A$$

Sendo Δm_B a massa de água que atravessa a saída em B durante um intervalo Δt, temos, por conservação da massa:

$$\Delta m_B = \Delta m_A + \Delta m_G = \left[\frac{L + c_a(T_A - T_0)}{L + c_a(T_B - T_0)}\right] \Delta m_A$$

Para encontrar $r_B = \Delta m_B/\Delta t$, basta então dividir por Δt em ambos os lados:

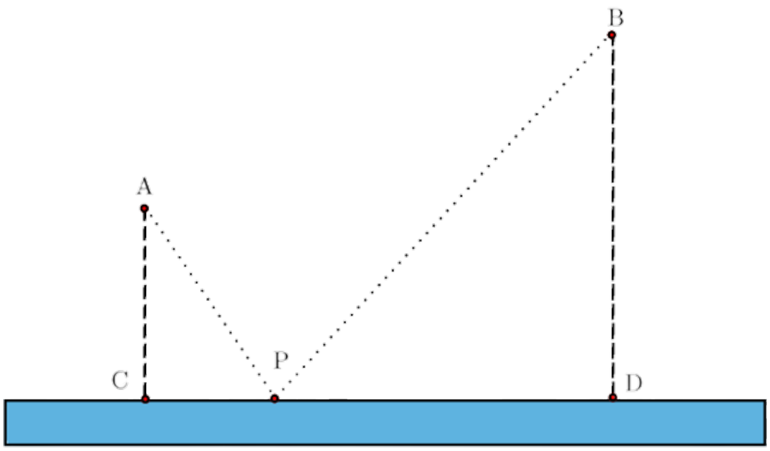
$$\boxed{r_B = \left[\frac{L + c(T_A - T_0)}{L + c(T_B - T_0)}\right] r_A = 4 \text{ g/s}}$$

Questão 3. O fazendeiro Ítalo estava caminhando em sua propriedade e, quando estava no ponto A, avistou sua vaquinha preferida, Hemétria, no ponto B. Hemétria contou para Ítalo que estava desidratada e precisava beber água o mais rápido possível. Para cumprir essa tarefa, Ítalo precisa correr em direção ao rio (em algum ponto P) para pegar a água e depois ir até o ponto B. No entanto, existem vários caminhos possíveis e Ítalo não sabe o que fazer. Por sorte, você estava por perto! Responda os itens a seguir para garantir que Hemétria não morra de sede.

Ao longo do problema use as distâncias: $AC = 0,4\,\text{km}$, $BD = 0,8\,\text{km}$, $CD = 0,5\,\text{km}$. A velocidade do fazendeiro Ítalo possui módulo constante de $v = 1,0\,\text{m/s}$.

a) Qual deve ser o valor da distância CP, em km tal que o tempo do trajeto de Ítalo de A a B seja o menor possível?

b) Sendo satisfeita a condição do item passado, determine o tempo gasto, em minutos, por Ítalo em seu trajeto.

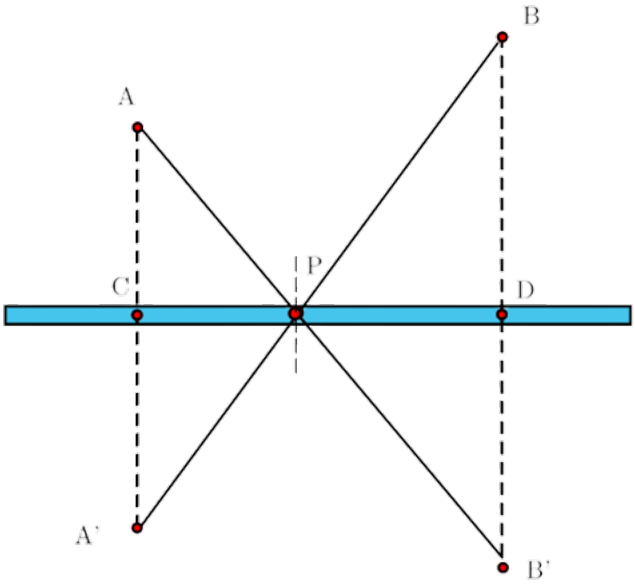


Solução:

a) Existem duas principais soluções para esse problema: a solução do matemático e a solução do físico. O matemático vai construir uma função $f(x)$ que calcula o caminho total percorrido e depois vai utilizar uma técnica para minimizar o tempo necessário (uma solução simples mas bastante mecânica e sem animação). Já a solução do físico utiliza um princípio físico elegantíssimo e um fato geométrico elementar (uma solução brilhante e muito mais emocionante). Vamos ver apenas a segunda pois a primeira envolve assuntos matemáticos que vão além do ensino fundamental.

