Comentário NOIC
Prova experimental da 3ª Fase - Nível I
29 DE JANEIRO DE 2022

Escrito por Matheus Felipe R. Borges, Rafael Ribeiro, Wesley Andrade e Ualype de Andrade

Parte I - Movimento da Partícula no Arranjo A

Questão 1.

(a) Sendo x a posição do sensor e t o instante que a partícula o cruza, realizamos 21 medições de x e t, que estão representadas na tabela 1. Vale ressaltar que, na hora da prova, o aluno não precisava realizar tantas medições; levando em conta a duração e extensão da prova, um bom número seria de 8 a 11 medidas, de forma que, posteriormente, o gráfico linearizado ficaria com 7 a 10 pontos experimentais.

Tabela 1: Medidas de tempo e posição no arranjo A.

i	t_i(s)	σ_{t_i}(s)	x_i(mm)	σ_{x_i}(mm)
1	0,11	0,01	10,0	0,5
2	0,27	0,01	20,0	0,5
3	0,43	0,01	30,0	0,5
4	0,60	0,01	40,0	0,5
5	0,78	0,01	50,0	0,5
6	0,97	0,01	60,0	0,5
7	1,17	0,01	70,0	0,5
8	1,38	0,01	80,0	0,5
9	1,61	0,01	90,0	0,5
10	1,87	0,01	100,0	0,5
11	2,14	0,01	110,0	0,5
12	2,46	0,01	120,0	0,5
13	2,84	0,01	130,0	0,5
14	3,35	0,01	140,0	0,5
15	4,31	0,01	148,0	0,5
16	5,45	0,01	140,0	0,5
17	5,96	0,01	130,0	0,5
18	6,34	0,01	120,0	0,5
19	6,66	0,01	110,0	0,5
20	6,94	0,01	100,0	0,5
21	7,19	0,01	90,0	0,5

(b) A incerteza da posição x é estimada como a metade da menor medida (precisão) da régua $\sigma_x = 0,5$ mm, regra geral para instrumentos analógicos. A incerteza nas medições de tempo pode ser considerada como a menor medida (precisão) do cronômetro: $\sigma_t = 0,01$ s, regra geral para instrumentos digitais. Em virtude da forma como os valores de tempo são obtidos - i.e., apenas olhando e anotando-se o número que aparece no visor - a incerteza associada ao tempo de reação humano não há de ser considerada.

Questão 2.

(a) Aqui, é interessante comentar que, no eixo horizontal do gráfico, é preferível que se identifique e coloque a variável independente (a que controlamos no experimento), e no eixo vertical a variável dependente. No caso da questão, nós controlamos a posição x do sensor, e então medimos o instante t associado a cada posição. Entretanto, seguiremos o comando do enunciado, que pede explicitamente um gráfico de $x \times t$, com a posição x no eixo vertical. Plotando os pontos da tabela 1, obtemos o gráfico abaixo.

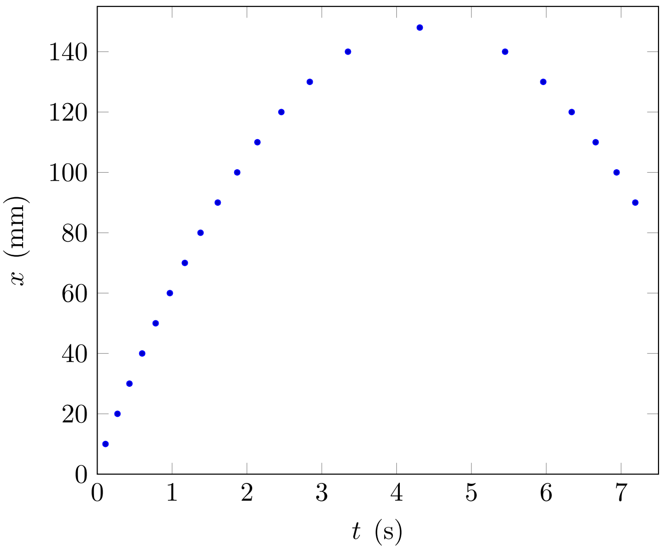

Gráfico 1: Posição versus tempo para o arranjo A

OBS: As barras de erro são desprezíveis são desprezíveis em relação à escala.

Questão 3.

