SIMULADO NOIC
OLIMPÍADA BRASILEIRA DE FÍSICA
3ª Fase - 4 de fevereiro de 2023

Nível 2
Ensino Médio
1ª e 2ª séries

Escrito por Akira Ito, Gabriel Hemétrio, Lucas Tavares, Vitória Bezerra, Rafael Ribeiro, Matheus Felipe R. Borges, e Ualype de Andrade

LEIA ATENTAMENTE AS INSTRUÇÕES:

1. Esta prova destina-se exclusivamente aos alunos dos **1ª e 2ª séries do nível médio.** Ela contém **doze** questões. Cada questão tem valor de 10 pontos e a prova um total de 80 pontos.

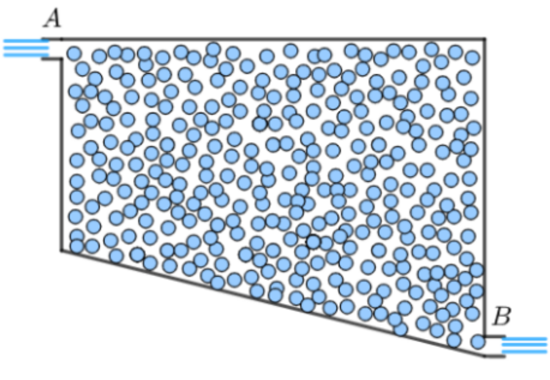
2. Os alunos da 1ª série podem escolher livremente oito questões para responder. Alunos da 2ª série devem responder as oito questões não indicadas como "exclusiva para alunos da 1ª série".

3. Todos os resultados numéricos devem ser expressos em unidades no Sistema Internacional e seguindo as instruções específicas da questão.

4. A duração máxima desta prova é de **quatro** horas.

5. Se necessário, e a menos que indicado ao contrário, use: $\pi = 3,0$; $\sqrt{2} = 1,4$; $\sqrt{3} = 1,7$; $\sqrt{5} = 2,2$; $\text{sen}\,30° = 0,50$; $\cos 30° = 0,85$; $\text{sen}\,45° = \cos 45° = 0,70$; aceleração gravitacional na superfície da terra $g = 10\,\text{m/s}^2$; calor específico da água líquida $c_a = 1\,\text{cal/(g\,°C)}$; calor latente de fusão do gelo $L = 80\,\text{cal/g}$; $1\,\text{cal} = 4,2\,\text{J}$; densidade da água líquida $\rho = 1,0\,\text{g/cm}^3$.

Questão 1. (exclusiva para alunos de 1ª série) Um contêiner especial, tendo um fundo de inclinação constante, possui uma entrada em A e uma saída em B. O recipiente contém uma grande quantidade de gelo a $T_0 = 0,00°$ C. Pela entrada em A, Papeus Philip libera um jato d'água a uma temperatura $T_A = 28,0°$ C e com vazão constante de $r_A = 3,00$ g/s (gramas por segundo). Os espaços entre as pedras de gelo permitem que a água flua normalmente (sem obstruções) até a saída em B. A saída de água é mais larga que a entrada para evitar o acúmulo de água no contêiner. Além disso, as paredes do contêiner podem ser consideradas adiabáticas. Lula Maveres, amigo de Papeus, verifica que a água atravessando a saída do contêiner em B possui temperatura $T_B = 1,00°$ C. Sabendo disso, calcule a vazão r_B, em g/s, da água na saída.



Solução:

Devemos primeiramente entender a física envolvida quando a água entra no contêiner. O jato de água incidente, em contato com o gelo, cede calor à ele e faz uma parte fundir e tornar-se água líquida (como a quantidade de gelo é muito grande, podemos assumir que há gelo suficiente para que o processo dure um tempo consideravelmente longo). Assim, o jato de água resultante na saída–cuja temperatura será menor que a do de entrada–será composto pela água incidente em A e pelo gelo que virou água. Agora, equacionemos a situação.

Chame de Δm_A a massa de água que entrou no contêiner durante um pequeno intervalo de tempo Δt, de forma que $r_A = \Delta m_A/\Delta t$. Chame de Δm_G a massa de gelo que derrete em consequência da interação com a massa de água. Como as paredes do recipiente são adiabáticas, a soma dos calores totais envolvidos no processo será nulo. Sendo assim:

$$\Delta Q = \Delta m_A c_a(T_B - T_A) + \Delta m_G L + \Delta m_G c_a(T_B - T_0) = 0$$

Aqui, consideramos o calor sensível perdido pela água ao resfriar, aquele recebido pelo gelo ao fundir e do aquecimento do gelo que tornou-se água líquida. Note que a temperatura final do conjunto é a do jato de saída, T_B. Prosseguindo, isolamos Δm_G:

$$\Delta m_g = \left[\frac{c_a(T_A - T_B)}{L + c_a(T - T_0)}\right]\Delta m_A$$

Sendo Δm_B a massa de água que atravessa a saída em B durante um intervalo Δt, temos, por conservação da massa:

$$\Delta m_B = \Delta m_A + \Delta m_G = \left[\frac{L + c_a(T_A - T_0)}{L + c_a(T_B - T_0)}\right]\Delta m_A$$

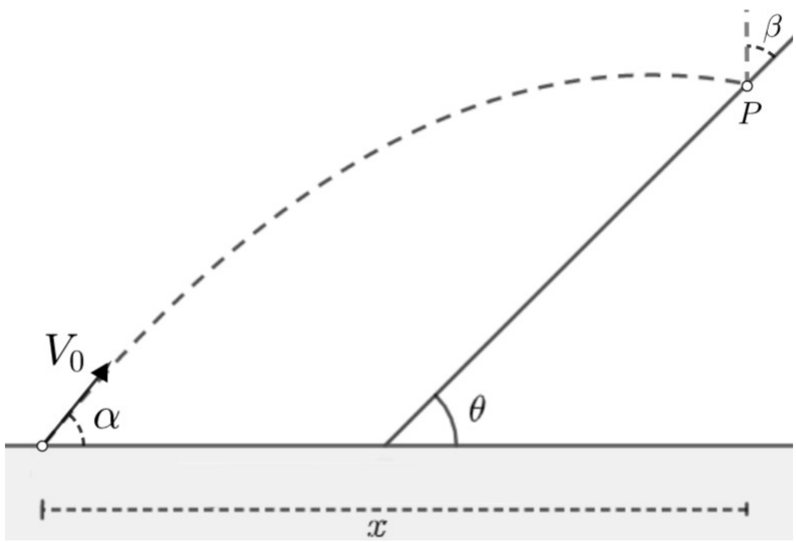
Para encontrar $r_B = \Delta m_B/\Delta t$, basta então dividir por Δt em ambos os lados:

$$\boxed{r_B = \left[\frac{L + c(T_A - T_0)}{L + c(T_B - T_0)}\right] r_A = 4 \text{ g/s}}$$

Questão 2. (exclusiva para alunos de 1ª série) Maria Fernanda (MF), uma alta, bela mulher e excelente jogadora de futebol, decide chutar uma bola contra uma rampa inclinada de um ângulo $\theta = 45°$ em relação à horizontal. A bola é chutada por MF com uma velocidade de módulo $V_0 = 20$ m/s, a um ângulo $\alpha = \theta$ com o chão, e atinge a rampa no ponto P, que está a uma distância horizontal $x = 20$ m da jogadora. Ao colidir com a rampa, a componente da velocidade da bola paralela ao plano se mantém, enquanto a componente perpendicular ao plano tem seu sentido invertido.

a) Logo após a colisão, o vetor velocidade da bola faz um ângulo β com a superfície da rampa, como ilustra a figura. Determine, em graus, o ângulo β.

b) Após chocar-se com a rampa, a próxima colisão da bola será com o chão ou novamente com a rampa? Calcule o intervalo de tempo entre os dois primeiros choques da bola com as superfícies.