A principal dificuldade da questão é que o melhor caminho entre Ítalo e Hemétria não é bem definido e não há nenhuma maneira óbvia de escolher um. Porém, um fato que é certo é que, se Ítalo e Hemétria estivessem em lados opostos do rio, a escolha seria trivial. Se eles estivessem em margens opostas, bastava Ítalo ir em uma linha reta até Hemétria (afinal ele passaria pelo rio no meio do trajeto e o menor caminho entre dois pontos é uma linha reta).

Agora, imagine que, do outro lado do rio, há um outro fazendeiro e uma outra vaca (digamos, anti-Ítalo e anti-Hemétria) e eles estão sofrendo a mesma situação que Ítalo e Hemétria. Ou seja, anti-Ítalo precisa pegar um balde de água no rio e dar para anti-Hemétria.



Como a situação é perfeitamente simétrica (imagine que o rio representa um espelho plano, por exemplo), podemos imaginar que os fazendeiros decidem se ajudar, de forma que o Ítalo dá água para a anti-Hemétria, e o anti-Ítalo dá a água para Hemétria (fazendo dois caminhos que se cruzam, conforme ilustra a figura).

Note como situação é exatamente a mesma que foi comentada no começo da solução.

Note que, devido à simetria, os triângulos ACP e A'CP são iguais, assim como BPD e B'PD. Podemos fazer uma simples semelhança de triângulos. Sendo $CP = x$:

$$\frac{AA'}{CP} = \frac{BB'}{PD}$$

Mas $AA' = 0,8\,km$, $BB' = 1,6\,km$, $CD = 0,5\,km$ e $CP = x$.

$$\frac{0,8}{x} = \frac{1,6}{0,5 - x}$$

Resolvendo a equação, obtemos:

$$\boxed{x = \frac{1}{6} \approx 0,17\,\text{km}}$$

b) Agora basta calcular a hipotenusa do triângulo BA'B' para encontrar o caminho total percorrido d:

$$d = \sqrt{1,2^2 + 0,5^2} = 1,3\,\text{km}$$

Logo:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{1300}{1,0}\,s$$

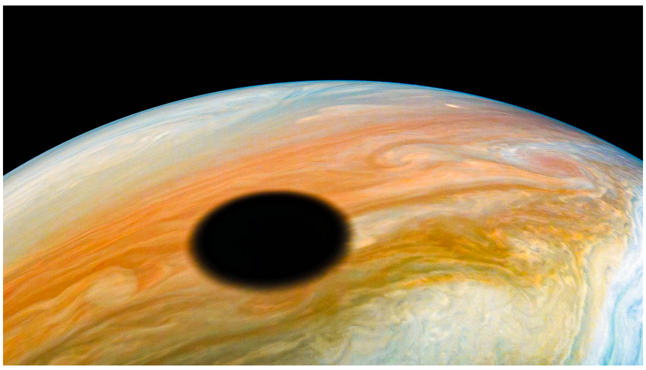
O fazendeiro leva $t = 1300\,s$ para percorrer o trajeto. Dividindo por 60, encontramos o tempo em minutos:

$$\boxed{t = 21,7 \approx 22\,\text{min}}$$

Questão 4. Em 12 de setembro de 2019, a sonda Juno da NASA capturou uma foto (mostrada abaixo) intrigante do planeta Júpiter (Créditos: NASA/JPL-Caltech), na qual é possível ver uma enorme mancha escura na superfície do planeta. Essa mancha é, na verdade, a sombra de Io–um dos satélites naturais de Júpiter–projetada na superfície do gigante gasoso, evento observável quando o satélite passa entre Júpiter e o Sol (trânsito de sombra). Sabe-se que, devido a efeitos de maré, a distância entre Io e Júpiter aumenta lentamente. Eventualmente, essa distância poderá se tornar suficientemente grande para que os trânsitos de sombra não ocorram mais. Assuma, neste problema, que todas as órbitas envolvidas são circulares e coplanares. O diâmetro de Io vale $D_{Io} = 3,60 \times 10^3\,\text{km}$, sua distância até Júpiter $d_{IJ} = 4,20 \times 10^5\,\text{km}$, e seu período orbital é de $T = 42,0\,\text{h}$. O diâmetro de Júpiter vale $D_J = 1,40 \times 10^5\,\text{km}$ e a sua distância ao Sol é de $d_{JS} = 7,80 \times 10^8\,\text{km}$. O diâmetro do Sol é $D_S = 1,40 \times 10^6\,\text{km}$.