(a) Como indicado pela prova, a estimativa da velocidade instantânea em um instante $t_{c,i}$ é

$$v_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} \tag{1}$$

Onde consideramos $t_{c,i}$ como o tempo no centro do um intervalo entre t_i e t_{i+1}, que é calculado através de

$$t_{c,i} = \frac{t_{i+1} + t_i}{2} \tag{2}$$

Aplicamos as equações (1) e (2) acima aos dados da Tabela 1 para obter as estimativas, que seguem mostradas na Tabela 2 no próximo item.

(b)

Tabela 2: Medidas de tempo e velocidade no arranjo A.

i	$t_{c,i}$(s)	$\sigma_{t_{c,i}}$(s)	v_i(mm/s)	σ_{v_i}(mm/s)
1	0,190	0,007	63	7
2	0,350	0,007	63	7
3	0,515	0,007	59	6
4	0,690	0,007	56	6
5	0,875	0,007	53	5
6	1,070	0,007	50	5
7	1,275	0,007	48	5
8	1,495	0,007	43	4
9	1,740	0,007	38	3
10	2,005	0,007	37	3
11	2,300	0,007	31,3	2,6
12	2,650	0,007	26,3	2,1
13	3,095	0,007	19,6	1,5
14	3,830	0,007	7,5	0,5
15	4,880	0,007	-7,7	0,6
16	5,705	0,007	-19,6	1,5
17	6,150	0,007	-26,3	2,1
18	6,500	0,007	-31,3	2,6
19	6,800	0,007	-36	3
20	7,065	0,007	-40	4

(c) Como visto no item (a) a expressão para um instante do centro de intervalo qualquer é

$$t_{c,i} = \frac{t_{i+1} + t_i}{2} \tag{3}$$

Essa expressão toma uma forma $w(x, y)$ do tipo

$$w(x, y) = a(x \pm y) \tag{4}$$

Onde a é uma constante. A incerteza σ_w em w, se propaga da forma

$$\sigma_w = a\sqrt{(\sigma_x)^2 + (\sigma_y)^2} \tag{5}$$

Portanto, sendo iguais as incertezas $\sigma_{t_i} = \sigma_{t_{i+1}} = 0,01\,s$, temos que:

$$\sigma_{t_{c,i}} = \frac{\sqrt{(\sigma_{t_{i+1}})^2 + (\sigma_{t_i})^2}}{2} = \frac{\sigma_{t_i}\sqrt{2}}{2} \tag{6}$$

A expressão para a velocidade instantânea v_i é

$$v_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} \equiv \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} \tag{7}$$

Obtenhamos as incertezas em Δx_i e Δt_i. Como $\sigma_{x_{i+1}} = \sigma_{x_i} = 0,5\,\text{mm}$ e $\sigma_{t_{i+1}} = \sigma_{t_i} = 0,01\,\text{s}$, temos que

$$\sigma_{\Delta x_i} = \sqrt{(\sigma_{\Delta x_i})^2 + (\sigma_{\Delta x_{i+1}})^2} = \sigma_{x_i}\sqrt{2} \qquad \sigma_{\Delta t_i} = \sqrt{(\sigma_{\Delta t_i})^2 + (\sigma_{\Delta t_{i+1}})^2} = \sigma_{t_i}\sqrt{2} \tag{8}$$

Veja, na equação (7), que v_i possui a forma de uma expressão $w(x, y)$ do tipo

$$w(x, y) = \frac{x}{y} \tag{9}$$

Para a qual a incerteza σ_w em w se propaga da forma

$$\frac{\sigma_w}{w} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2} \tag{10}$$

Logo, encontramos a equação para σ_{v_i}:

$$\frac{\sigma_{v_i}}{v_i} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta x_i}}{\Delta x_i}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta t_i}}{\Delta t_i}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x_i}\sqrt{2}}{\Delta x_i}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{t_i}\sqrt{2}}{\Delta t_i}\right)^2} \tag{11}$$

Usamos as equações (6) e (11) para calcular as incertezas em v_i e $t_{c,i}$, presentes na Tabela 2 do item (b).

Questão 4.

