Cálculo em desigualdades

Leonardo Dias do Carmo

1. Introdução

Em teoria, os problemas de olimpíada de matemática não exigem conhecimentos do ensino superior. No entanto, a aplicação de ferramentas como o cálculo diferencial em competições internacionais ou nacionais tem se mostrado cada vez mais útil. O presente artigo mostra aplicações do cálculo para problemas que envolvem desigualdades.

2. Derivada e continuidade

Definição 1: (Derivada) Dada uma função $f(x)$ e um número real c, definimos a derivada de f no ponto c e denotamos $f'(c)$, como sendo:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Se esse limite não existir, então f não é derivável em $x = c$.

Definição 2: (Função Derivável) Dada uma função $f : I \longrightarrow A$, dizemos que f é derivável, se, para todo $x \in I$, a derivada $f'(x)$ existir.

Definição 3: (Continuidade) Dada uma função $f(x)$ e um número real c, dizemos que f é contínua em $x = c$ se $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Teorema 1 (L'Hospital): Dadas duas funções f e g deriváveis, tal que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ ou $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$. Então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

.

Os teoremas[1] que seguem servem para analisar comportamento de funções e com isso deduzir desigualdades e propriedades convenientes. [0]

[1] Não é intuito do artigo demonstrar esses teoremas. Um leitor interessado pode encontrar demonstrações nas referências.

[0] É esperado que o leitor esteja familiarizado com os conceitos apresentados acima, saiba as principais regras de derivação e derivar as principais funções.

3. Teorema de Weierstrass, Convexidade e Concavidade

Teorema 2: (Weierstrass) Dado um intervalo aberto $I =]a, b[$ e uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável, então existem máximo e mínimo da função f no intervalo $[a,b]$. Ademais, se x é um ponto de máximo ou mínimo, então um dos três ocorre:

(i) $x = a$

(ii) $x = b$

(iii) $f'(x) = 0$

Ou seja, se uma função é derivável, os candidatos de máximo/mínimo estão nos extremos do intervalo ou nos pontos em que a derivada é 0.

Definição 4: (Convexidade) Dizemos que uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa, se, para todo $x \in I$, for válido que $f''(x) > 0$.

Definição 5: (Concavidade) Dizemos que uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é côncava, se, para todo $x \in I$, for válido que $f''(x) < 0$.

Proposição 1: Dada uma função $f :]a,b[\longrightarrow R$ convexa, o seu máximo M é tal que $M = f(a)$ ou $M = f(b)$. Dada uma função $g :]a,b[\longrightarrow R$ côncava, o seu mínimo m é tal que $m = g(a)$ ou $m = g(b)$.

Demonstração. Pelo teorema de Weierstrass, os candidatos a máximo em f são x tal que $f'(x) = 0$, $x = a$ ou $x = b$. Suponha que $f(x)$ seja máximo. Como $f''(x) > 0$, a função $f'(x)$ é crescente, então para todo ϵ com $x < x + \epsilon < b$, temos $f'(x + \epsilon) > f(x) = 0$. Nesse caso f é estritamente crescente entre x e b, o que contraria a maximalidade de $f(x)$. Uma demonstração análoga pode ser feita para o caso de concavidade. $\square$

No entanto, quando a segunda derivada for 0, não se pode ter certeza absoluta sobre a minimalidade/maximalidade de um ponto. Nesse caso, deve-se analisar derivadas superiores e entender analiticamente o comportamento da função.

4. Teorema do Valor Médio de Cauchy

Teorema 3: (Valor Médio de Cauchy) Sejam f, g: $[a,b] \longrightarrow R$ duas funções contínuas em $[a,b]$ e deriváveis em $]a,b[$.Então existe $c \in\ ]a,b[$ tal que:

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a))$$

Essa é uma generalização do Teorema do Valor Médio, que é um caso particular quando $g(x) = x$. A princípio, parece um enunciado totalmente aleatório, mas tem diversas aplicações. Segue um exemplo:

Exemplo 1: Prove que, para todos $a,b \in \mathbb{R}$ tais que $1 \leq a < b \leq e$, vale que:

$$\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a} \leq \frac{b-a}{a^2}$$

