Pulo de Vieta e o Problema 6 da IMO de 1988

Por Matheus Alencar

1 Uma História a ser contada

Vamos começar esse material com uma história: A "lenda" de uma das técnicas mais conhecidas de olimpíadas de matemática!

A primeira vez que um problema de pulo de vieta foi proposto em uma olimpíada foi em *1988*, na IMO. Antes do problema ser colocado na prova, ele foi testado por uma equipe de 6 pessoas que estavam escolhendo os problemas da prova: Nenhum dos 6, depois de horas pensando, conseguiram resolver o problema na lista. Entre as pessoas testando, estavam os dois incrivelmente famosos George e Esther Szekeres. Um casal de matemáticos conhecido por resolver e criar problemas difíceis não só para olimpíadas.
Depois disso, o problema foi enviado para os 4 mais conhecidos especialistas em teoria dos números da Austrália. Disseram para eles tentarem pensar no problema por 6 horas e avisassem caso conseguissem resolver o problema. De novo, nenhum deles conseguiu resolver o problema.

Assim, o problema foi marcado como extremamente difícil na shortlist (A lista de problemas da IMO) e, mesmo assim, escolheram o problema para entrar na prova depois de muita discussão. Só 11 pessoas no mundo conseguiram resolver completamente o problema! Entre os que não resolveram esse problema estava o conhecido matemático Terence Tao (Conhecido hoje por ser uma das pessoas mais inteligentes do mundo) e Jordan Ellenberg, que fechou a IMO em 1987 e 1989.

Uma história assustadora, não? Mas, por incrível que pareça, o Pulo de vieta é uma técnica estranhamente simples! Na minha opinião, essa história só mostra o quanto criar técnicas novas pode ser muito difícil na matemática. Então qualquer ideia não usual, mesmo em olimpíadas é um avanço (e tanto!) para a matemática!

2 O problema *lendário*

P6 IMO 1988

Sejam a e b inteiros positivos tais que $ab+1$ divide a^2+b^2. Mostre que

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$$

É um quadrado perfeito.

Solução: Vamos chamar o valor da fração de k, ou seja, $\frac{a^2+b^2}{ab+1}=k$. Assim,

$$a^2+b^2=kab+k \implies a^2-akb+b^2-k=0$$

Isso te lembra alguma coisa? Do jeito que escrevemos, se fixarmos b, temos uma equação do segundo grau!.
Bom, primeiramente, com certeza a é uma das raízes dela. Chamaremos a outra de a'. Pelas relações de Girard, sabemos que

$$a+a'=kb$$
$$a\cdot a'=b^2-k$$

Assim, veja que, como $a'=kb-a \implies a'\in\mathbb{Z}$. Logo, o par (a',b) é um par de inteiros que satisfaz a equação

$$\frac{a'^2+b^2}{a'b+1}=k$$

Vejamos que a' não pode ser negativo também, pois, caso ele fosse, $a'b+1 \leq -1+1=0$, mas

$$a'b+1 \neq 0 \implies a'b+1<0 \implies 0>\frac{a'^2+b^2}{a'b+1}=k$$

Então $k<0$, que é um absurdo, pois $\frac{a^2+b^2}{ab+1}=k>0$. Assim, será que conseguimos construir outra solução para um par de inteiros positivos (a,b) cumprindo o enunciado? Quase! ainda pode ser que o $a'=0$. Mas caso isso acontecesse,
como $0=a\cdot a'=b^2-k \implies k=b^2 \implies k$ é quadrado perfeito! Então, supondo por absurdo que k não é um quadrado perfeito, temos outra solução de inteiros positivos!

Mas até agora isso parece muito inútil, certo? O problema quer que só exista uma família específica de soluções, e até agora tudo o que fizemos é garantir que devem existir muitas soluções se existe ao menos uma. Isso tá bem longe de ser o que o problema quer.
Mas aí é que o pulo de vieta entra! O que gerar uma solução a partir de outra tem de legal? se eu conseguir gerar uma solução com um $a+b$ menor sempre, teremos varios inteiros positivos menores que outros, infinitamente isso claramente vai dar errado, até porque existem finitos inteiros positivos menores que o $a+b$ original.
Assim, mesmo que ele só vá diminuindo de 1 em 1, teremos um absurdo! Isso que é o famoso pulo de vieta, essa técnica de gerar soluções para conseguir um absurdo.
Agora vejamos como podemos alcançar nosso objetivo, claramente, como a divisibilidade é simétrica, podemos supor sem perda de generalidade que $a \geq b$. Logo,