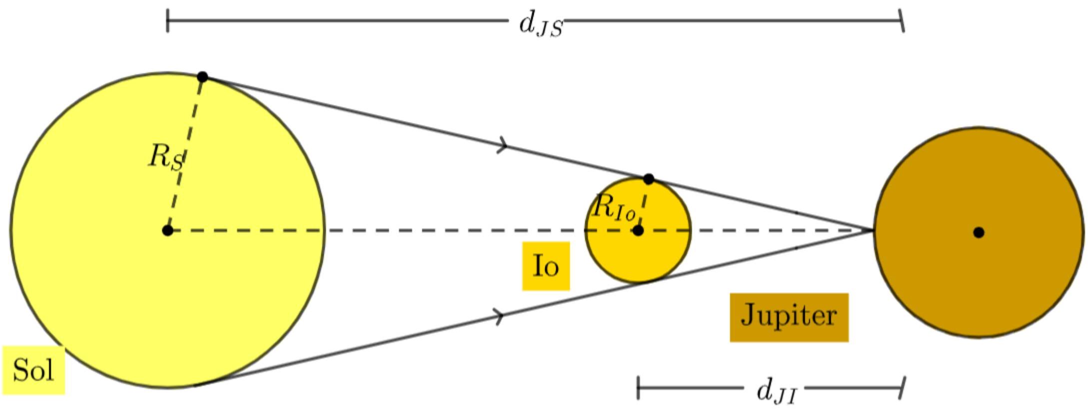
a) Esquematize o Sol, Io, Júpiter e os raios de luz provenientes do Sol na situação hipotética em que a distância Io-Júpiter é aquela acima da qual não se poderia mais observar a sombra do satélite na superfície de Júpiter.

b) Na situação do item passado, qual deveria ser o novo período orbital, em horas, de Io em torno de Júpiter?



Solução:

a) Podemos realizar a representação abaixo:



b) Chame de d_{JI} a distância Io-Júpiter no caso limite representado no item a). Utilizando uma simples semelhança de triângulos baseada na representação acima, temos que:

$$\frac{d_{JI}}{R_{Io}} = \frac{d_{JS}}{R_S}$$

$$d_{JI} = \frac{R_{Io} d_{JS}}{R_S} = \frac{D_{Io} d_{JS}}{D_S}$$

Note que desprezamos o raio de Júpiter em relação à distância Júpiter-Sol. Como sugerido pelo enunciado, vamos assumir que a órbita de Io se mantém circular. Agora que temos a nova distância entre Io e Júpiter, podemos utilizar a Terceira Lei de Kepler para obter o novo período T'. Logo:

$$\frac{T^2}{d^3} = cte$$

$$\frac{T^2}{d_{IJ}^3} = \frac{T'^2}{d_{JI}^3}$$

$$T' = \left(\frac{D_{Io} d_{JS}}{D_S d_{IJ}}\right)^{3/2} T$$

Substituindo os valores numéricos:

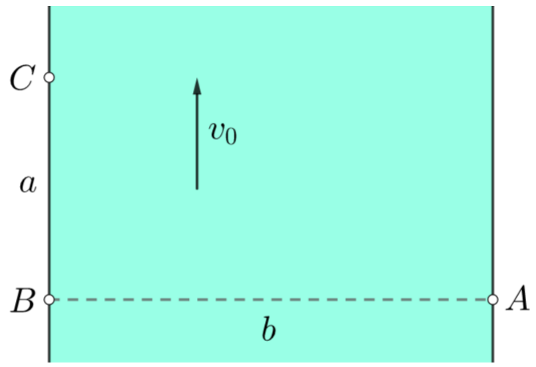
$$T' = \left(\frac{3,60 \times 10^3 \times 7,80 \times 10^8}{4,20 \times 10^5 \times 1,40 \times 10^6}\right)^{3/2} \times 42,0\,\text{h} \approx (5)^{3/2} \times 42,0\,\text{h}$$

Note que podemos fazer $(5)^{3/2} = 5\sqrt{5} \approx 11$, usando $\sqrt{5} = 2,2$ da capa. Por fim:

$$\boxed{T' = \left(\frac{D_S d_{IJ}}{D_{Io} d_{JS}}\right)^{3/2} T \approx 462\,\text{h}}$$

OBS: Vale ressaltar que, devido às aproximações realizadas, a nossa resposta difere em torno de 5% da resposta obtida fazendo-se as contas a rigor na calculadora, que é de $\approx 438\,\text{h}$.