Demonstração. Considere a função $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ e $g(x) = x$. Ambas são deriváveis e contínuas no intervalo $]1, e[$. Observe que $g'(x) = 1$. Além disso, pela regra da cadeia, temos:

$$f'(x) = \ln x \cdot (\frac{-1}{x^2}) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Portanto, dado um real t com $1 < t < e$, temos $f'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2} < \frac{1}{t^2}$, pois $\ln t > 0$ nesse intervalo. Pelo teorema do Valor Médio de Cauchy, existe $a < c < b$ tal que:

$$1 \cdot (\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a}) = \frac{1 - \ln c}{c^2}(b-a) \leq \frac{1}{c^2}(b-a) \leq \frac{1}{a^2}(b-a)$$

o que prova a nossa desigualdade. $\square$

5. Expansão em Taylor

Teorema (Taylor): Dado um ponto x_0 na vizinhança de x, então a função $f(x)$ pode ser escrita como o polinômio:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots =$$

$$= f(x_0) + \sum_{i=1}^{\infty} f^{(i)}(x_0)\frac{(x - x_0)^i}{i!}$$

em que $f^{(i)}(x_0)$ é a i-ésima derivada de $f(x)$.

Esse teorema é interessante pois assim podemos cotar funções a partir de suas derivadas e conseguir desigualdades convenientes. Segue um exemplo do uso de um problema recente da IMO ShortList de 2020.

Problema: (IMO Shortlist 2020) Para todo inteiro positivo $n \geq 2$, encontre a menor constante real b_n tal que:

$$\sqrt[N]{\frac{x^{2N} + 1}{2}} \leq b_n(x - 1)^2 + x$$

Solução: Considere a função $f(x) = \sqrt[N]{\frac{x^{2N}+1}{2}}$. Derivando, temos:

$$f'(x) = [(\frac{x^{2N} + 1}{2})^{\frac{1}{N}}]' = \frac{1}{N}(\frac{x^{2N} + 1}{2})^{\frac{1}{N}-1} \cdot 2N \cdot \frac{x^{2N-1}}{2} =$$

$$= (\frac{x^{2N} + 1}{2})^{\frac{1}{N}-1}x^{2N-1}$$

Temos f'(1) = 1, logo podemos usar a série de Taylor para ter que:

$$f(x) \approx f(1) + f'(1)(x - 1) = 1 + (x - 1) = x$$

Não parece nos ajudar muito. Vamos derivar novamente:

$$f''(x) = [x^{2N-1}]' \cdot ((\frac{x^{2N} + 1}{2})^{\frac{1}{N}-1}) + [(\frac{x^{2N} + 1}{2})^{\frac{1}{N}-1}]' \cdot x^{2N-1} =$$

$$= (2N - 1)x^{2N-2}((\frac{x^{2N} + 1}{2})^{\frac{1}{N}-1}) + (\frac{1}{N} - 1)(\frac{x^{2N} + 1}{2})^{\frac{1}{N}-2} \cdot 2N \cdot \frac{x^{2N-1}}{2} \cdot x^{2N-1}$$

Observe que $f''(1) = N$. Podemos novamente aproximar:

$$f(x) \approx f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = x + \frac{N}{2}(x-1)^2$$

A partir disso, é bem intuitivo tentar provar que $b_n = \frac{N}{2}$. Isso pode ser provado com mais um pouco de cálculo! Pelo Teorema de Taylor, existe c entre 1 e x tal que $f(x) = x + \frac{N}{2}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-1)^3$. Temos que:

$$f'''(x) = (2N-1)(2N-2)x^{2N-3}(\frac{x^{2N}+1}{2})^{\frac{1}{N}-1} + (1-N)(2N-1)(\frac{x^{2N}+1}{2})^{\frac{1}{N}-2}x^{4N-3} +$$

$$+(4N-2)(1-N)x^{4N-3}(\frac{x^{2N}+1}{2})^{\frac{1}{N}-2} + (1-2N)(1-N)x^{6N-3}(\frac{x^{2N}+1}{2})^{\frac{1}{N}-3} =$$

$$= \frac{2^{1-\frac{1}{N}}(2N-1)(2N-2)(x^{2N}+1)^2x^{2N-3}}{(x^{2N}+1)^{3-\frac{1}{N}}} - \frac{2^{1-\frac{1}{N}}(2N-1)(2N-2)(x^{2N}+1)x^{4N-3}}{(x^{2N}+1)^{3-\frac{1}{N}}} -$$

$$- \frac{2^{2-\frac{1}{N}}(2N-1)(2N-2)(x^{2N}+1)x^{4N-3}}{(x^{2N}+1)^{3-\frac{1}{N}}} + \frac{2^{2-\frac{1}{N}}(2N-1)(2N-2)x^{6N-3}}{(x^{2N}+1)^{3-\frac{1}{N}}} =$$

$$= -\frac{2^{1-\frac{1}{N}}(2N-1)(2N-2)x^{2N-3}(x^{2N}-1)}{(x^{2N}+1)^{3-\frac{1}{N}}}$$