$$a'=\frac{b^2-k}{a}<\frac{b^2}{a}\leq\frac{a^2}{a}=a$$

Assim, $a'+b<a+b$. Uma solução com soma dos dois termos menor! Como queríamos, assim, não podemos supor que k não é quadrado perfeito! Como queríamos demonstrar!
Nota: Geralmente, ao invés de diminuir infinitamente a soma dos termos nós supomos que (a,b) é a solução com $a+b$ mínimo, e então diminuímos a soma. Isso dá um absurdo mais rápido com menos argumentos. Porém, para propósitos de mostrar a ideia, achamos que seria melhor apresentá-la assim

3 Problemas menos conhecidos, mas também muito bons

(P5 IMO 2007) Sejam a e b inteiros positivos tais que

$$4ab-1 \mid (4a^2-1)^2$$

Prove que $a=b$.

Suponha, por absurdo, que existe uma solução com $a \neq b$ vamos pegar a solução com menor $a+b$.
Vejamos que $4ab \equiv 1 \pmod{4ab-1} \implies 16a^2b^2=(4ab)^2 \equiv 1$

$$\implies 4ab-1 \mid (4a^2-1)^2 \implies 4ab-1 \mid (4a^2-16a^2b^2)^2=(4a^2)^2(1-4b^2)$$

Como $mdc(4a^2, 4ab-1)=1$,

$$\implies 4ab-1 \mid (4b^2-1)^2$$

Assim, $4ab-1 \mid (4a^2-1)^2 \iff 4ab-1 \mid (4b^2-1)^2$. Logo, acabamos de provar que a afirmação é simétrico em relação a a e b. Então podemos assumir sem perda de generalidade que $a<b$.
Agora, vamos tentar fazer o pulo de vieta, como conseguimos construir uma nova solução?
Veja que $\frac{(4a^2-1)^2}{4ab-1}=4ab'-1$, onde $b' \in \mathbb{N}$. Pois $(4a^2-1)^2 \equiv 1 \pmod{4a}$ e
$4ab-1 \equiv -1 \pmod{4a} \implies \frac{(4a^2-1)^2}{4ab-1} \equiv \frac{1}{-1}=-1.$
Basta provar então que $b'<b$. Veja que se $b' \geq b$

$$\implies (4a^2-1)^2=(4ab-1)(4ab'-1) \geq (4ab-1)^2$$

Mas $4ab-1>4a^2-1 \rightarrow$ *Abs!*
Assim, provamos que $b'<b$, logo, $a+b'<a+b$, porém, (a,b) era pra ser, por definição, a solução

minimal do problema. Logo, não existem soluções além de $a = b$, como queríamos demonstrar.

(P5 OBM 2021) Ache todas as triplas (a,b,c) de inteiros não negativos tais que

$$a^2 + b^2 + c^2 = abc + 1$$

Solução: Suponhamos por absurdo que exista uma solução em que $abc \neq 0$. Seja (a, b, c) tal solução minimal (com menor $a + b + c$) e $a \geq b \geq c$.
Vejamos que

$$3a^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 = abc + 1 > abc \implies 3a > bc$$

$$\implies 2a^2 + 3a > 2a^2 + bc \geq a^2 + b^2 + c^2 = abc + 1 > abc \implies 2a + 3 > bc$$

Além disso, se tomarmos a segunda solução a' da equação de segundo grau

$$a^2 - a(bc) + b^2 + c^2 - 1 = 0$$

Teremos que $aa' = b^2 + c^2 - 1 \geq 1 + 1 - 1 > 0 \implies a'$ é maior que 0. E que $bc = a + a' \geq 2a$, pela minimalidade de (a, b, c).
Assim, $2a + 3 > bc \geq 2a \implies$ só existem 3 valores possíveis para bc: $2a$,$2a + 1$ ou $2a + 2$

Caso 1: ($bc = 2a$)

$$\implies a = \frac{bc}{2} \implies b^2 + c^2 - 1 = a^2 = \frac{(bc)^2}{2} (\cdot 4)$$

$$\implies 4b^2 + 4c^2 - 4 = b^2c^2 \implies b^2(c^2 - 4) = 4c^2 - 4 \implies \frac{4c^2 - 4}{c^2 - 4} - 4 = b^2 - 4 \in \mathbb{Z} \implies \frac{12}{c^2 - 4} \in \mathbb{Z}$$

Assim,

$$c^2 - 4 \in \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

Deixamos a cargo do leitor, mas nenhum desses casos dá uma solução!

