Comentário NOIC
Prova experimental da 3ª Fase - Nível II

29 DE JANEIRO DE 2022

Escrito por Matheus Felipe R. Borges, Rafael Ribeiro, Wesley Andrade e Ualype de Andrade

Parte I - Movimento da Partícula no Arranjo A

Questão 1.

(a) Sendo x a posição do sensor e t o instante que a partícula o cruza, realizamos 21 medições de x e t, que estão representadas na tabela 1. Vale ressaltar que, na hora da prova, o aluno não precisava realizar tantas medições; levando em conta a duração e extensão da prova, um bom número seria de 8 a 11 medidas, de forma que, posteriormente, o gráfico linearizado ficaria com 7 a 10 pontos experimentais.

Tabela 1: Medidas de tempo e posição no arranjo A.

i	t_i(s)	σ_{t_i}(s)	x_i(mm)	σ_{x_i}(mm)
1	0,11	0,01	10,0	0,5
2	0,27	0,01	20,0	0,5
3	0,43	0,01	30,0	0,5
4	0,60	0,01	40,0	0,5
5	0,78	0,01	50,0	0,5
6	0,97	0,01	60,0	0,5
7	1,17	0,01	70,0	0,5
8	1,38	0,01	80,0	0,5
9	1,61	0,01	90,0	0,5
10	1,87	0,01	100,0	0,5
11	2,14	0,01	110,0	0,5
12	2,46	0,01	120,0	0,5
13	2,84	0,01	130,0	0,5
14	3,35	0,01	140,0	0,5
15	4,31	0,01	148,0	0,5
16	5,45	0,01	140,0	0,5
17	5,96	0,01	130,0	0,5
18	6,34	0,01	120,0	0,5
19	6,66	0,01	110,0	0,5
20	6,94	0,01	100,0	0,5
21	7,19	0,01	90,0	0,5

(b) A incerteza da posição x é estimada como a metade da menor medida (precisão) da régua $\sigma_x = 0,5$ mm, regra geral para instrumentos analógicos. A incerteza nas medições de tempo pode ser considerada como a menor medida (precisão) do cronômetro: $\sigma_t = 0,01$ s, regra geral para instrumentos digitais. Em virtude da forma como os valores de tempo são obtidos - i.e., apenas olhando e anotando-se o número que aparece no visor - a incerteza associada ao tempo de reação humano não há de ser considerada.

Questão 2.

(a) Aqui, é interessante comentar que, no eixo horizontal do gráfico, é preferível que se identifique e coloque a variável independente (a que controlamos no experimento), e no eixo vertical a variável dependente. No caso da questão, nós controlamos a posição x do sensor, e então medimos o instante t associado a cada posição. Entretanto, seguiremos o comando do enunciado, que pede explicitamente um gráfico de $x \times t$, com a posição x no eixo vertical. Plotando os pontos da tabela 1, obtemos o gráfico abaixo.

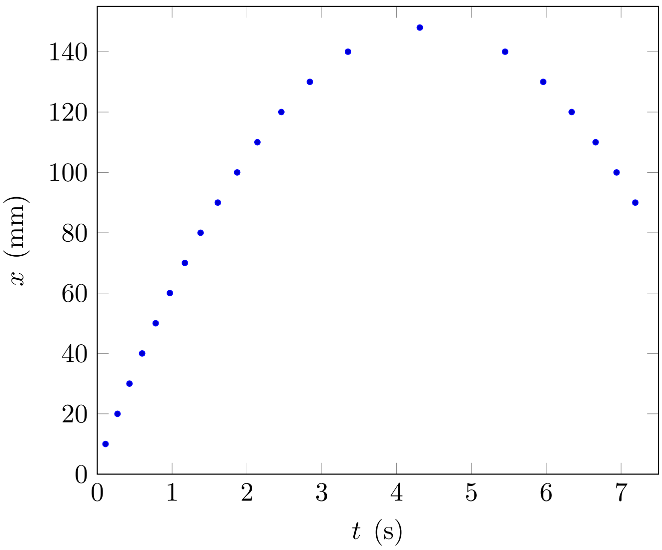


Gráfico 1: Posição versus tempo para o arranjo A

OBS: As barras de erro são desprezíveis são desprezíveis em relação à escala.

Questão 3.