Solução:

a) Primeiro, vamos calcular a velocidade V_y quando ele atinge o plano:

$$V_y = V_0 \operatorname{sen} \alpha - gt$$

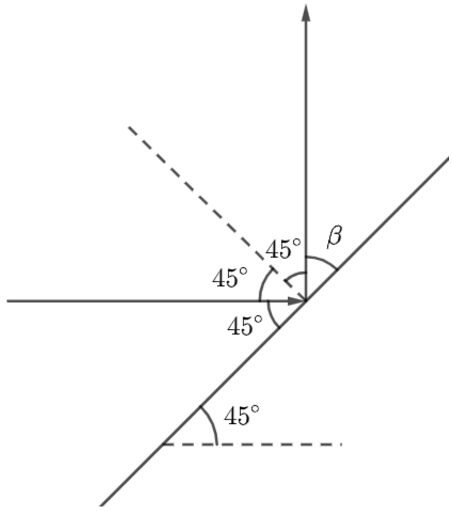
Para a posição x:

$$x = V_0 \cos \alpha t$$

Substituindo a segunda equação na primeira:

$$V_y = V_0 \operatorname{sen} \alpha - g \frac{x}{V_0 \cos \alpha}$$

Substituindo os valores numéricos, encontramos que $V_y = 0$. i.e., a bola apresenta velocidade puramente horizontal no momento da colisão, conforme ilustra a figura a seguir:



O enunciado do problema diz que, na colisão a componente da velocidade da bola paralela ao plano se mantém, enquanto a componente perpendicular ao plano tem seu sentido invertido; note então que (i) o módulo da velocidade é conservado e (ii) o ângulo entre o vetor velocidade e a superfície da rampa há de ser igual antes e depois. Sendo assim, extraímos facilmente que:

$$\boxed{\beta = 45^\circ}$$

b) Para analisar se a bola chocará novamente com a rampa, vamos analisar a direção de movimento da bola após o choque. De a), vemos que, após o choque, a velocidade da bola faz um ângulo reto com a horizontal, ou seja, o seu movimentos será puramente vertical. Portanto, a próxima colisão se dará exatamente no mesmo ponto da primeira!

A bola colide novamente com a rampa.

Para calcular o intervalo entre as colisões, basta calcular o tempo total de subida e descida da bola. Sendo V_0' o módulo da velocidade da bola após o choque, temos:

$$t = \frac{2V_0'}{g}$$

Sabemos que V_0' é idêntico ao módulo da velocidade logo antes da colisão, i.e. $V_0' = V_x = V_0 \cos\alpha$. Então:

$$t = \frac{2V_0 \cos\alpha}{g}$$

Substituindo os valores:

$$\boxed{t = \frac{2V_0 \cos\theta}{g} = 1,4 \text{ s}}$$

Questão 3. (exclusiva para alunos de 1ª série) Saindo de seu aras para seu trabalho em Campina Grande, Gabriel Smatico passa por uma grande rodovia de 3 pistas nas quais a velocidade máxima permitida é de $V_3 = 126$ km/h. Nessa situação, os carros devem manter uma distância $d_3 = 70$ m entre si por razões de segurança. Em um triste dia, um grande buraco surgiu na estrada, bloqueando o uso de uma das pistas. Para evitar mais acidentes, foi decretado que a velocidade máxima permitida nas duas pistas operantes seria de $V_2 = 90$ km/h, e os motoristas adotaram uma distância de $d_2 = 50$ m entre si para evitar acidentes.

De volta ao seu aras, Gabriel calculou a razão entre o número máximo de carros que passam pela rodovia a cada hora quando uma das pistas se encontra obstruída e esse número quando todas as pistas estão operantes. Sabendo que todos os carros se movem na velocidade máxima permitida, qual o valor que Gabriel Smatico encontrou? Forneça a sua resposta final em porcentagem.

Solução:

Inicialmente, vamos converter os valores de velocidade de km/h para m/s. Fazendo isso, obtemos:

$$V_1 = \frac{126}{3,6}\ m/s = 35\ m/s$$

$$V_2 = \frac{90}{3,6}\ m/s = 25\ m/s$$

Sabendo a distância entre dois carros consecutivos e a velocidade de cada um deles, podemos calcular a "distância temporal"entre eles (isto é, o tempo necessário para que um carro alcance a posição atual do carro à sua frente). Para isso, basta usarmos a equação do MRU:

$$\Delta t_1 = \frac{d_1}{V_1} = \frac{70}{35}\ s = 2,0\ s$$

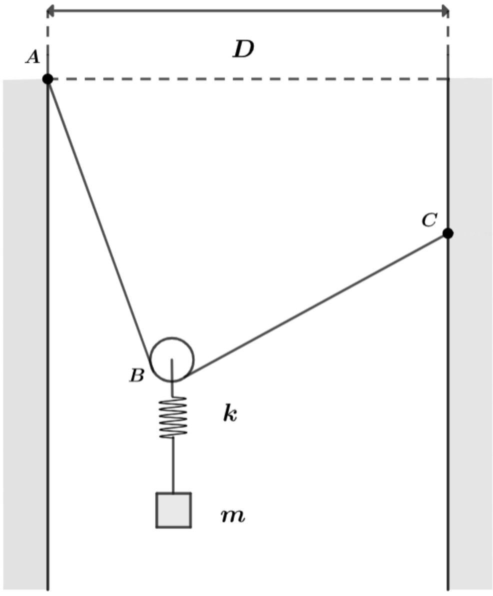
$$\Delta t_2 = \frac{d_2}{V_2} = \frac{50}{25}\ s = 2,0\ s$$

Vendo que esse valor é idêntico em ambas as situações, concluímos que em cada pista operante, a cada $\Delta t = 2,0\ s$ um carro finaliza seu trajeto na rodovia, independente da velocidade reduzida ou não! Uma vez que o fluxo em cada pista se mantêm constante, a única variável é o número de pistas operantes! Logo, a razão encontrada por Gabriel Smático foi:

$$\boxed{\eta = \frac{2}{3} = 66,7\ \%}$$

Note que é esperado esse resultado do "espaçamento temporal"constante, uma vez que independente da velocidade, o motorista deve se preocupar em manter uma distância entre o carro da frente e si mesmo tal que no ocaso de um acidente, o espaçamento temporal entre eles seja próximo de seu tempo de reação e o carro possa desviar de forma segura!

Questão 4. (exclusiva para alunos de 1ª série) Um fio inextensível e de massa desprezível possui $L = 40,0\,\text{m}$ de comprimento. Suas extremidades A e C são presas a dois pontos de paredes paralelas, distantes $D = 20,0\,\text{m}$. A tração no fio tem intensidade de $500\,\text{N}$. O fio passa por uma polia ideal que sustenta, através de uma mola ideal de constante elástica $k = 1,00 \times 10^3\,\text{N/m}$, um corpo de massa m desconhecida. A configuração do equilíbrio está representada na figura a seguir.