Desse modo, se $x \geq 1$, temos $1 \leq c \leq x$ e $f'''(c) \geq 0$. Portanto $\frac{f'''(c)(x-1)^3}{3!} \geq 0$ e $f(x) \leq x + \frac{N}{2}(x-1)^2$. Analogamente, se $x < 1$, temos $x \leq c < 1$ e $f'''(c) > 0$. Portanto $\frac{f'''(c)(x-1)^3}{3!} \leq 0$, o que de novo implica $f(x) \leq x + \frac{N}{2}(x-1)^2$. Além disso, pela regra de L'Hopital é válido que $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{f''(1)}{2} = \frac{N}{2}$. Deste modo, não existe constante b_n melhor que $\frac{N}{2}$, que é a resposta do problema.

Observe que a ferrramenta do cálculo em problemas de olimpíada traz um método para resolver problemas de desigualdade. A dificuldade, no entanto, é conseguir efetuar os cálculos e manipulações algébricas convenientes.

6. Problemas Resolvidos

Seguem algumas aplicações do cálculo em problemas de olimpíadas.

Problema 1: (TST Romênia 2018) Encontre a menor constante real c tal que para todo inteiro $n \geq 2$ e para todos reais $x_1, x_2, \cdots x_n$ maiores ou iguais a -1 com $\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 0$, seja válido que $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq c \cdot n^2$

Solução: Suponha sem perda de generalidade que $-1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ e que $(x_1, x_2, ..., x_n)$ é a n-upla que maximiza a soma $S = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, com $n \geq 4$ fixo. Tome dois índices $1 < i < j < n$, de modo que $x_i < 0 < x_j$ e fixe todas as outras variáveis. Além disso, fixe $x_i^3 + x_j^3 = s$. Assim, se $y = x_i$, então $x_j = (s - y^3)^{\frac{1}{3}}$. Deste modo, para alguma constante D, temos que $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = D + y^2 + (s - y^3)^{\frac{2}{3}}$. Consideremos a função $f(y) = D + y^2 + (s - y^3)^{\frac{2}{3}}$. Observe que:

$$f'(y) = 2y - 2y^2(s - y^3)^{\frac{-1}{3}}$$

Temos que $f'(x) = 0 \iff y^3 = s - y^3$, o que é impossível, pois $y^3 = x_i^3 < x_j^3 = s - y^3$. Portanto, pelo teorema de Weierstrass, o máximo de $f(y)$ está em um dos extremos do intervalo $[-1, x_n]$. Isso significa que $x_i = -1$ e $x_j = x_n$, pois $f(x_i)$ é máximo por hipótese. Assim, escolhendo i e j arbitrários, podemos repetir o mesmo argumento, chegando que existe um número $b > 0$ tal que, para algum inteiro $t < n$, temos $x_1 = x_2 = \cdots = x_t = -1$ e $x_{t+1} = \cdots = x_n = b$. Nesse caso, temos $t \cdot (-1)^3 + (n-t)b^3 = 0 \iff 1 = b(\frac{n-t}{t})^{\frac{1}{3}}$. Assim, temos que $S = t \cdot b^2(\frac{n-t}{t})^{\frac{2}{3}} + (n-t)b^2$. Analisando a função $f(t)$ nos reais dada por S acima:

$$f(t) = t \cdot b^2(\frac{n-t}{t})^{\frac{2}{3}} + (n-t)b^2$$

$$f'(t) = b^2[(n-t)^{\frac{2}{3}}\frac{1}{3}t^{\frac{-2}{3}} - t^{\frac{1}{3}}\frac{2}{3}(n-t)^{\frac{-1}{3}} - 1]$$