(a)

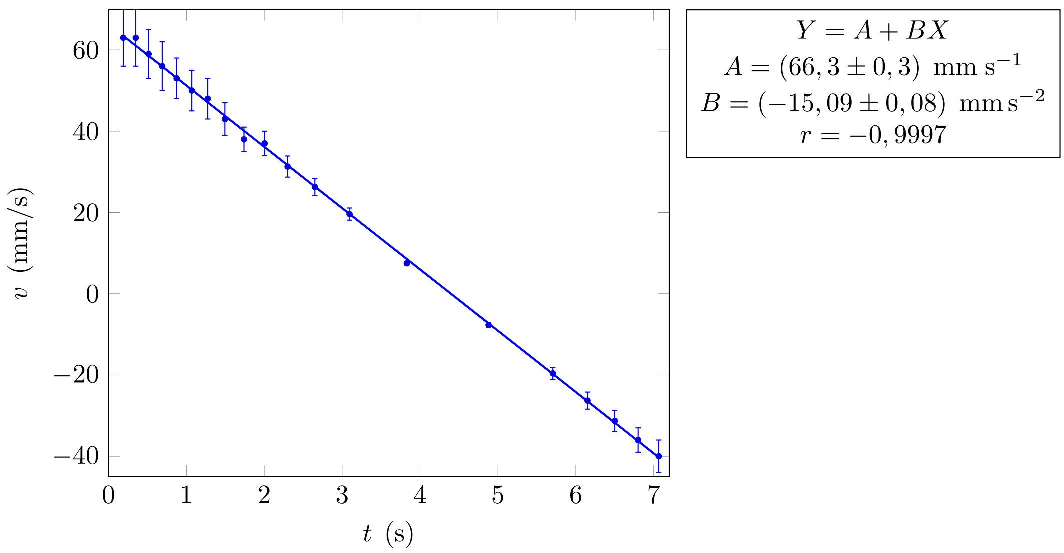

Gráfico 2: Velocidade versus tempo para o arranjo A

OBS: Barras de erro desprezíveis em relação à escala no eixo horizontal.

(b) Utilizamos a regressão linear na calculadora (método dos mínimos quadrados) para calcular a reta que melhor se adequa aos pontos experimentais, a qual está traçada no gráfico. Vale ressaltar que o aluno poderia utilizar também o método gráfico, caso preferisse.

(c) Aos pontos do gráfico ajustamos a melhor reta do tipo

$$Y = A + BX \tag{12}$$

Cujos coeficientes são

$$\boxed{B = (-15,09 \pm 0,08)\ \text{mm}\,\text{s}^{-2}} \qquad \boxed{A = (66,3 \pm 0,3)\ \text{mm}\,\text{s}^{-1}} \tag{13}$$

As incertezas dos coeficientes são calculadas utilizando-se as seguintes equações:

$$\sigma_B = \left| B\sqrt{\frac{\frac{1}{r^2}-1}{N-2}} \right| \qquad \sigma_A = \sigma_B\sqrt{\frac{\sum X_i^2}{N}} \tag{14}$$

Onde N é o número de pontos experimentais, r é o coeficiente de correlação obtido com a calculadora (que figura também no gráfico) e $\Sigma X_i^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + ... + X_N^2$ é o somatório dos quadrados das coordenadas horizontais dos pontos experimentais.

OBS: É válido mencionar o fato de que a OBF, em seu anexo experimental A, usa a notação $Y = B + AX$ para a equação da reta, em vez de $Y = A + BX$. Optamos pela última por ser também a mesma notação usada, em geral, pela calculadora.

Questão 5.

(a) Para encontrar a posição inicial da partícula, x_0, basta medi-la usando o sensor, como mostra a figura 1.

$$x_0 = (3,0 \pm 0,5) \text{ mm} \tag{15}$$

Figura 1: Posição inicial da partícula no arranjo A.

(b) Como fora dito no início da parte I, a partícula se movimenta sob a ação de uma força constante, logo a aceleração da partícula também é constante, então a velocidade em função do tempo obedece à função linear

$$v(t) = v_0 + at \tag{16}$$

Onde v_0 e a são, respectivamente, velocidade inicial e aceleração da partícula, parâmetros que podemos calcular usando os coeficientes da reta ajustada no Gráfico 2 - presentes em (13) - que foram encontrados na questão 4. Comparando (16) com a equação da reta $Y = A + BX$, identificamos

$$v_0 = A = (66,3 \pm 0,3) \text{ mm s}^{-1} \qquad a = B = (-15,09 \pm 0,08) \text{ mm s}^{-2} \tag{17}$$