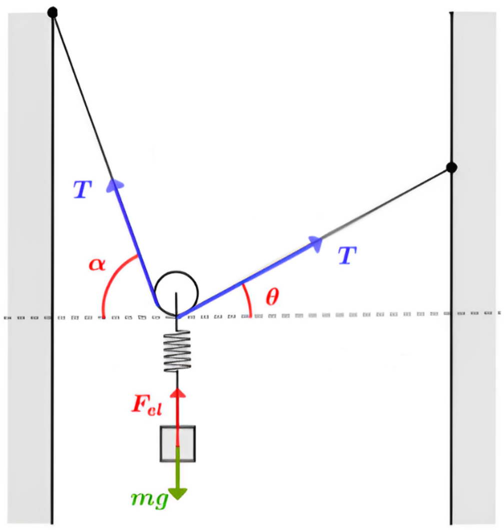


a) Determine o ângulo (em graus) formado entre as partes AB e BC do fio.

b) Determine a elongação da mola Δx e a massa m do corpo.

Solução:

a) Na figura abaixo, estão esquematizadas as forças, ângulos, e distâncias relevantes na solução. Primeiramente, sabe-se que a força de tração em um fio ideal se distribui de forma constante por toda a extensão deste fio. Denota-se por T a força de tração no fio, F_{el} a força elástica da mola e mg o peso da massa.



Como a polia está em equilíbrio, a força resultante atuando sobre ela na horizontal deve ser zero. Dessa forma,

$$T\cos\alpha = T\cos\theta$$
$$\cos\alpha = \cos\theta \tag{1}$$

Logo, temos:

$$\alpha = \theta$$

Agora, da figura mostrada, veja que:

$$AB\cos\alpha + BC\cos\theta = D$$

Da equação 1, então, temos:

$$(AB + BC)\cos\alpha = D$$

Note que $AB + BC = L$. Logo:

$$\cos\alpha = \frac{D}{L} = \frac{1}{2}$$

Portanto, temos que $\alpha = \theta = 60°$. Chamando-se o ângulo formado entre as partes AB e BC de Ω, veja que:

$$\alpha + \Omega + \theta = 180°$$
$$\Omega = 180° - 2\alpha$$

Por fim:

$$\boxed{\Omega = 60,0°}$$

b) Ao analisar o equilíbrio das forças na polia ideal na direção vertical:

$$F_{el} = T\,\text{sen}\,\alpha + T\,\text{sen}\,\theta = 2T\,\text{sen}\,\alpha$$

Da Lei de Hooke:

$$k\Delta x = T\sqrt{3}$$

Note que, na linha passada, usamos $\text{sen}\,\alpha = \sqrt{3}/2$. Substituindo os valores, temos:

$$\Delta x = \frac{500 \times 1,7}{1,00 \times 10^3}\,\text{m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta x = 0,850\,\text{m}}$$

Agora, equacionando o equilíbrio de forças na massa m:

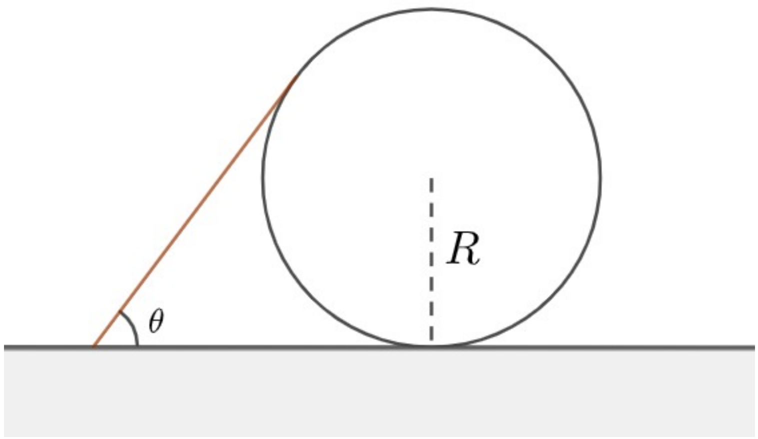
$$F_{el} = mg$$

$$2T \operatorname{sen} \alpha = T\sqrt{3} = mg$$

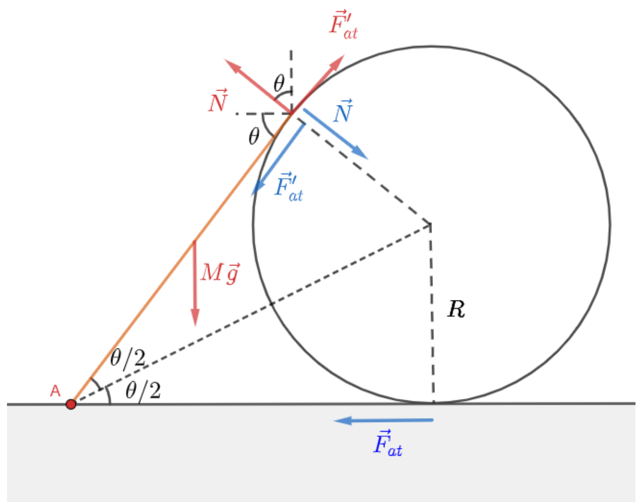
Novamente, substituindo os valores:

$$\boxed{m = 85,0\,\text{kg}}$$

Questão 5. Um graveto de densidade linear de massa $\lambda = 100$ kg/m está em contato com um aro circular de raio $R = 0,500$ m. O graveto faz um ângulo $\theta = 60,0°$ com a horizontal e sua ponta superior é tangente ao aro. Saiba que existe atrito em todos os pontos de contato e assuma que ele seja grande o suficiente para manter o sistema em equilíbrio estático. Determine o valor da força de atrito entre o aro e o chão.



Solução:
A figura abaixo mostra as forças atuantes no sistema, em que as forças vermelhas são forças que atuam no graveto e as forças azuis atuam no aro.



Calculando o torque das forças que atuam no aro:

$$F_{at}R = F'_{at}R$$

Portanto, percebe-se que $F_{at} = F'_{at}$.

Agora, calculemos o torque que atua no graveto, em relação ao ponto A. Sendo L o comprimento do graveto e M sua massa, temos:

$$NL = Mg\cos\theta\frac{L}{2} = g\rho\frac{L^2}{2}\cos\theta$$

Perceba que, como calculamos o torque em relação ao ponto A, não foi necessário utilizar as forças que atuam naquele ponto e por isso não as desenhamos no diagrama.

Portanto, teremos que:

$$N = g\rho\frac{L}{2}\cos\theta$$

Para o equilíbrio das forças no aro na horizontal, vale:

$$N\,\text{sen}\,\theta = F_{at} + F_{at}\cos\theta$$

Note que também omitimos o peso do aro e a normal entre este e o chão em nosso diagrama, já que tais forças não serão úteis em nossa resolução.