Definindo $z = (\frac{n-t}{t})^{\frac{1}{3}}$, temos $f'(t) = 0 \iff \frac{1}{3}z^2 - \frac{2}{3}\frac{1}{z} - 1 = 0 \iff z^3 - 3z - 2 = 0 \iff (z+1)(z+\frac{1}{2})(z-2) = 0$. Testando, como $0 < t \leq n$, só faz sentido o caso $z = -\frac{1}{2} \implies t = \frac{8n}{9}$. Substituindo, obtemos $b = 2$ e $c = \frac{4}{3}$. De fato, o caso de igualdade é quando $n = 9k$, e tomamos $x_1 = x_2 = \cdots = x_{8k} = -1$ e $x_{8k+1} = \cdots = x_{9k} = 2$, dando $S = 8k(1^2) + (2^2)(k) = 12k = \frac{4}{3}n$

Problema 2: (IMO 1999/2) Seja $n \geq 2$ um inteiro. Ache o menor $c \in \mathbb{R}$, tal que para toda sequência de reais x_1,$x_2, \cdots, x_n \geq 0$, vale que:

$$\sum_{i<j} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq c(\sum_{i=1}^{n} x_i)^4$$

Solução: Como a desigualdade é homogênea, ou seja, trocar x_i por $k\ x_i$ não muda a condição do problema, podemos fixar $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Assim, temos:

$$\sum_{i<j}^{n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) = \sum_{i \neq j} x_i^3 x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 - \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \leq C$$

Observe que $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ e $x_3 = x_4 = \cdots = x_n = 0 \Longrightarrow \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \leq C \Longrightarrow C \geq \frac{1}{8}$. Vamos mostrar que $C = \frac{1}{8}$ é a menor constante, ou seja, vale a desigualdade acima para $C = \frac{1}{8}$. Suponha, por absurdo, que para alguma n-upla $(x_1, x_2, ..., x_n)$ valha que $\sum_{i=1}^{n} x_i^3 - \sum_{i=1}^{n} x_i^4 > \frac{1}{8}$. Além disso, suponha que a quantidade de reais não nulos nessa n-upla seja mínima. Fixando $x_i + x_j = c \Longrightarrow (x_i, x_j) = (y, c-y)$, para algum $y \in \mathbb{R}$. Fixando todas as outras demais variáveis, considere a função $g(y) = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 - \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = D + y^3 + (c-y)^3 - y^4 - (c-y)^4$ para alguma constante $D \in \mathbb{R}$. Derivando, temos:

$$g'(y) = 3y^2 - 3(c-y)^2 - 4y^3 + 4(c-y)^3 = 3[y^2 - (c-y)^2] - 4[y^3 - (c-y)^3] =$$

$$= 3(2y-c)c - 4(2y-c)[y^2 + (c-y)y + (c-y)^2] = (2y-c)(-4y^2 + 4yc + 3c - 4c^2) =$$
$$= -(2y-c)(2y - c + \sqrt{3c - 3c^2})(2y - c - \sqrt{3c - 3c^2})$$

Se $3c - 3c^2 \geq c^2$, temos:

$$2y - c + \sqrt{3c - 3c^2} \geq y \geq 0$$

$$2y - c - \sqrt{3c - 3c^2} \leq 2y - 2c \leq 0$$

Nesse caso, $g'(y)$ teria o mesmo sinal de $2y - c$. Observe que $g'(\frac{c}{2}) = 0$, mas $g'(y) \leq 0$ para $y \leq \frac{c}{2}$ e $g'(y) \geq 0$ para $y \geq \frac{c}{2}$. Portanto $y = \frac{c}{2}$ é um ponto de mínimo, já que a função decresce antes e cresce depois de $\frac{c}{2}$. Pelo teorema de Weierstrass, só podemos ter $y = 0$ ou $y = c$ como pontos de máximo (extremos do intervalo). Isso implicaria que trocar o par (x_i, x_j) por $(x_i + x_j$,$0)$ aumentaria a soma, mas isso contradiz a suposição de mínimo de reais não nulos, pois acharíamos uma n-upla com soma ainda maior que $\frac{1}{8}$, mas com menos reais não nulos. Portanto $3c - 3c^2 \leq c^2 \Longrightarrow c \geq \frac{3}{4}$. Observe que, se $n \geq 3$, poderíamos repetir esse argumentos para os pares $(x_1$,$x_2), (x_1$,$x_3), (x_2, x_3)$. Logo $x_1 + x_2 \geq \frac{3}{4}$, $x_2 + x_3 \geq \frac{3}{4}$, $x_1 + x_3 \geq \frac{3}{4}$. Somando tudo obteríamos $x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{9}{8}$, um absurdo! Logo só falta o caso

$n = 2$, e basta provarmos que:

$$x_1x_2(x_1^2 + x_2^2) \leq \frac{1}{8}(x_1 + x_2)^4 \iff (x_1 - x_2)^4 \geq 0$$

, o que é sempre verdade.