Caso 2: ($bc = 2a + 2$)

$$\implies a = \frac{bc - 1}{2} \implies b^2 + c^2 - 1 = a(bc - a) = \frac{bc - 1}{2} \cdot \frac{bc + 1}{2} (\cdot 4)$$

$$\implies 4b^2 + 4c^2 - 4 = b^2c^2 - 1 \implies b^2(c^2 - 4) = 4c^2 - 3 \implies \frac{4c^2 - 3}{c^2 - 4} - 4 = b^2 - 4 \in \mathbb{Z} \implies \frac{13}{c^2 - 4} \in \mathbb{Z}$$

Assim,

$$c^2 - 4 \in \{-13, -1, 1, 13\}$$

Nenhum desses casos dá solução para c!
Caso 3:($bc = 2a + 3$)

$$\implies a = \frac{bc - 2}{2} \implies b^2 + c^2 - 1 = a(bc - a) = \frac{bc - 2}{2} \cdot \frac{bc + 2}{2} = \frac{b^2c^2 - 4}{2} (\cdot 4)$$

$$\implies b^2c^2 - 4b^2 = 4c^2 \implies \frac{4c^2}{c^2 - 4} - 4 = b^2 - 4 \in \mathbb{Z} \implies \frac{16}{c^2 - 4} \in \mathbb{Z}$$

$$\implies c^2 - 4 \in \{-16, -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8, 16\}$$

A única solução inteira dessa equação é $c = 0 \rightarrow$ *Abs*!

Se x e y são inteiros positivos tais que $xy \mid x^2 + y^2 + 1$, ache os possíveis valores de

$$\frac{x^2 + y^2 + 1}{xy}$$

Solução: Seja $\dfrac{x^2+y^2+1}{xy} = k,\ k \in \mathbb{Z}$ assumimos que $(x{,}y)$ é a solução minimal de tal equação, com $x > y$
Vejamos que

$$x^2 - kxy + y^2 + 1 = 0$$

A outra solução da equação é $x' = \dfrac{y^2+1}{x} \leq \dfrac{x^2+1}{x+1} < x$

$$\implies x' + y < x + y \rightarrow \textit{Abs!}$$

Mas... Absurdo? Não era pra ter pelo menos uma solução?
Você viu algo que não podíamos assumir? Isso mesmo, assumimos que a solução minimal tem $x > y$, eles ainda poderiam ser iguais! Assim, temos que $x = y \implies x^2 \mid x^2 + x^2 + 1 \implies x^2 \mid 1 \implies x = 1$
Assim, a solução minimal única, para qualquer k é $(x,\ y) = (1,\ 1)$, mas nessa solução, $k = 3 \implies$ o único valor possível é $k = 3$
Agora que já temos um bom conhecimento sobre pulos de vieta, por que não tentarmos começar a fazer problemas por conta própria?

4 Agora é com você!

1. Sejam a, b, c inteiros positivos tais que

$$0 < a^2 + b^2 - abc < c$$

   Prove que $a^2 + b^2 - abc$ é um quadrado perfeito.

2. Determine todos os pares de polinômios mônicos P, Q de coeficientes complexos tais que $P \mid Q^2 + 1$ e $Q \mid P^2 + 1$

3. Se a, b são inteiros positivos tais que $ab - 1 \mid a^2 + b^2$, ache todos os valores possíveis de $\dfrac{a^2+b^2}{ab-1}$

4. Prove que para todo inteiro positivo m existem infinitos $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tais que

$$x \mid y^2 + m \text{ e}$$
$$y \mid x^2 + m$$

5. Demonstre que não existem $x, y, n \in \mathbb{N}$ tais que $x^2 + y^2 = n(x+1)(y+1)$

5 Dicas

1. Dica 1: Tente ver o pulo de vieta com o valor que a equação pode tomar

   Dica 2: Como podemos usar $\frac{b^2-x}{a} = bc - a$?

2. Dica 1: Isso lembra o 6 da IMO, né? mas é um polinômio... o que tem de fácil de controlar nele?

   Dica 2: O grau!

3. Dica: Esse problema é quase idêntico ao 6 da IMO!

4. Dica 1: Até agora só usamos pulo de vieta para provar que não existem soluções. Como podemos usá-lo para provar que existem muitas?

   Dica 2: é só fazer o pulo pegando o menor ao invés do maior!

5. Dica: com todos as outras dicas você deve conseguir fazer esse problema!