Questão 5. Besley, um pescador interessado em Física, está em seu barquinho e precisa sair do ponto A ao ponto C, que se encontra na margem oposta do rio. A distância BC é igual a a. A largura do rio AB é igual a b. A velocidade da correnteza de água é constante, denotada por v_0. Com que velocidade mínima u, relativa à água, Besley deve mover seu barquinho para chegar ao ponto C? Escreva sua resposta em termos de v_0, a e b.



Solução:

Nessa questão, basta usar os vetores das velocidades (que representam os módulos, direções e sentidos destas grandezas).

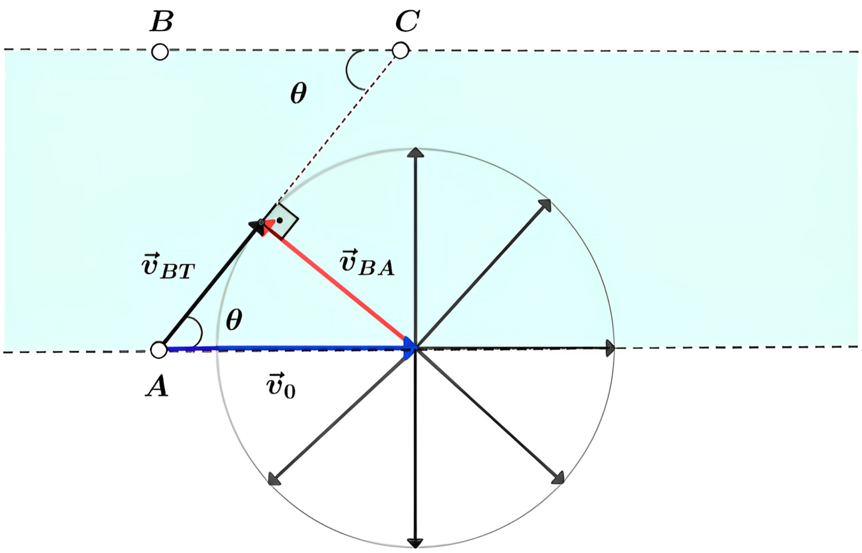
Chamemos:

$\vec{v}_{B,T}$: velocidade do barco em relação à Terra

$\vec{v}_{B,A}$: velocidade do barco em relação à água

$\vec{v}_0$: velocidade da água em relação À Terra.

Uma ideia que resolve esse problema rapidamente é, inicialmente, desenhar o vetor que representa $\vec{v}_0$. A partir da extremidade deste, desenhamos as possíveis direções de $\vec{v}_{B,A}$.



Compondo os movimentos,

$$\vec{v}_{B,T} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{B,A}$$

Sendo a direção de $\vec{v}_{B,T}$ já previamente determinada pois ela dita o percurso que Besley irá ter em seu barquinho (de A até C), $\vec{v}_{B,A}$ será minimizado quando seu módulo (representado pela extensão do vetor) coincidir com a distância mínima entre o centro do círculo e a reta que determina o trajeto AC. Parafraseando, teremos $\vec{v}_{B,A_{min}}$ quando $\vec{v}_{B,A}$ for perpendicular à $\vec{v}_{B,T}$.

Assim,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{v_{B,A_{min}}}{v_0}$$

Sendo $v_{B,A_{min}} = u$, temos, por fim:

$$\boxed{u = \frac{v_0 b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Questão 6. Saindo de seu aras para seu trabalho em Campina Grande, Gabriel Smatico passa por uma grande rodovia de 3 pistas nas quais a velocidade máxima permitida é de $V_3 = 126$ km/h. Nessa situação, os carros devem manter uma distância $d_3 = 70$ m entre si por razões de segurança. Em um triste dia, um grande buraco surgiu na estrada, bloqueando o uso de uma das pistas. Para evitar mais acidentes, foi decretado que a velocidade máxima permitida nas duas pistas operantes seria de $V_2 = 90$ km/h, e os motoristas adotaram uma distância de $d_2 = 50$ m entre si para evitar acidentes.