Mudando as unidades para o SI, a equação horária $v(t)$ da velocidade em função do tempo requerida vem de forma imediata:

$$\boxed{v(t) = [(66,3 \pm 0,3) + (-15,09 \pm 0,08)\, t]\, 10^{-3}\ m/s} \tag{18}$$

Sabemos, também, que a posição da partícula obedece a seguinte função:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \tag{19}$$

Então, encontramos por fim a equação horária $x(t)$ da posição em função do tempo no SI:

$$x(t) = \left[(3,0 \pm 0,5) + (66,3 \pm 0,3)\,t + \frac{(-15,09 \pm 0,08)\,t^2}{2}\right] 10^{-3}\ m \tag{20}$$

OBS: Vale comentar que não era necessário colocar os valores juntamente com as incertezas ao escrever as expressões finais para $v(t)$ e $x(t)$, uma vez que não há uma regra definida para isso: simplesmente preferimos desta forma em nossa solução. Acreditamos que o aluno poderia optar por colocar os parâmetros sem as incertezas na expressão, contanto que deixasse claro em sua solução quais são as incertezas associadas a cada um deles e mantivesse o número de casas decimais apropriadas nos parâmetros calculados - i.e. o mesmo número de casas decimais das incertezas.

Parte II - Movimento da Partícula no Arranjo B

Questão 6.

(a) Realizamos 14 medições de x e t, que estão representadas na tabela 3. A mesma ressalva do item (a) da questão 1 também cabe aqui.

Tabela 3: Medidas de tempo e posição no arranjo B

i	t_i(s)	σ_{t_i}(s)	x_i(mm)	σ_{x_i}(mm)
1	0,11	0,01	10,0	0,5
2	0,27	0,01	20,0	0,5
3	0,45	0,01	30,0	0,5
4	0,63	0,01	40,0	0,5
5	0,84	0,01	50,0	0,5
6	1,06	0,01	60,0	0,5
7	1,30	0,01	70,0	0,5
8	1,57	0,01	80,0	0,5
9	1,87	0,01	90,0	0,5
10	2,22	0,01	100,0	0,5
11	2,61	0,01	110,0	0,5
12	3,09	0,01	120,0	0,5
13	3,67	0,01	130,0	0,5
14	4,43	0,01	140,0	0,5

(b) Aqui, assim como na Parte I, a incerteza na posição x é estimado como a metade da menor medida da régua $\sigma_x = 0,5$ mm, e a incerteza no tempo como a menor medida do cronômetro $\sigma_t = 0,01$ s.

Questão 7.

(a) Plotando os pontos da tabela 3, obtemos o gráfico abaixo.

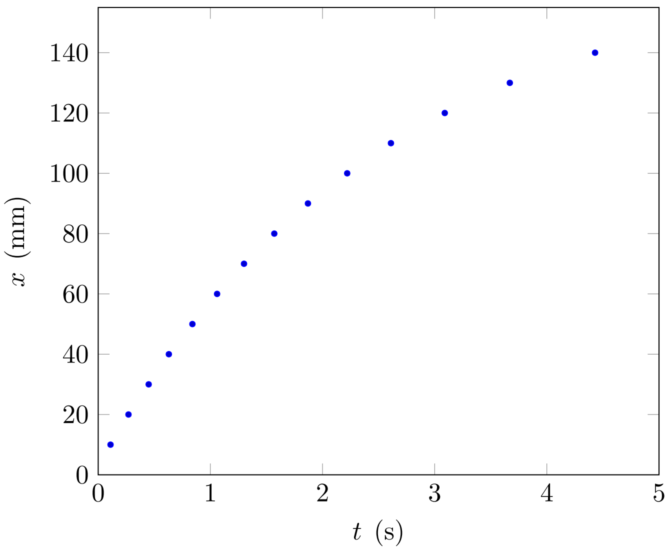

Gráfico 3: Posição versus tempo para o arranjo B

OBS: As barras de erro são desprezíveis em relação à escala.

Questão 8.

(a) Analogamente ao item (a) da questão 3, utilizamos (1) e (2) aplicadas aos valores da Tabela 3 para obter as estimativas, que seguem mostradas na Tabela 4 no próximo item.