Logo:

$$F_{at} = N\frac{\text{sen}\,\theta}{1+\cos\theta} = g\rho\frac{L\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}{2(1+\cos\theta)}$$

Entretanto, analisando a figura, percebe-se que $L = R/\tan(\theta/2)$. Sendo assim, o atrito entre o cilindro e o chão será:

$$F_{at} = \rho g R\frac{R\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}{2\tan(\theta/2)(1+\cos\theta)}$$

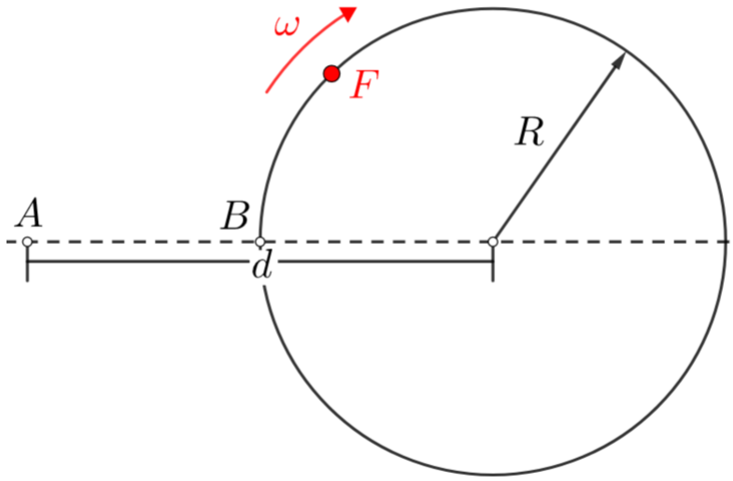
Também é possível simplificar essa equação, de tal forma que:

$$F_{at} = \frac{1}{2}\rho g R\cos\theta$$

Substituindo os valores:

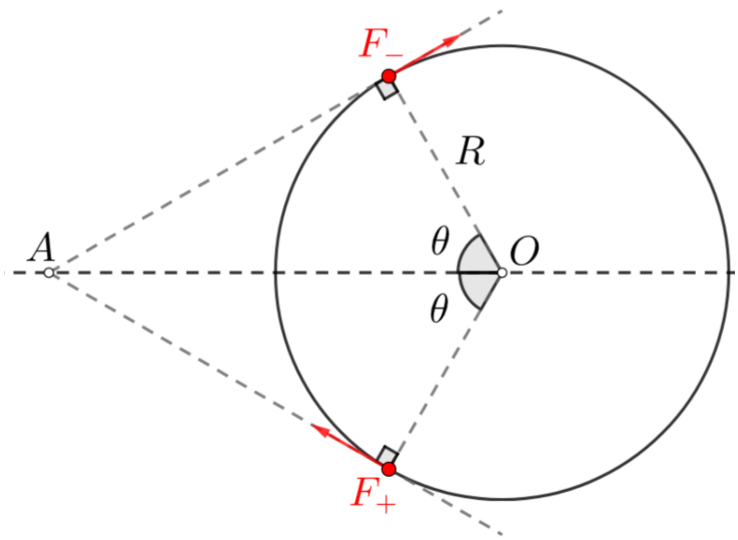
$$\boxed{F_{at} = \frac{1}{2}\rho g R\cos\theta = 125\ \text{N}}$$

Questão 6. Um avião de brinquedo F se move em uma trajetória circular de raio R em um plano horizontal a uma pequena distância do solo, com velocidade angular constante $\omega = 0,300\,\text{rad/s}$ e emitindo um som ininterrupto. Natônio localiza-se em repouso no ponto A, a uma distância $d = 2R$ do centro da circunferência descrita pelo avião. Como o exímio físico que é, Natônio investiga a mudança no som percebido por ele conforme o avião se move. Ele aciona um cronômetro no instante $t = 0$, momento em que o avião passa pelo ponto B. Com o uso de um sensor, ele então capta a frequência do som do avião. Calcule o primeiro instante de tempo t em que a frequência percebida por Natônio é **a)** mínima; **b)** máxima.



Solução:

Primeiramente, devemos perceber que a posição do avião no momento em que a frequência detectada é mínima e máxima, corresponde, respectivamente, aos momentos de afastamento e aproximação direta em relação ao observador (no anexo ao fim da solução, você pode encontrar a constatação desse fato). Sendo assim, devemos olhar para os pontos em que a reta passando pelo observador tangencia a trajetória do avião, conforme ilustra a figura abaixo:



As posições F_- e F_+ correspondem às posições em que a frequência recebida é mínima e máxima, respectivamente. Veja que o ângulo θ será dado por:

$$\cos\theta = \frac{R}{AO} = \frac{R}{d} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}\,\text{rad}$$

Chame os instantes requeridos de t_- e t_+. Desprezando o tempo que o som emitido leva para chegar até Natônio, temos então:

a)

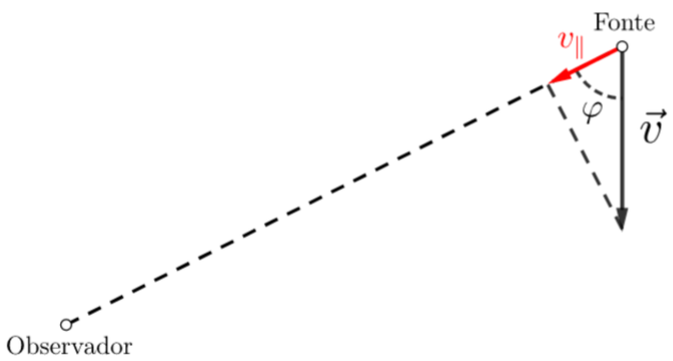
$$t_- = \frac{\theta}{\omega} \quad \rightarrow \quad \boxed{t_- = \frac{\pi}{3\omega} = 3,33\,\text{s}}$$

b)

$$t_+ = \frac{2\pi - \theta}{\omega} \quad \rightarrow \quad \boxed{t_+ = \frac{5\pi}{3\omega} = 16,7\,\text{s}}$$

Anexo:

Primeiramente, lembre-se que o efeito Doppler depende apenas das componentes de velocidade do observador e/ou fonte ao longo da linha que os liga. Considere um caso geral em que o observador está em repouso e a fonte se move com velocidade v a um ângulo φ com a linha observador-fonte:



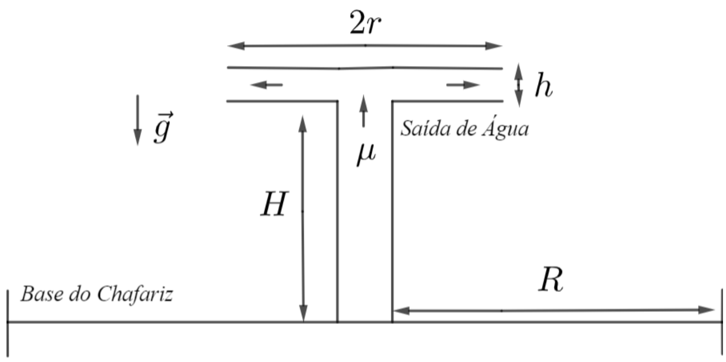
Utilizando a equação do Efeito Doppler, a frequência percebida f' será:

$$f' = \frac{v_{som}}{v_{som} - v_\parallel} f_0 = \frac{f_0}{1 - \dfrac{v}{v_{som}}\cos\varphi}$$

Sendo $v_\parallel = v\cos\varphi$ a componente de v na direção da linha observador-fonte. Mantendo v fixo e variando-se φ, note que a frequência é mínima quando o denominador é máximo, i.e. $\cos\varphi = -1$, e portanto $\varphi = 180^\circ$, quando a fonte está em afastamento direto do observador.