De volta ao seu aras, Gabriel calculou a razão entre o número máximo de carros que passam pela rodovia a cada hora quando uma das pistas se encontra obstruída e esse número quando todas as pistas estão operantes. Sabendo que todos os carros se movem na velocidade máxima permitida, qual o valor que Gabriel Smatico encontrou? Forneça a sua resposta final em porcentagem.

Solução:

Inicialmente, vamos converter os valores de velocidade de km/h para m/s. Fazendo isso, obtemos:

$$V_1 = \frac{126}{3,6}\ m/s = 35\ m/s$$
$$V_2 = \frac{90}{3,6}\ m/s = 25\ m/s$$

Sabendo a distância entre dois carros consecutivos e a velocidade de cada um deles, podemos calcular a "distância temporal"entre eles (isto é, o tempo necessário para que um carro alcance a posição atual do carro à sua frente). Para isso, basta usarmos a equação do MRU:

$$\Delta t_1 = \frac{d_1}{V_1} = \frac{70}{35}\ s = 2,0\ s$$

$$\Delta t_2 = \frac{d_2}{V_2} = \frac{50}{25}\ s = 2,0\ s$$

Vendo que esse valor é idêntico em ambas as situações, concluímos que em cada pista operante, a cada $\Delta t = 2,0\ s$ um carro finaliza seu trajeto na rodovia, independente da velocidade reduzida ou não! Uma vez que o fluxo em cada pista se mantêm constante, a única variável é o número de pistas operantes! Logo, a razão encontrada por Gabriel Smático foi:

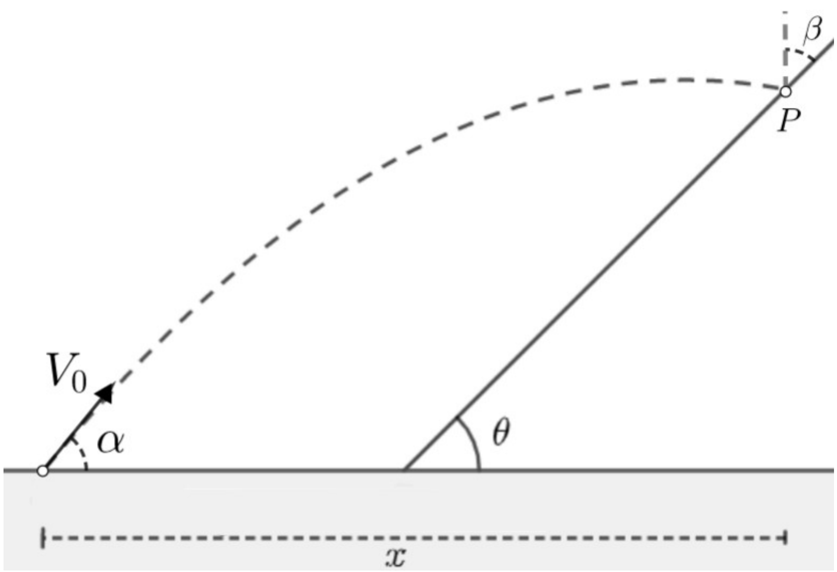
$$\boxed{\eta = \frac{2}{3} = 66,7\ \%}$$

Note que é esperado esse resultado do "espaçamento temporal"constante, uma vez que independente da velocidade, o motorista deve se preocupar em manter uma distância entre o carro da frente e si mesmo tal que no ocaso de um acidente, o espaçamento temporal entre eles seja próximo de seu tempo de reação e o carro possa desviar de forma segura!

Questão 7. Maria Fernanda (MF), uma alta, bela mulher e excelente jogadora de futebol, decide chutar uma bola contra uma rampa inclinada de um ângulo $\theta = 45°$ em relação à horizontal. A bola é chutada por MF com uma velocidade de módulo $V_0 = 20$ m/s, a um ângulo $\alpha = \theta$ com o chão, e atinge a rampa no ponto P, que está a uma distância horizontal $x = 20$ m da jogadora. Ao colidir com a rampa, a componente da velocidade da bola paralela ao plano se mantém, enquanto a componente perpendicular ao plano tem seu sentido invertido.

a) Logo após a colisão, o vetor velocidade da bola faz um ângulo β com a superfície da rampa, como ilustra a figura. Determine, em graus, o ângulo β.

b) Após chocar-se com a rampa, a próxima colisão da bola será com o chão ou novamente com a rampa? Calcule o intervalo de tempo entre os dois primeiros choques da bola com as superfícies.