(a) Como indicado pela prova, a estimativa da velocidade instantânea em um instante $t_{c,i}$ é

$$v_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} \tag{1}$$

Onde consideramos $t_{c,i}$ como o tempo no centro do um intervalo entre t_i e t_{i+1}, que é calculado através de

$$t_{c,i} = \frac{t_{i+1} + t_i}{2} \tag{2}$$

Aplicamos as equações (1) e (2) acima aos dados da Tabela 1 para obter as estimativas, que seguem mostradas na Tabela 2 no próximo item.

(b)

Tabela 2: Medidas de tempo e velocidade no arranjo A.

i	$t_{c,i}$(s)	$\sigma_{t_{c,i}}$(s)	v_i(mm/s)	σ_{v_i}(mm/s)
1	0,190	0,007	63	7
2	0,350	0,007	63	7
3	0,515	0,007	59	6
4	0,690	0,007	56	6
5	0,875	0,007	53	5
6	1,070	0,007	50	5
7	1,275	0,007	48	5
8	1,495	0,007	43	4
9	1,740	0,007	38	3
10	2,005	0,007	37	3
11	2,300	0,007	31,3	2,6
12	2,650	0,007	26,3	2,1
13	3,095	0,007	19,6	1,5
14	3,830	0,007	7,5	0,5
15	4,880	0,007	-7,7	0,6
16	5,705	0,007	-19,6	1,5
17	6,150	0,007	-26,3	2,1
18	6,500	0,007	-31,3	2,6
19	6,800	0,007	-36	3
20	7,065	0,007	-40	4

(c) Como visto no item (a) a expressão para um instante do centro de intervalo qualquer é

$$t_{c,i} = \frac{t_{i+1} + t_i}{2} \tag{3}$$

Essa expressão toma uma forma $w(x, y)$ do tipo

$$w(x, y) = a(x \pm y) \tag{4}$$

Onde a é uma constante. A incerteza σ_w em w, se propaga da forma

$$\sigma_w = a\sqrt{(\sigma_x)^2 + (\sigma_y)^2} \tag{5}$$

Portanto, sendo iguais as incertezas $\sigma_{t_i} = \sigma_{t_{i+1}} = 0,01\,s$, temos que:

$$\sigma_{t_{c,i}} = \frac{\sqrt{(\sigma_{t_{i+1}})^2 + (\sigma_{t_i})^2}}{2} = \frac{\sigma_{t_i}\sqrt{2}}{2} \tag{6}$$

A expressão para a velocidade instantânea v_i é

$$v_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} \equiv \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} \tag{7}$$

Obtenhamos as incertezas em Δx_i e Δt_i. Como $\sigma_{x_{i+1}} = \sigma_{x_i} = 0,5\,\text{mm}$ e $\sigma_{t_{i+1}} = \sigma_{t_i} = 0,01\,\text{s}$, temos que

$$\sigma_{\Delta x_i} = \sqrt{(\sigma_{\Delta x_i})^2 + (\sigma_{\Delta x_{i+1}})^2} = \sigma_{x_i}\sqrt{2} \qquad \sigma_{\Delta t_i} = \sqrt{(\sigma_{\Delta t_i})^2 + (\sigma_{\Delta t_{i+1}})^2} = \sigma_{t_i}\sqrt{2} \tag{8}$$

Veja, na equação (7), que v_i possui a forma de uma expressão $w(x, y)$ do tipo

$$w(x, y) = \frac{x}{y} \tag{9}$$

Para a qual a incerteza σ_w em w se propaga da forma

$$\frac{\sigma_w}{w} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2} \tag{10}$$

Logo, encontramos a equação para σ_{v_i}:

$$\frac{\sigma_{v_i}}{v_i} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta x_i}}{\Delta x_i}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta t_i}}{\Delta t_i}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{x_i}\sqrt{2}}{\Delta x_i}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{t_i}\sqrt{2}}{\Delta t_i}\right)^2} \tag{11}$$

Usamos as equações (6) e (11) para calcular as incertezas em v_i e $t_{c,i}$, presentes na Tabela 2 do item (b).

Questão 4.