Por outro lado, a frequência é máxima quando o denominador é mínimo, i.e. $\cos\varphi = 1$, e portanto $\varphi = 0$, quando a fonte está em aproximação direta.

Questão 7. Você já deve ter se deparado com chafarizes em lugares públicos, principalmente em shoppings. Por muito tempo utilizado como um instrumento físico para prover água para pequenas vilas e cidades, o fenômeno por trás do funcionamento de um chafariz é bem interessante e foi muito útil no passado. No contexto atual, o chafariz é utilizado principalmente para decorações e fins artísticos. Nessa questão, iremos trabalhar com um modelo simplificado para o funcionamento de um chafariz do tipo mostrado abaixo, no qual a água expelida toma a forma de um domo, como mostra a figura abaixo à esquerda. Na direita, temos uma esquematização do mecanismo.



No esquema representado, H representa a altura do chafariz. A água é liberada radialmente de um disco de altura h e raio r e é alimentada à uma vazão constante μ. Visando construir um chafariz com as mesmas especificações do enunciado, qual deverá ser o limite inferior para o raio da base R do objeto visando evitar transbordos? Considere $H = 40$ cm, $h = 2$ cm, $r = 5$ cm e $\mu = 400$ mL/s.

Solução: Perceba que a água sairá do chafariz com uma velocidade horizontal v e, a partir de então, apresentará um movimento parabólico. Para encontrar a velocidade com que a água é ejetada, podemos utilizar a equação da continuidade:

$$\mu = Av$$

Então:

$$\mu = 2\pi r h v$$

$$v = \frac{\mu}{2\pi r h}$$

Com isso, calculando o alcance da água ejetada no caso em que $H \gg h$:

$$H = \frac{g\Delta t^2}{2}$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Logo:

$$A = v\Delta t$$

$$A = v\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

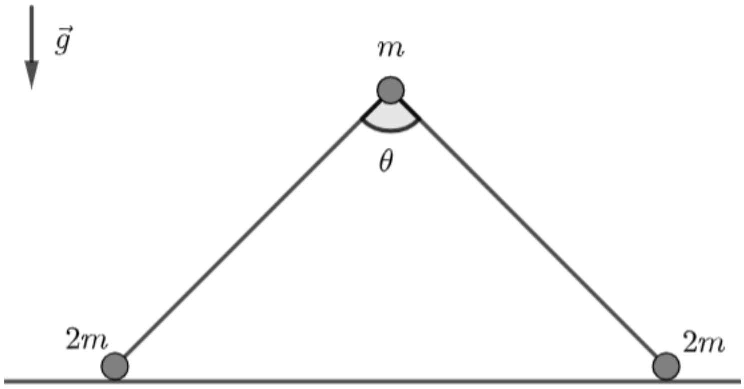
Substituindo o valor de v:

$$A = \frac{\mu}{2\pi r h}\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Então:

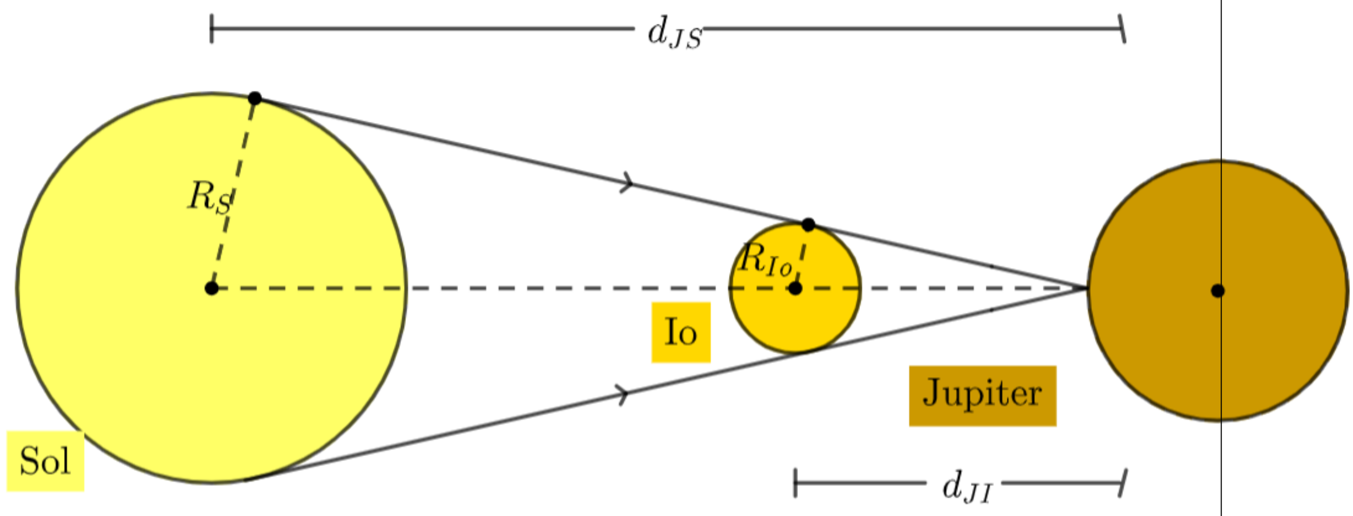
$$\boxed{R = r + \frac{\mu}{2\pi r h}\sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 7 \text{ cm}}$$

Questão 8. Três cilindros de pequeno raio e massas $2m$, m e $2m$ são conectados por duas barras rígidas e inextensíveis de comprimento L, de modo que há uma dobradiça perto do cilindro do meio, permitindo que o ângulo entre as duas barras altere-se livremente. Desprezando quaisquer tipos de atrito e sabendo que o sistema é abandonado do repouso quando as barras estão praticamente verticais (isto é, $\theta = 0$), determine a intensidade da velocidade do cilindro do meio em função do ângulo θ entre as barras.



Solução:

Pela simetria do problema, o cilindro do meio se move verticalmente com velocidade v_y e os cilindros da ponta se movem com velocidades horizontais de mesmo módulo v_x. Perceba que devemos explorar o vínculo geométrico da questão para relacionar v_x e v_y. Para isso, note que as barras são rígidas e inextensíveis, tal que a velocidade relativa na direção das barras deve ser nula; i.e., a componente da velocidade dos cilindros na direção da barra ($v_{\parallel}$) devem ser idênticas. Observe a figura a seguir:



$$v_x \operatorname{sen}\left(90° - \frac{\theta}{2}\right) = v_y \cos\left(90° - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$v_x = v_y \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Por fim, conservando energia:

$$mgL = mgL\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{4mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2}$$

Substituindo v_x em função de v_y e fatorando:

$$2gL\left(1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = v_y^2\left(1 + 4\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

Então:

$$\boxed{v_y = \sqrt{\frac{2gL\left(1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{\left(1 + 4\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}}}$$