7. Problemas Propostos

Problema 1: Prove as seguintes desigualdades, em que $a,b \in R$:
(a) $|senb - sena| \leq |b - a|$
(b) $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \frac{1}{2}|a - b|$ para $a,b \geq 1$
(c) $|ln\frac{a}{b}| \leq |a - b|$ para $a,b \geq$
(d) $b^b - a^a > a^a(b - a)$ para $1 \leq a < b$

Problema 2 (USAMO's antigas):
(a) Mostre que para todos reais não negativos $a,b,c \leq 1$, vale que:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1$$

(b) Se a,b,c,d,e são reais positivos entre p e q, com $0 < p \leq q$, prove que:

$$(a+b+c+d+e)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}) \leq 25 + 6(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}})^2$$

Problema 3: Sejam a,b,c reais positivos. Mostre que:

$$(\frac{2a}{b+c})^{\frac{2}{3}} + (\frac{2b}{a+c})^{\frac{2}{3}} + (\frac{2c}{a+b})^{\frac{2}{3}} \geq 3$$

Problema 4: (TST Ibero Brasil 2022) Sejam a,b,c reais positivos. Encontre quando a igualdade ocorre e mostre que:

$$a^5 + b^5 + c^5 \geq 5abc(b^2 - ac)$$

Problema 5: (IMO 2001/2) Prove que para todos reais positivos a,b,c, vale que:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

Problema 6: (USA 2003) Prove, para todos reais $a,b,c \in \mathbb{R}$ que:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(a+c)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8$$

Problema 7: (Japão) Prove, para todos reais $a,b,c \in \mathbb{R}$, que :

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2} + \frac{(a+b-c)^2}{c^2+(b+a)^2} + \frac{(a+c-b)^2}{b^2+(a+c)^2} \geq \frac{3}{5}$$

Problema 8: (China 2011) Sejam $a_1,a_2,\ldots,a_n$ números reais, prove que;

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (M-m)^2.$$

em que $a_{n+1} = a_1, M = \max_{1\leq i\leq n} a_i, m = \min_{1\leq i\leq n} a_i$.

8. Dicas e soluções

1. Use o teorema do valor médio de Cauchy
2. Fixe todas variáveis, exceto uma, e derive duas vezes. Com isso, analise a concavidade e conclua com o Teorema de Weierstrass.
3. Tente achar um valor r tal que

$$ {\frac{2a}{b+c}}^{\frac{2}{3}} \geq \frac{3a^r}{a^r+b^r+c^r} $$

4. Fixe a variável c e, por ser uma desigualdade homogênea, fixe $abc = 1$. Com isso, chegue em uma função em b do lado esquerdo, derive e veja que o mínimo ocorre quando $a = c$. Depois, pela homogeneidade, você pode supor que $a = c = 1$, e basta resolver a desigualdade derivando apenas em b.
5. Tente achar um valor r tal que

$$ \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^r}{a^r+b^r+c^r} $$

6. Como a desigualdade é homogênea, você pode supor $a + b + c = 3$. Então, aproxime $\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2}$ por uma função de primeiro grau usando a série de Taylor em $x_0 = \frac{1}{3}(a + b + c) = 1$
7. Como a desigualdade é homogênea, você pode supor $a + b + c = 3$. Então, aproxime $\frac{(3-2a)^2}{a^2+(3-a)^2}$ por uma função de primeiro grau usando a série de Taylor em $x_0 = \frac{1}{3}(a + b + c) = 1$
8. Analise a concavidade e use o Teorema de Weierstrass.

9. Bibliografia

1. *Guidorizzi, H. L., Um curso de Cálculo, V. 1, Livros Técnicos e Científicos Ed. Ltda, 5 a edição (2001)*
2. *www.artofproblemsolving.com*
3. *Thomas J. Mildorf, Olympiad Inequalities*