Teorema de Brianchon

João Gilberti

August 28, 2023

Introdução

É necessário que o aluno tenha noções básicas de geometria projetiva para entender o material, como projetar de retas em retas, de retas em círculos, polo e polar, etc.

O Teorema de Brianchon é conhecido como o Dual do Teorema de Pascal (que foi abordado em outro material). Dizemos em geometria projetiva que uma figura é dual da outra quando basicamente trocamos pontos por retas e retas por pontos. Neste caso, por exemplo, colinearidades viram concorrências, e se a interseção de duas retas r, s é P, então P vira a reta passando pelos ”pontos” r, s.

Na verdade, em olimpíadas, o conceito de dualidade em si é pouco usado, e por isso vamos focar no teorema em si, que será anunciado a seguir e cuja demonstração reside no fato de que é o dual de Pascal.

É importante saber a existência desse teorema, mas vale salientar que ele não é cobrado tanto em olimpíadas. Num geral, os problemas que usam ele em uma passagem da solução são bem difíceis, então não se sinta mal caso não consiga resolver os problemas propostos.

(Teorema de Brianchon) Seja $ABCDEF$ um hexágono circunscritível. Então AD, BE, CF concorrem.

P.S: A aplicação do teorema muitas vezes ocorre no caso degenerado dele, onde ao invés de um hexágono, usamos pentágonos ou até mesmo quadriláteros.

Vamos aos problemas!

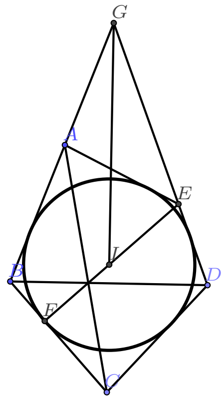
(G1 IMO Shortlist 2017) Seja $ABCDE$ um pentágono tal que $AB = BC = CD$, $\angle EAB = \angle BCD$, $\angle EDC = \angle CBA$. Prove que a perpendicular de E a BC, AC, BD concorrem.

Solução:

A ideia desse problema é interpretar o que essa condição esquisita de ângulo nos diz sobre a figura. Como construir o ponto E, por exemplo, é uma pergunta que pode ajudar na solução do problema. Seja I o encontro das bissetrizes de B, C no pentágono. Note que pela condição dada, $\angle IAB = \angle ICB$, e como $\angle EAB = \angle DCB$, IA é bissetriz de $\angle A$. Analogamente, está na bissetriz de $\angle D$.

A condição de ângulos também implica que, se $G = AB \cap ED$, então G está na mediatriz de BD, e como I está nessa mediatriz, IG bissecta $\angle BGD$. Olhando agora para o triângulo GAE, I é o exincentro deste triângulo, e portanto está na bissetriz de E no pentágono. Isso serviu só para mostrarmos que as 5 bissetrizes concorrem, então o pentágono é circunscritível! Ou seja, existe um círculo tangente a todos os lados dele.

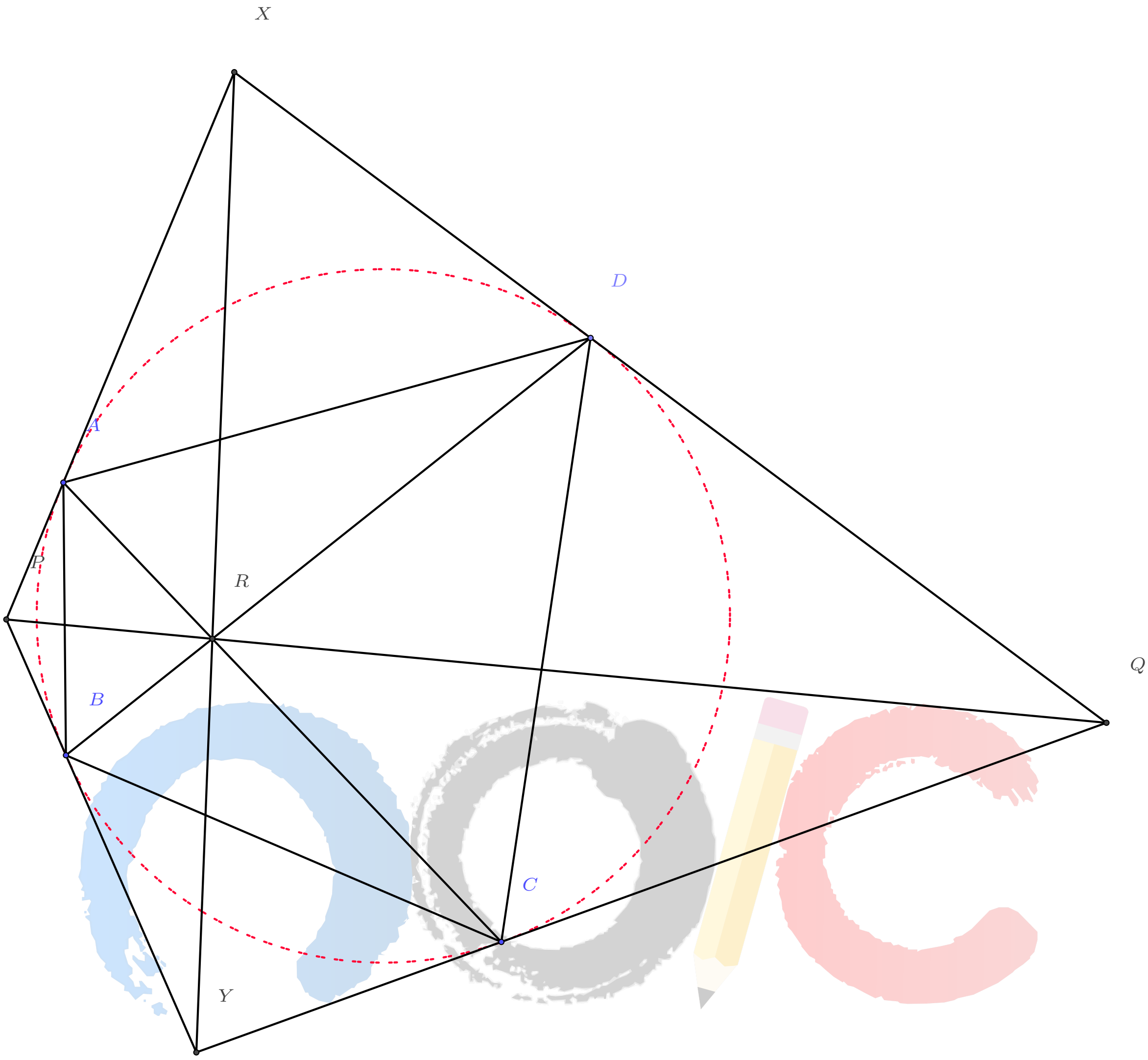
Por fim, seja F o pé da altura de E em BC. Note que $\angle FIB = 90 - B/2$ $\angle BIE = 90 + B/2$ (por marcação de ângulos no fato de que I é o exincentro mencionado). Portanto, como $\angle BIE + \angle FIB = 180$, I, F, E são colineares. Agora, basta usar o teorema de brianchon no hexágono degenerado $ABFCDE$.