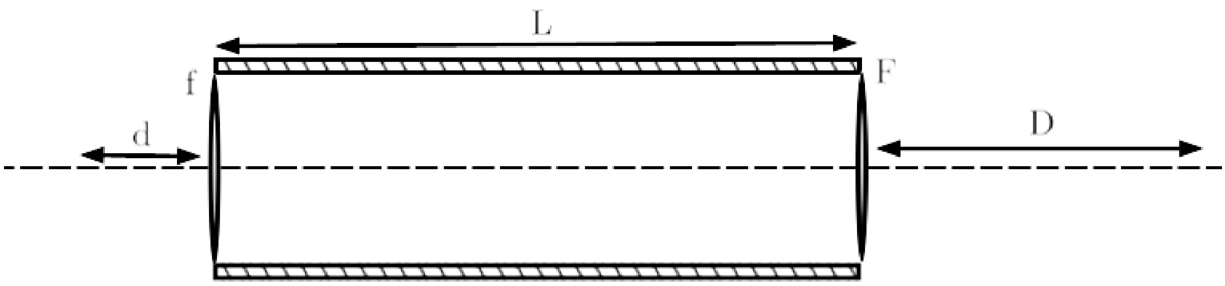
Questão 9. Satoshi estava fazendo uma limpeza em seu quarto quando encontrou um curioso dispositivo óptico composto por duas lentes e um tubo de comprimento $L = 20,0\,\text{cm}$ no seu armário (mostrado na figura abaixo). Depois de estudar o aparelho por um tempo, ele fez as seguintes observações:

1. Se eu coloco uma fonte puntiforme de luz a uma distância $d = 5,00\,\text{cm}$ à esquerda do dispositivo e sobre o eixo óptico das lentes, os raios de luz saem pelo outro lado (à direita) paralelos entre si.

2. Se raios de luz horizontais e paralelos entre si incidem no dispositivo pela esquerda, eles convergem para um ponto sobre o eixo óptico das lentes a uma distância $D = 10,0\,\text{cm}$ à direita

do dispositivo.

Infelizmente, Satoshi tinha que acabar de limpar seu quarto e não teve tempo para calcular os valores das distâncias focais das lentes. Ajude nosso amigo Satoshi a realizar essa tarefa! Calcule, em cm, as distâncias focais f e F, das lentes à esquerda e à direita da figura, respectivamente.



Solução:

Para o primeiro experimento de Satoshi, podemos utilizar a equação dos pontos conjugados:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{L-F} = \frac{1}{f} \tag{2}$$

Em que $\frac{1}{d}$ representa o ponto objeto, $\frac{1}{L-F}$ o ponto imagem gerado e $\frac{1}{f}$ é o foco da lente da esquerda. Note que a imagem da lente da esquerda deve cair sobre o foco da lente da direita para que os raios saiam paralelos.

Para o segundo experimento:

$$\frac{1}{L-f} + \frac{1}{D} = \frac{1}{F} \tag{3}$$

Em que $\frac{1}{L-f}$ é o ponto objeto, $\frac{1}{D}$ a imagem e $\frac{1}{F}$ o foco da lente da direita. Note que a imagem da lente esquerda cai justamente sobre o seu foco f, pois o objeto é impróprio, por isso a distância $L-f$ foi utilizada como objeto para a lente da direita.

Agora basta resolver o sistema de equações. Vamos encontrar primeiro F. Da equação 2, temos:

$$f = \frac{d(L-F)}{L-F+d} \tag{4}$$

Substituindo 4 em 3 e fazendo as devidas simplificações, obtemos:

$$F^2(L+D-d) + F(-2DL-L^2) + (DL^2) = 0$$

Resolvendo a equação, obtemos duas soluções reais para F. São elas:

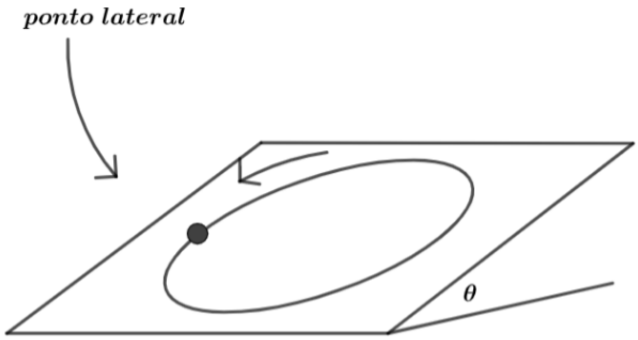
$$F = 16,0 \pm 9,8\,\text{cm}$$

Aplicando esse resultado na equação 4, obtemos dois pares (f, F) que satisfazem as condições do problema:

$$\boxed{(f;\ F)_1 = (36,3;\ 25,8)\,\text{cm}}$$

$$\boxed{(f;\ F)_2 = (3,7;\ 6,2)\,\text{cm}}$$

Questão 10. Um jovem físico chamado Biscoitão encontra um grande estacionamento inclinado, onde o ângulo do solo em relação à horizontal é θ. Nela, Biscoitão deseja dirigir no seu carro com velocidade de módulo constante em uma circunferência de raio R. O coeficiente de atrito entre os pneus do carro e o chão do estacionamento vale μ. Escreva as suas respostas em termos dos dados apresentados e da aceleração gravitacional g.



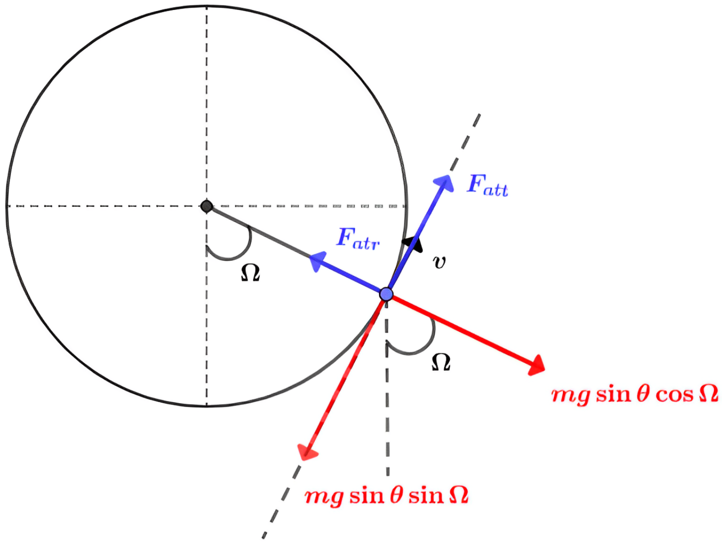
a) Qual é a maior velocidade que o jovem pode ter se quiser evitar deslizamento?

b) Caso Biscoitão esteja preocupado apenas se seu carro escorrega ou não em um dos pontos laterais do círculo (ou seja, a meio caminho entre o topo e a base, como mostra a figura), qual é a maior velocidade que o motorista pode ter?

Solução:

a) Na situação de velocidade máxima sem deslizamento, precisa haver uma condição de força de atrito máxima.

Para encontrar essa situação limite, generalize o movimento e tome um instante no qual Biscoitão forma um ângulo Ω qualquer em relação ao diâmetro do círculo com origem no ponto mais alto e fim no ponto mais baixo deste.