(b)

Tabela 4: Medidas de tempo e velocidade no arranjo B

i	$t_{c,i}$(s)	$\sigma_{t_{c,i}}$(s)	v_i(mm/s)	σ_{v_i}(mm/s)
1	0,190	0,007	63	7
2	0,360	0,007	56	6
3	0,540	0,007	56	6
4	0,735	0,007	48	5
5	0,950	0,007	45	4
6	1,180	0,007	42	4
7	1,435	0,007	37	3
8	1,720	0,007	33	3
9	2,045	0,007	28,6	2,3
10	2,415	0,007	25,6	2,0
11	2,850	0,007	20,8	1,6
12	3,380	0,007	17,2	1,3
13	4,050	0,007	13,2	1,0

(c) Analogamente ao item (c) da questão 3, usamos as equações (6) e (12) para o cálculo das incertezas na tabela anterior.

Questão 9.

(a) Plotando os pontos da tabela 4, obtemos o gráfico abaixo.

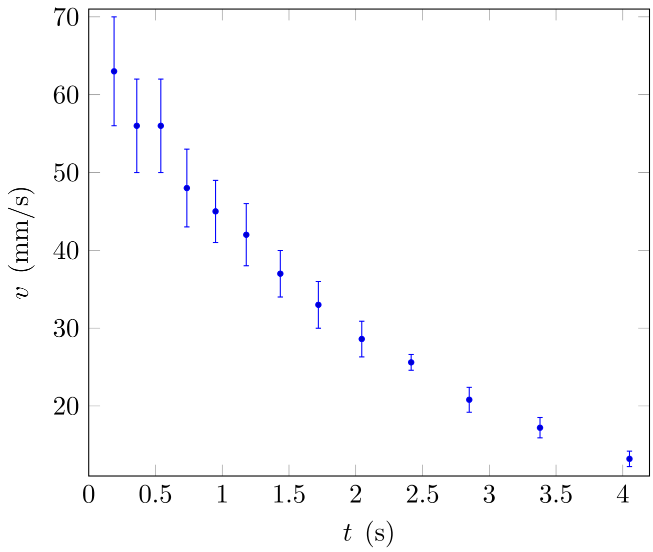

Gráfico 4: Velocidade versus tempo para o arranjo B

OBS: Barras de erro desprezíveis em relação à escala no eixo horizontal.

Questão 10.

(a) Primeiramente, é necessário interpretar a quantidade T_c. O enunciado o define da seguinte forma:

"Seja T_c o instante entre t_1 e t_n."

No entanto, há uma ambiguidade clara nessa definição, que abre margem para basicamente duas possíveis interpretações acerca de T_c. Na primeira, T_c poderia ser pensado como um instante arbitrário entre t_1 e t_n; isto é, $t_1 < T_c < t_n$. Na segunda, que acreditamos ser a mais razoável e pensada pela OBF - e portanto será utilizada por nós – considera-se T_c como o centro do intervalo entre t_1 e t_n, i.e.

$$T_c = \frac{t_1 + t_n}{2} \tag{21}$$

Esse argumento é sustentado pelo fato de que o índice "c" vem sendo usado na prova para denotar um instante de tempo no centro de um dado intervalo de tempo. Para o nosso caso (veja a tabela 3): $t_1 = 0,11\,\text{s}$ e $t_n = t_{14} = 4,43\,\text{s}$, portanto $T_c = 2,27\,\text{s}$. Tendo isso em mente, prossigamos com a solução.

Podemos estimar as acelerações médias de diferentes formas, como a própria prova sugere. Aqui, apresentaremos 3 possíveis métodos para estimar as quantidades requeridas e resolver o problema. Além disso, não iremos estimar incertezas para nenhuma grandeza calculada, uma vez que não foi solicitado pela prova.