Solução:

a) Primeiro, vamos calcular a velocidade V_y quando ele atinge o plano:

$$V_y = V_0 \operatorname{sen}\alpha - gt$$

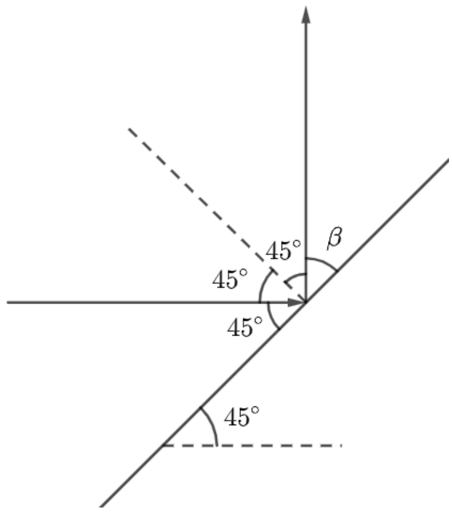
Para a posição x:

$$x = V_0 \cos\alpha t$$

Substituindo a segunda equação na primeira:

$$V_y = V_0 \operatorname{sen}\alpha - g\frac{x}{V_0\cos\alpha}$$

Substituindo os valores numéricos, encontramos que $V_y = 0$. i.e., a bola apresenta velocidade puramente horizontal no momento da colisão, conforme ilustra a figura a seguir:



O enunciado do problema diz que, na colisão a componente da velocidade da bola paralela ao plano se mantém, enquanto a componente perpendicular ao plano tem seu sentido invertido; note então que (i) o módulo da velocidade é conservado e (ii) o ângulo entre o vetor velocidade e a superfície da rampa há de ser igual antes e depois. Sendo assim, extraímos facilmente que:

$$\boxed{\beta = 45°}$$

b) Para analisar se a bola chocará novamente com a rampa, vamos analisar a direção de movimento da bola após o choque. De a), vemos que, após o choque, a velocidade da bola faz um ângulo reto com a horizontal, ou seja, o seu movimentos será puramente vertical. Portanto, a próxima colisão se dará exatamente no mesmo ponto da primeira!

A bola colide novamente com a rampa.

Para calcular o intervalo entre as colisões, basta calcular o tempo total de subida e descida da bola. Sendo V_0' o módulo da velocidade da bola após o choque, temos:

$$t = \frac{2V_0'}{g}$$

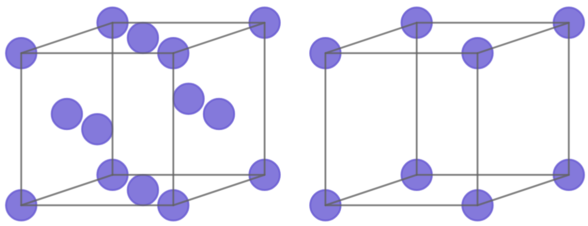
Sabemos que V_0' é idêntico ao módulo da velocidade logo antes da colisão, i.e. $V_0' = V_x = V_0 \cos\alpha$. Então:

$$t = \frac{2V_0 \cos\alpha}{g}$$

Substituindo os valores:

$$\boxed{t = \frac{2V_0 \cos\theta}{g} = 1,4 \text{ s}}$$

Questão 8. O Excelentíssimo General F.F., em sua preparação para a guerra de Independência da Bahia, deseja guardar suas grandes bolas de canhão da maneira mais efetiva possível. Seu engenheiro de confiança, R.R., apresenta-o dois possíveis métodos de como guardar suas bolas (A e B da esquerda para a direita, respectivamente).



Na imagem, cada esfera em azul representa uma bola de canhão de raio R, e todas se encontram em um arranjo cúbico–isto é, cada paralelepípedo no esquema acima é um cubo imaginário. Além disso, cada uma das bolas está em contato com as suas vizinhas **mais próximas** (fato não esquematizado na figura). Note que os cubos mostrados na figura possuem arestas de tamanhos diferentes.