(a)

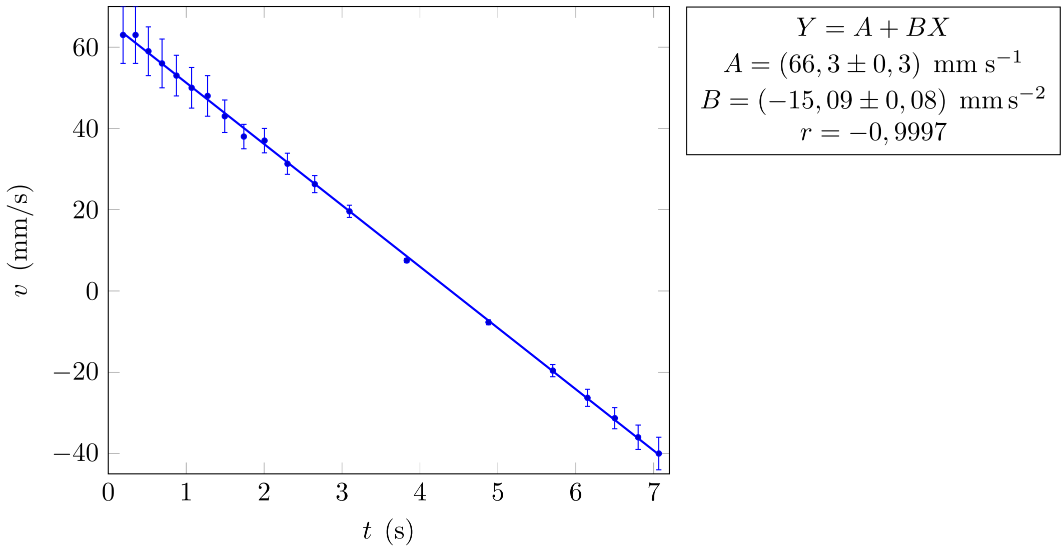


Gráfico 2: Velocidade versus tempo para o arranjo A.

OBS: Barras de erro desprezíveis em relação à escala no eixo horizontal.

(b) Utilizamos a regressão linear na calculadora (método dos mínimos quadrados) para calcular a reta que melhor se adequa aos pontos experimentais, a qual está traçada no gráfico. Vale ressaltar que o aluno poderia utilizar também o método gráfico, caso preferisse.

(c) Aos pontos do gráfico ajustamos a melhor reta do tipo

$$Y = A + BX \tag{12}$$

Cujos coeficientes são

$$\boxed{B = (-15,09 \pm 0,08)\ \mathrm{mm\,s^{-2}}} \qquad \boxed{A = (66,3 \pm 0,3)\ \mathrm{mm\,s^{-1}}} \tag{13}$$

As incertezas dos coeficientes são calculadas utilizando-se as seguintes equações:

$$\sigma_B = \left| B\sqrt{\frac{\frac{1}{r^2}-1}{N-2}} \right| \qquad \sigma_A = \sigma_B\sqrt{\frac{\sum X_i^2}{N}} \tag{14}$$

Onde N é o número de pontos experimentais, r é o coeficiente de correlação obtido com a calculadora (que figura também no gráfico) e $\Sigma X_i^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + ... + X_N^2$ é o somatório dos quadrados das coordenadas horizontais dos pontos experimentais.

OBS: É válido mencionar o fato de que a OBF, em seu anexo experimental A, usa a notação $Y = B + AX$ para a equação da reta, em vez de $Y = A + BX$. Optamos pela última por ser também a mesma notação usada, em geral, pela calculadora.

Questão 5.

(a) Para encontrar a posição inicial da partícula, x_0, basta medi-la usando o sensor, como mostra a figura 1.

$$x_0 = (3,0 \pm 0,5) \text{ mm} \tag{15}$$

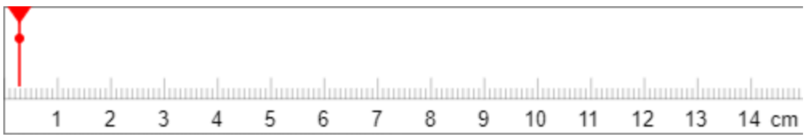


Figura 1: Posição inicial da partícula no arranjo A.