Método 1 - Análise direta da tabela

Pela interpretação que utilizaremos, $T_C = \frac{t_1+t_{14}}{2}$. Portanto, temos que $\frac{T_C}{2} = \frac{t_1+t_{14}}{4} = 1,135\,\text{s}$, e utilizando os dados da tabela 4, que são os quais relacionam tempo e velocidade, podemos estimar o $t_{c,6}$ como $\frac{T_C}{2}$ e o $t_{c,1}$ como t_1, já que são os que mais se aproximam. Então:

$$\bar{a}_I = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{t_{c,6}} - v_{t_{c,1}}}{t_{c,6} - t_{c,1}} = \frac{42 - 63}{1,180 - 0,190}\ \text{mm/s}^2 \tag{22}$$

Com isso, obtemos:

$$\boxed{\bar{a}_I = -\frac{21}{0,99}\ \text{mm/s}^2 \approx -21\ \text{mm/s}^2} \tag{23}$$

Método 2 - Análise do gráfico

Nesse método, o estudante teria de analisar o gráfico 4 e, com base nos pontos traçados, tentar traçar uma curva aproximada que melhor se ajustasse. Assim, utilizando essa curva para achar a velocidade aproximada nos instantes t_1 e $\frac{T_C}{2}$, seria possível descobrir a aceleração média nesse intervalo. Na solução que apresentaremos, a curva foi traçada com auxílio do software *Desmos*, e está mostrada na figura abaixo, em azul. Contudo, vale ressaltar que, na prova, tal nível de precisão não seria requerido, já que a curva seria traçada à mão.

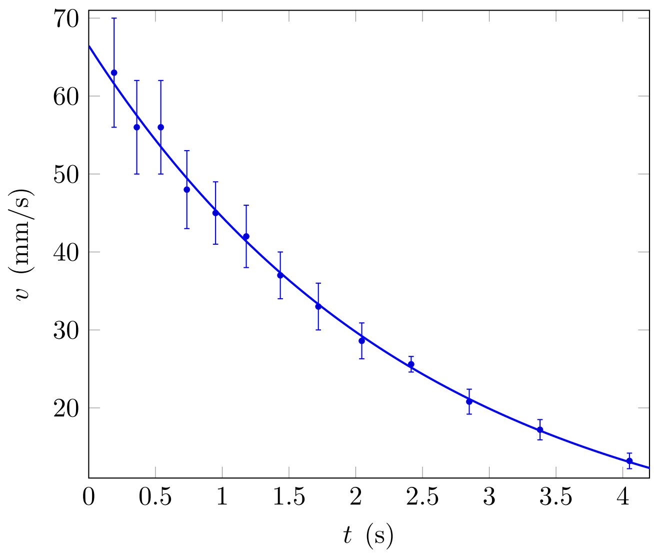

Gráfico 4: Velocidade versus tempo para o arranjo B

Assim, utilizando a curva do software, obtemos que a velocidade em t_1 é $v_{t_1} \approx 64$ mm/s, e em $\frac{T_C}{2}$ é $v_{\frac{T_C}{2}} \approx$ 42 mm/s. Portanto,

$$\boxed{\bar{a}_{II} = \frac{42-64}{1,135-0,11}\ \text{mm/s}^2 \approx -21\ \text{mm/s}^2} \tag{24}$$

OBS: É importante destacar que as estimativas obtidas com esse método podem variar bastante, visto que os valores estimados dependem diretamente da forma com que cada aluno traça essa curva.

Método 3 - Novas medições

Para este método, vamos tirar novas medições, de forma a obter de modo mais preciso a velocidade v_{t_1} em $t_1 = 0,11\,\text{s}$ (associada à $x_1 = 10,0$ mm) e $v_{t_{14}}$ em $t_{14} = 4,43\,\text{s}$ (associada à $x_{14} = 140,0$ mm) bem como a velocidade $v_{\frac{T_c}{2}}$, associada ao instante de tempo $\frac{T_c}{2}$. Para estimar o valor de v_{t_1}, medem-se os instantes que a partícula passa por $x = 5,0$ mm e $x = 15,0$ mm, que correspondem respectivamente a $t = 0,04$ s e $t = 0,20$ s. Encontramos o instante no centro desse intervalo como $t_c = 0,120$ s, que é uma boa aproximação para t_1. Sendo assim, utilizando a equação (1):

$$v_{t_1} = \frac{15,0-5,0}{0,20-0,04}\ \text{mm/s} = 62,5\ \text{mm/s} \tag{25}$$

Na estimativa do valor de $v_{\frac{T_c}{2}}$, medem-se os instantes em que a partícula passa por $x = 48,0$ mm e $x = 58,0$ mm que são respectivamente $t = 1,02$ s e $t = 1,26$ s. Encontramos o tempo no centro desse intervalo como $t_c = 1,14$ s, que é uma boa aproximação $\frac{T_c}{2} = 1,135$ s.