Como não há aceleração na direção tangencial ao movimento,

$$F_{att} = mg \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\Omega$$

Equacionando a resultante centrípeta,

$$F_{atr} = \frac{mv^2}{R} + mg \operatorname{sen}\theta \cos\Omega$$

Como as duas componentes da força de atrito são perpendiculares entre si,

$$F_{at}{}^2 = F_{att}{}^2 + F_{atr}{}^2$$

$$F_{at}{}^2 = (mg \operatorname{sen}\theta \sin\Omega)^2 + \left(\frac{mv^2}{R} - mg \operatorname{sen}\theta \cos\Omega\right)^2$$

$$F_{at}{}^2 = m^2 g^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\Omega + \frac{m^2v^4}{R^2} + 2\frac{m^2v^2}{R} \operatorname{sen}\theta \cos\Omega + m^2g^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\Omega \tag{5}$$

Da identidade fundamental da trigonometria, $\operatorname{sen}^2\Omega + \cos^2\Omega = 1$, logo:

$$F_{at}{}^2 = (mg \operatorname{sen}\theta)^2 + \left(\frac{mv^2}{R}\right)^2 + 2\frac{m^2v^2}{R} g \operatorname{sen}\theta \cos\Omega$$

É fácil ver que F_{at} será maximizada quando $\cos\Omega = 1$; i.e, para $\Omega = 0°$, no ponto mais baixo. Assim, é possível simplificar a expressão acima:

$$F_{at} = \frac{mv^2}{R} + mg \operatorname{sen}\theta$$

Sendo $F_{at} \leq \mu N$,

$$\frac{mv^2}{R} + mg \operatorname{sen}\theta \leq \mu mg\cos\theta$$

$$\boxed{v \leq \sqrt{gR(\mu\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)}}$$

Ademais, note que o termo dentro da raiz não pode ser negativo, então deve ser satisfeita a condição $\mu > \tan\theta$.

b) Veja que, na situação proposta, $\Omega = 90°$. Basta que façamos $\cos\Omega = 0$ na equação 5:

$$F_{at}{}^2 = (mg\sin\theta)^2 + \left(\frac{mv^2}{R}\right)^2$$

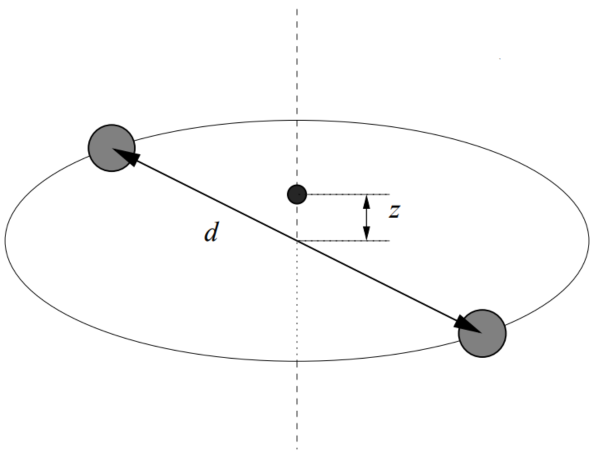
E sendo definido da condição de não-deslizamento que

$$F_{at} \leq \mu N$$

Temos:

$$\boxed{v \leq \sqrt{gR}(\mu^2\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)^{\frac{1}{4}}}$$

Questão 11. Duas estrelas idênticas, cada uma de massa M e separadas por uma distância d, movem-se ao redor de seu centro de massa comum em uma órbita circular. Um planeta de massa $m \ll M$ move-se ao longo do eixo z, perpendicular ao plano orbital e passando pelo centro de massa. Seja T_S o período orbital das estrelas e T_P o período de pequenas oscilações do planeta em torno de sua posição de equilíbrio. Determine a razão T_S/T_P.



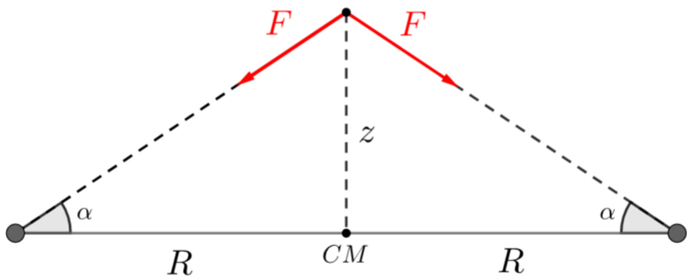
Solução:

Chame de $R = d/2$ o raio orbital das estrelas. A força gravitacional entre elas atuará como resultante centrípeta. Sendo assim:

$$\frac{GM^2}{d^2} = \frac{Mv^2}{R}$$

$$\frac{GM^2}{4R^2} = M\frac{4\pi^2 R}{T_S^2} \quad \rightarrow \quad T_S = 4\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Agora, resta-nos determinar T_P. Vamos analisar a dinâmica do movimento do planeta:



Sendo F o módulo da força entre o planeta e cada uma das estrelas, a lei da gravitação universal nos diz que:

$$F = \frac{GMm}{R^2 + z^2}$$

Como as componentes horizontais se cancelam, a força resultante no planeta será a soma das componentes em z:

$$F_z = 2F \operatorname{sen}\alpha = 2\frac{GMm}{R^2 + z^2}\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

Na condição de pequenas oscilações, $z \ll R$, então podemos realizar a seguinte aproximação:

$$F_z = 2\frac{GMm}{R^2 + z^2}\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \approx \frac{2GMm}{R^3}z = kz$$

Deste modo, obtemos a equação característica da força restauradora em um movimento harmônico simples, cujo período T_P será dado por:

$$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{2GM}}$$

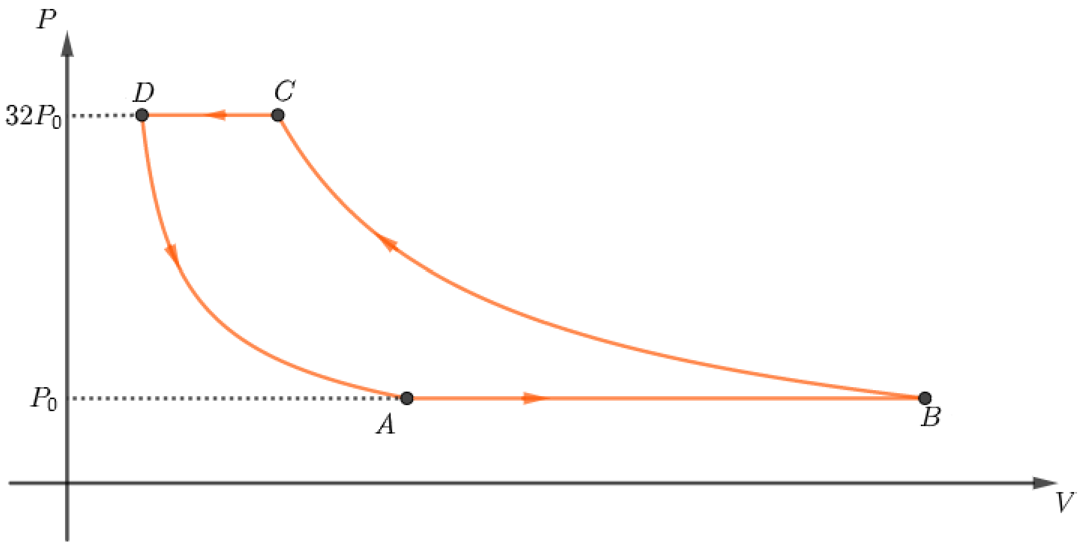
Por fim:

$$\boxed{\frac{T_S}{T_P} = 2\sqrt{2} = 2,8}$$

Questão 12. Um estudante perspicaz, Walipe, mora em Chicago, nos Estados Unidos. No último inverno, a cidade de Chicago atingiu a temperatura de $-20\,^\circ\mathrm{C}$. Walipe, como sempre esperto, lembrou de suas aulas de física e decidiu criar uma máquina térmica para manter a temperatura de seu quarto a $30\,^\circ\mathrm{C}$ (temperatura de sua terra natal). Para isso, ele usou $1\,\mathrm{mol}$ de gás hélio que sobrou de sua festa de aniversário.