(b) Como fora dito no início da parte I, a partícula se movimenta sob a ação de uma força constante, logo a aceleração da partícula também é constante, então a velocidade em função do tempo obedece à função linear

$$v(t) = v_0 + at \tag{16}$$

Onde v_0 e a são, respectivamente, velocidade inicial e aceleração da partícula, parâmetros que podemos calcular usando os coeficientes da reta ajustada no Gráfico 2 - presentes em (13) - que foram encontrados na questão 4. Comparando (16) com a equação da reta $Y = A + BX$, identificamos

$$v_0 = A = (66,3 \pm 0,3)\ \text{mm s}^{-1} \qquad a = B = (-15,09 \pm 0,08)\ \text{mm s}^{-2} \tag{17}$$

Mudando as unidades para o SI, a equação horária $v(t)$ da velocidade em função do tempo requerida vem de forma imediata:

$$\boxed{v(t) = [(66,3 \pm 0,3) + (-15,09 \pm 0,08)\, t]\, 10^{-3}\ m/s} \tag{18}$$

Sabemos, também, que a posição da partícula obedece a seguinte função:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \tag{19}$$

Então, encontramos por fim a equação horária $x(t)$ da posição em função do tempo no SI:

$$\boxed{x(t) = \left[(3,0 \pm 0,5) + (66,3 \pm 0,3)\, t + \frac{(-15,09 \pm 0,08)\, t^2}{2}\right] 10^{-3}\; m} \tag{20}$$

OBS: Vale comentar que não era necessário colocar os valores juntamente com as incertezas ao escrever as expressões finais para $v(t)$ e $x(t)$, uma vez que não há uma regra definida para isso: simplesmente preferimos desta forma em nossa solução. Acreditamos que o aluno poderia optar por colocar os parâmetros sem as incertezas na expressão, contanto que deixasse claro em sua solução quais são as incertezas associadas a cada um deles e mantivesse o número de casas decimais apropriadas nos parâmetros calculados - i.e. o mesmo número de casas decimais das incertezas.

Parte II - Movimento da Partícula no Arranjo B

Questão 6.

(a) Realizamos 14 medições de x e t, que estão representadas na tabela 3. A mesma ressalva do item (a) da questão 1 também cabe aqui.

Tabela 3: Medidas de tempo e posição no arranjo B

i	t_i(s)	σ_{t_i}(s)	x_i(mm)	σ_{x_i}(mm)
1	0,11	0,01	10,0	0,5
2	0,27	0,01	20,0	0,5
3	0,45	0,01	30,0	0,5
4	0,63	0,01	40,0	0,5
5	0,84	0,01	50,0	0,5
6	1,06	0,01	60,0	0,5
7	1,30	0,01	70,0	0,5
8	1,57	0,01	80,0	0,5
9	1,87	0,01	90,0	0,5
10	2,22	0,01	100,0	0,5
11	2,61	0,01	110,0	0,5
12	3,09	0,01	120,0	0,5
13	3,67	0,01	130,0	0,5
14	4,43	0,01	140,0	0,5

(b) Aqui, assim como na Parte I, a incerteza na posição x é estimado como a metade da menor medida da régua $\sigma_x = 0,5$ mm, e a incerteza no tempo como a menor medida do cronômetro $\sigma_t = 0,01$ s.

Questão 7.

(a) Plotando os pontos da tabela 3, obtemos o gráfico abaixo.

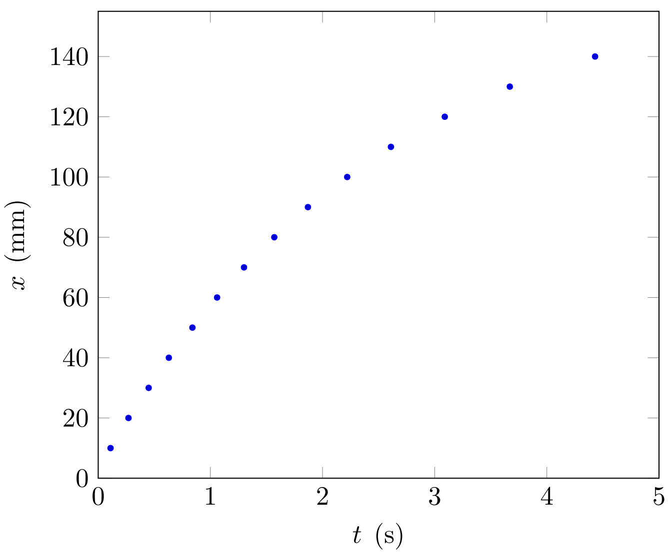


Gráfico 3: Posição versus tempo para o arranjo B

OBS: As barras de erro são desprezíveis em relação à escala.