Seja v_A a fração do volume do cubo ocupada pelas bolas no método A, e v_B a mesma fração quando o método utilizado é o B. Calcule a razão v_A/v_B e conclua qual método F.F. deve escolher de forma a maximizar o aproveitamento de espaço.

Solução:

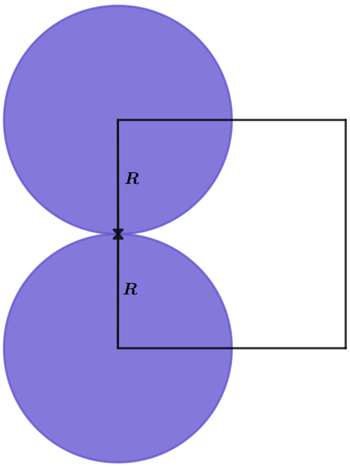
Tratemos inicialmente do arranjo A. Neste, podemos ver que existem um total de 14 bolas (8 nos vértices e 6 nas faces). As bolas nas faces são divididas em 2 partes pela face do cubo (cada face é compartilhada por 2 cubos), enquanto as bolas nos vértices são divididas em 8 partes (cada vértice é compartilhado por 8 cubos nesse arranjo).

Desse modo, podemos ver que as bolas ocupam um volume do cubo A dado por:

$$V = 6 \cdot \frac{1}{2} V_e + 8 \cdot \frac{1}{8} V_e = 4V_e$$

$$V = 4 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{16}{3}\pi R^3$$

Analisando a imagem, vemos que a vizinha mais próxima das esferas dos vértices são as bolas dos centros de cada face, de maneira que elas estão obrigatoriamente em contato entre si. Assim, a diagonal da face do cubo é equivalente a unirmos o raio da esfera do vértice com o diâmetro da esfera do meio da face com o raio da esfera do vértice oposto, como visto no esquema de visão frontal abaixo:



Logo, podemos dizer que a diagonal da face do cubo é dada por:

$$d = R + 2R + R = 4R$$

Como $d = l_A\sqrt{2}$, onde l representa o lado do cubo, obtemos:

$$l_A = 2\sqrt{2}R$$

Assim, o volume do cubo A é dado por:

$$V_A = l_A^3 = 16\sqrt{2}R^3,$$

e a fração ocupada é dada por:

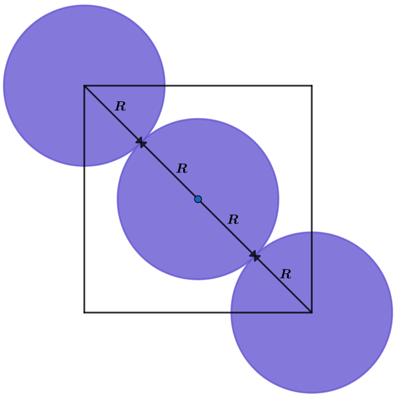
$$v_A = \frac{V}{V_B} = \frac{\frac{16}{3}\pi R^3}{16\sqrt{2}R^3} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{v_A = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \approx 0,7}$$

Já para o arranjo B, a situação é mais simples. Como existem apenas bolas nos vértices, o volume ocupado dentro do cubo é dado por:

$$V' = 8 \cdot \frac{1}{8}V_e = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Os vizinhos mais próximos nesse caso são as esferas da mesma aresta do cubo, que devem estar em contato. Desse modo, a aresta do cubo (l_B) corresponde a unirmos o raio de uma esfera com o raio da esfera do outro vértice da aresta, como visto abaixo:



Isto é:

$$l_B = 2R$$

O volume do cubo é então:

$$V_B = l_B^3 = 8R^3,$$

e a fração ocupada é dada por:

$$v_B = \frac{V'}{V_B} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{8R^3}$$

$$\boxed{v_B = \frac{\pi}{6} \approx 0,5}$$

Com isso, podemos comparar v_A e v_B:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\frac{\pi\sqrt{2}}{6}}{\frac{\pi}{6}}$$

Com isso, obtemos nossa resposta final:

$$\boxed{\frac{v_A}{v_B} = \sqrt{2} \approx 1,4}$$

Como v_A é maior do que v_B, concluímos que, de modo a maximizar o aproveitamento de espaço, o Excelentíssimo Senhor General F.F. deve escolher o método A.

OBS: De maneira cientificamente comprovada, na realidade, o método A é a maneira mais efetiva possível de se empacotar esferas de mesmo raio.