(Lema das tangentes) Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico cujas diagonais se encontram em P. Seja Q o encontro das tangentes por A, B ao círculo $ABCD$. Seja R o encontro das tangentes por C, D ao círculo $ABCD$. Prove que P, Q, R são colineares.

Solução:

A ideia aqui é pegar os outros pontos de contato das tangentes (X é o encontro da tangente por A com a de D, Y é o encontro da tangente por B com a por C) formando um quadrilátero circunscritível P, X, Q, Y. Daí, basta usar brianchon no hexágono degenerado $PAXQCY$ e temos que PQ, AC, XY concorrem. Similarmente, a diagonal BD passa por esse encontro (encontre o outro hexágono, é um bom exercício). Portanto, P, Q, R são colineares.

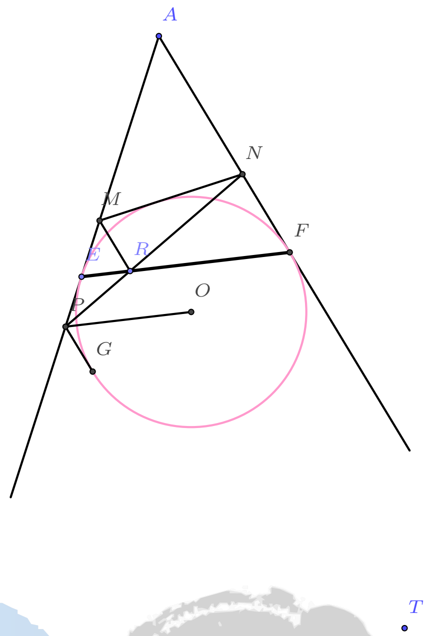


(APMO 2016/3) Sejam AB e AC dois segmentos distintos que não colineares, e seja ω um círculo com centro O que é tangente ao raio AC em E e ao raio AB em F. Seja R um ponto no segmento EF. A reta que passa por O paralela a EF toca a reta AB em P. Seja N a interseção das retas PR e AC, e seja M a interseção da reta AB e a reta que passa por R paralela a AC. Prove que a reta MN é tangente a ω.

Solução:

Essa solução é mais curta que o próprio problema, e a ideia dela é focar no paralelismo para projetar pelo ponto do infinito: Seja T_∞ o ponto infinito em AF. De $OP \parallel EF$, temos que a segunda tangente de P a $\odot(O)$ é paralela a AF, então a partir do inverso do teorema de Brianchon para o hexágono degenerado $MEPT_\infty FN$ concluímos que MN é tangente a ω., já que MT_∞, PN, EF concorrem.

Esse problema é difícil pois olhar para o hexágono com o ponto do infinito não é uma ideia nada comum. Coloquei como exemplo para o leitor guardar essa ideia que é maravilhosa!



Problemas Propostos

1. Seja ω o círculo de ABC. P e Q estão em AB e AC, de modo que PQ é paralelo a BC e é tangente a ω. AB, AC tocam ω em F, E. Prove que se M é o ponto médio de PQ, e T é o ponto de interseção de EF e BC, então TM é tangente a ω.

2. Seja $ABCD$ o quadrado circunscrito a ω. Suponha que os pontos médios dos lados AD e DC sejam M e L, respectivamente. Considere os pontos P e Q em CL e BC tais que $AQ \parallel MP$. Prove que PQ é tangente a ω.

3. O incírculo de um triângulo ABC toca BC, AC, AB em D, E, F respectivamente, P é um ponto de EF e BP, CP inserem AC, AB em K, L. Se $DP \perp EF$, prove que KL é tangente ao círculo interno.