Questão 8.

(a) Analogamente ao item (a) da questão 3, utilizamos (1) e (2) aplicadas aos valores da Tabela 3 para obter as estimativas, que seguem mostradas na Tabela 4 no próximo item.

(b)

Tabela 4: Medidas de tempo e velocidade no arranjo B

i	$t_{c,i}$(s)	$\sigma_{t_{c,i}}$(s)	v_i(mm/s)	σ_{v_i}(mm/s)
1	0,190	0,007	63	7
2	0,360	0,007	56	6
3	0,540	0,007	56	6
4	0,735	0,007	48	5
5	0,950	0,007	45	4
6	1,180	0,007	42	4
7	1,435	0,007	37	3
8	1,720	0,007	33	3
9	2,045	0,007	28,6	2,3
10	2,415	0,007	25,6	2,0
11	2,850	0,007	20,8	1,6
12	3,380	0,007	17,2	1,3
13	4,050	0,007	13,2	1,0

(c) Analogamente ao item (c) da questão 3, usamos as equações (6) e (12) para o cálculo das incertezas na tabela anterior.

Questão 9.

(a) Conforme fornecido no início da Parte II, a expressão para a velocidade da partícula do arranjo B em função do tempo é

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = v_0 e^{-t/\tau} \tag{21}$$

Para obter a equação de movimento, iremos encontrar τ e v_0 a partir de um gráfico linear. De forma a extrair a relação linear apropriada entre v e t, devemos aplicar o logaritmo natural ln em ambos os lados da equação. Vale comentar que a representação $\ln(v)$ não está necessariamente errada (usaremos ela posteriormente por simplicidade); no entanto, como o ln é uma quantidade adimensional, é preferível tornar ambos os membros da equação adimensionais para fins de esclarecimento e coerência matemática, e faremos isso dividindo ambos os lados da equação por $1\,\mathrm{mm/s}$ (a unidade utilizada nas medições de velocidade). Desta forma, temos

$$\ln\left(\frac{v}{1\,\mathrm{mm/s}}\right) = \ln\left(\frac{v_0 e^{-t/\tau}}{1\,\mathrm{mm/s}}\right) \tag{22}$$

Lembre-se que as propriedades de logaritmos nos dizem que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, logo

$$\ln\left(\frac{v}{1\,\mathrm{mm/s}}\right) = \ln\left(\frac{v_0}{1\,\mathrm{mm/s}}\right) + \ln\left(e^{-t/\tau}\right) \tag{23}$$

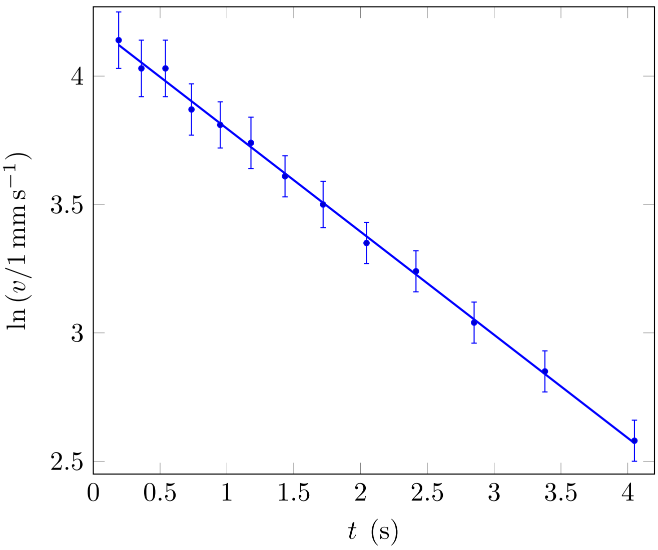
E também, vale que $\ln(a^m) = m\ln(a)$. Com isso, chegamos na expressão linearizada:

$$\boxed{\ln\left(\frac{v}{1\,\mathrm{mm/s}}\right) = \ln\left(\frac{v_0}{1\,\mathrm{mm/s}}\right) - \frac{1}{\tau}t} \tag{24}$$

(b) Veja que a equação obtida em (a) toma a forma $Y = AX + B$, com $Y \to \ln(v)$ e $X \to t$. Motivado por isso, plotaremos então nossos pontos experimentais $(t_{c,i}, \ln v_i)$ em um gráfico de $\ln(v)$ versus t, aos quais então ajustaremos uma reta para calcular apropriadamente as quantidades v_0 e τ. Na tabela abaixo, seguem os cálculos das grandezas linearizadas.