a) Inicialmente, Walipe, sabendo que a potência necessária para manter o quarto quente é $3\,\mathrm{kW}$, projetou sua máquina para usar a menor quantidade de trabalho possível. Determine, nessas condições, em kW, o valor da potência a ser fornecida à máquina para mantê-la funcionando.

b) Posteriormente, Walipe percebeu que a máquina utilizada não conseguia usar o trabalho mínimo como ele havia planejado. O estudante verificou que, na verdade, ela performava segundo o ciclo termodinâmico mostrado a seguir em um diagrama de pressão por volume. Encontre, em kW, a nova potência necessária para manter a máquina em funcionamento.

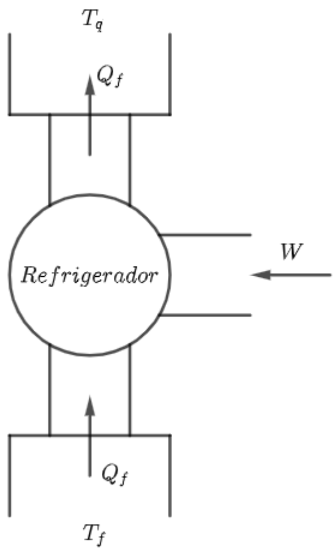


Os processos mostrados no diagrama são:

- $A \longrightarrow B$: Expansão isobárica do gás.
- $B \longrightarrow C$: Compressão adiabática do gás.
- $C \longrightarrow D$: Compressão isobárica do gás.
- $D \longrightarrow A$: Expansão adiabática do gás.

Solução:

a) Primeiramente, consideremos a máquina do Walipe operando entre as temperaturas extremas $T_q = 303\,\mathrm{K}$ e $T_f = 253\,\mathrm{K}$, e como um refrigerador, uma vez que tira calor da fonte fria (o lado de fora do quarto) e dá calor para a fonte quente (o quarto do Walipe).



A condição para o mínimo trabalho é obedecer ao ciclo de Carnot, ou seja, a razão dos calores é a razão das temperaturas

$$\frac{Q_q}{Q_f} = \frac{T_q}{T_f}$$

Então podemos encontrar o trabalho através da relação a cima

$$W + Q_f = Q_q$$

$$\frac{Q_q}{Q_q - W} = \frac{T_q}{T_f}$$

Logo,

$$W = Q_q \frac{(T_q - T_F)}{T_q}$$

Ou seja, uma vez que a potência necessária para aquecer o quarto é 3 KW o trabalho por segundo é

$$P = 3 \cdot \frac{50}{303}\,\text{kW}$$

$$\boxed{P \approx 0,5\,\text{kW}}$$

b) Agora, consideraremos o real ciclo da máquina de Walipe. Suponha que o estado D seja definido pelas coordenadas (V_1, rP_0) e o estado C dado pelas coordenadas (V_2, rP_0) $(r = 32$ é a razão entre a maior e menor pressão, que é dado no gráfico). Calcularemos agora o estado A a partir do estado D e da equação da expansão adiabática $D \longrightarrow A$:

$$P_A V_A^\gamma = P_D V_D^\gamma$$

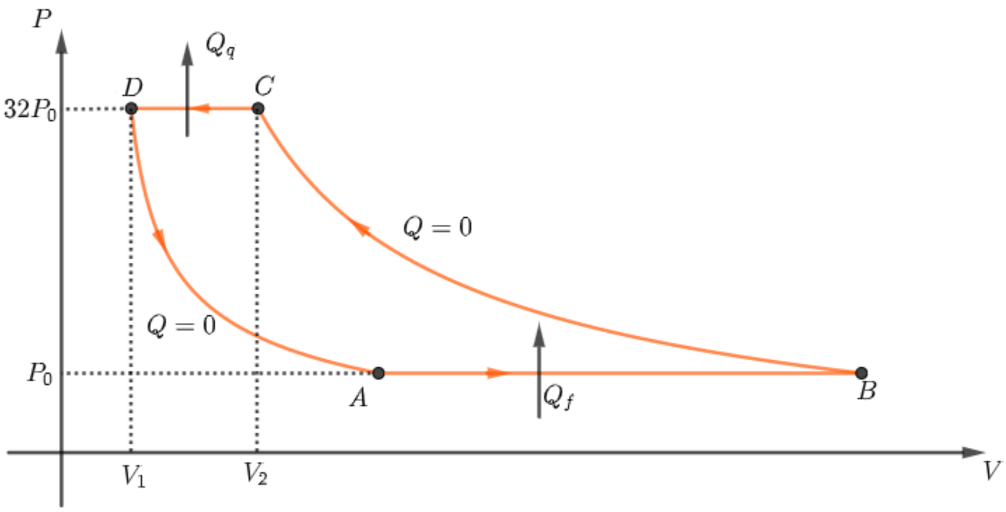
$$P_0 V_A^\gamma = r P_0 V_1^\gamma$$

$$V_A = r^{1/\gamma} V_1$$

Onde γ é o coeficiente de Poisson, que para o hélio (gás usado por Walipe) vale $\gamma = 5/3$. Dessa forma, o estado A é dado por $(r^{1/\gamma}V_1, P_0)$. Analogamente o estado D é descrito como $(r^{1/\gamma}V_2, P_0)$. A temperatura do gás a cada estado pode ser determinada por

$$T = \frac{PV}{R}$$

Chame de Q_q o calor recebido pelo gás em $A \longrightarrow B$, e Q_f o calor ejetado em $C \longrightarrow D$. Note que o calor é nulo nas outras etapas, por serem adiabáticas.



Da primeira lei da termodinâmica:

$$Q_q = c_P(T_C - T_D) = \frac{c_P r P_0 (V_2 - V_1)}{R}$$

Em que c_P é a capacidade térmica à pressão constante. O calor recebido na transição $A \longrightarrow B$ vale:

$$Q_f = c_P(T_B - T_A) = \frac{c_P P_0 (V_2 - V_1)}{R} r^{1/\gamma}$$

Assim a nova razão dos calores vale

$$\frac{Q_q}{Q_f} = r^{\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)}$$

$$\frac{Q_q}{Q_f} = 32^{2/5}$$

$$\frac{Q_q}{Q_f} = 4$$

Ou seja, nesse caso o trabalho em função do calor dado à fonte quente é

$$Q_f + W = Q_q$$

$$\frac{Q_q}{Q_q - W} = 4$$

$$W = \frac{3Q_q}{4}$$

Nesse caso o trabalho por segundo (potência) será

$$P = \frac{3 \cdot 3}{4}\,\text{kW}$$

$$\boxed{P = 2,25\,\text{kW}}$$