$$v_{\frac{T_c}{2}} = \frac{58,0 - 48,0}{1,26 - 1,02} \text{ mm/s} = 41,67 \text{ mm/s} \tag{26}$$

Portanto, estimamos a aceleração média no intervalo I como sendo:

$$\bar{a}_I = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{\frac{T_c}{2}} - v_{t_1}}{\frac{T_c}{2} - t_1} \tag{27}$$

Substituindo os valores numéricos, obtemos:

$$\boxed{\bar{a}_I = \frac{41,67 - 62,50}{1,135 - 0,110} \text{ mm/s}^2 \approx -20 \text{ mm/s}^2} \tag{28}$$

(b)

Método 1 - Análise direta da tabela

Analogamente ao item anterior, podemos estimar o $t_{c,13}$ como t_{14}. Então:

$$\bar{a}_{II} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{t_{c,13}} - v_{t_{c,6}}}{t_{c,13} - t_{c,6}} = \frac{13,2 - 42}{4,050 - 1,180} \text{mm/s}^2 \tag{29}$$

Com isso, obtemos:

$$\boxed{\bar{a}_{II} = -\frac{28,8}{2,870} \text{ mm/s}^2 \approx -10 \text{ mm/s}^2} \tag{30}$$

Método 2 - Análise do gráfico

Assim como no item anterior, podemos utilizar a curva para obter $v_{t_{14}} \approx 11mm/s$. Portanto,

$$\boxed{\bar{a}_{II} = \frac{11 - 42}{4,43 - 1,135} \text{ mm/s}^2 \approx -9,4 \text{ mm/s}^2} \tag{31}$$

Método 3 - Novas medições

Para estimar o valor de $v_{t_{14}}$, medem-se os instantes que a partícula passa por $x = 134,5$ mm e $x = 144,5$ mm, que são respectivamente $t = 3,99$ s e $t = 4,87$ s. Encontramos o instante no centro desse intervalo como $t_c = 4,43$ s, que é exatamente t_{14}. Então, temos

$$v_{t_{14}} = \frac{144,5 - 134,5}{4,87 - 3,99} \text{ mm/s} = 11,36 \text{ mm/s} \tag{32}$$

Analogamente ao item (a), calculamos a aceleração média no intervalo II como sendo

$$\bar{a}_{II} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{t_{14}} - v_{t_{\frac{T_c}{2}}}}{t_{14} - \frac{T_c}{2}} \tag{33}$$

Substituindo os valores numéricos:

$$\boxed{\bar{a}_{II} = \frac{11,36 - 41,67}{4,870 - 1,135}\ \mathrm{mm/s^2} = -8,1\ \mathrm{mm/s^2}} \tag{34}$$

(c) Ver item (a).

(d) Sendo $\bar{F}_{II}$ e $\bar{F}_I$ as forças resultantes médias em cada um dos intervalos, desejamos calcular a variação relativa dessa quantidade do intervalo I para o II:

$$\frac{\Delta \bar{F}}{\bar{F}_I} = \frac{\bar{F}_{II} - \bar{F}_I}{\bar{F}_I} \tag{35}$$

E, pela 2a lei de Newton ($F = ma$), temos então que:

$$\frac{\Delta \bar{F}}{F_I} = \frac{\Delta \bar{a}}{\bar{a}_I} = \frac{\bar{a}_{II} - \bar{a}_I}{\bar{a}_I} \tag{36}$$

Utilizando os resultados do **Método 1**, e transformando em porcentagem, obtemos:

$$\boxed{\frac{\Delta \bar{a}}{\bar{a}_I} \times 100\% = \frac{-10 - (-21)}{-21} \times 100\% \approx -52\%} \tag{37}$$

Utilizando os resultados do **Método 2**, obtemos:

$$\boxed{\frac{\Delta \bar{a}}{\bar{a}_I} \times 100\% = \frac{-9,4 - (-21)}{-21} \times 100\% \approx -55\%} \tag{38}$$

E, utilizando os resultados do **Método 3**, obtemos:

$$\boxed{\frac{\Delta \bar{a}}{\bar{a}_I} \times 100\% = \frac{-8,1 - (-20)}{-20} \times 100\% \approx -60\%} \tag{39}$$