Tabela 5: Medidas de tempo e velocidade linearizadas no arranjo B

i	$t_{c,i}$(s)	$\sigma_{t_{c,i}}$(s)	$\ln(v_i/1\,\mathrm{mm\,s^{-1}})$	$\sigma_{\ln v_i}$
1	0,190	0,007	4,14	0,11
2	0,360	0,007	4,03	0,11
3	0,540	0,007	4,03	0,11
4	0,735	0,007	3,87	0,10
5	0,950	0,007	3,81	0,09
6	1,180	0,007	3,74	0,10
7	1,435	0,007	3,61	0,08
8	1,720	0,007	3,50	0,09
9	2,045	0,007	3,35	0,08
10	2,415	0,007	3,24	0,08
11	2,850	0,007	3,04	0,08
12	3,380	0,007	2,85	0,08
13	4,050	0,007	2,58	0,08



$Y = A + BX$
$A = 4,198 \pm 0,011$
$B = -(0,402 \pm 0,006)\ \mathrm{s^{-1}}$
$r = -0,9989$

Gráfico 4: Relação linearizada entre v e t

(c) Na forma linearizada, a incerteza de $t_{c,i}$ continua como calculado na questão anterior. Para $\ln(v_i)$, veja que essa quantidade possui a forma de uma expressão $w(x)$

$$w(x) = \ln(x) \tag{25}$$

Para a qual a incerteza σ_w em w se propaga da forma

$$\sigma_w = \frac{\sigma_x}{x} \tag{26}$$

Portanto, no item anterior, a incerteza de $\ln(v_i)$ é calculada fazendo

$$\sigma_{\ln v_i} = \frac{\sigma_{v_i}}{v_i} \tag{27}$$

(d) Utilizamos a regressão linear na calculadora (método dos mínimos quadrados) para calcular a reta que melhor se adequa aos pontos experimentais, a qual está traçada no gráfico. Vale ressaltar que o aluno poderia utilizar também o método gráfico, caso preferisse.

(e) Considerando que a reta é do tipo

$$Y = A + BX \tag{28}$$

Os coeficientes são

$$\boxed{B = (-0,402 \pm 0,006)\ \text{s}^{-1}} \qquad \boxed{A = 4,198 \pm 0,011} \tag{29}$$

As incertezas dos coeficientes são calculadas mediante (14).

Questão 10.

(a) Fazendo a devida correspondência da nossa equação teórica (24) com a reta ajustada $Y = AX + B$, temos:

$$A = \ln\left(\frac{v_0}{1\ \text{mm/s}}\right) \qquad B = -\frac{1}{\tau} \tag{30}$$

Sendo assim, obtemos expressões para v_0 e τ em termos dos parâmetros da reta:

$$v_0 = e^A\ \text{mm/s} \qquad \tau = -\frac{1}{B} \tag{31}$$

E, para obter as incertezas σ_{v_0} e σ_τ, temos de utilizar a propagação de incertezas:

$$\sigma_{v_0} = e^A \sigma_A\ \text{mm/s} = e^{4,198} * 0,011 = 0,7\ \text{mm/s} \tag{32}$$

$$\sigma_\tau = |(-1) * B^{-2}|\sigma_B = \frac{\sigma_B}{B^2} = \frac{0,006}{(-0,402)^2} = 0,04\ \text{s} \tag{33}$$

Então, calculamos:

$$\boxed{v_0 = (66,6 \pm 0,7)\ \text{mm/s}} \qquad \boxed{\tau = (2,49 \pm 0,04)\,\text{s}} \tag{34}$$

(b) A função horária é

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{35}$$

Substituindo v_0 e τ da equação (34), e transferindo para unidades do SI, obtemos, por fim:

$$\boxed{v(t) = (66,6 \pm 0,7) \exp\left(-\frac{t}{2,49 \pm 0,04}\right)\ 10^{-3}\,\text{m/s}} \tag{36}$$