Problema 3 OBM 2015

Por João Lemos

Problema. Dado um natural $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ e sua fatoração em primos, definimos a sua *falsa derivada* como

$$f(n) = \prod_{i=1}^{k} a_i p_i^{a_i - 1}.$$

Mostre que a igualdade $f(n) = f(n-1) + 1$ ocorre para infinitos n.

SOLUÇÃO. Primeiro, é fácil ver que f é multiplicativa. Além disso, se n é um inteiro livre de quadrados, isto é, não existe p primo tal que $p^2 | n$, então $f(n) = 1$. Assim, se $\text{mdc}(m, n) = 1$ e n é livre de quadrados, então $f(mn) = f(m)$.
Portanto, basta encontrarmos inteiros a e b com $f(a) = f(b) + 1$ e mostrarmos que existem infinitos inteiros livres de quadrados m e n com $ma - nb = 1$. Um exemplo de tais a e b são os números 5^3 e 37^2.
Assim, suponha que a e b são inteiros positivos com $\text{mdc}(a, b) = 1$. Pelo Teorema de Bèzout, existem k e ℓ inteiros positivos para os quais $ak - b\ell = 1$. Claramente todos os pares $(bt + k, at + \ell)$ são soluções de $ax - by = 1$. Além disso, $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(a, \ell) = \text{mdc}(b, k) = 1$. Logo, basta mostrarmos que existem infinitos t tais que $at + \ell$, $bt + k$ são livres de quadrados.
Suponha que os primos que dividem ab são $p_1 < p_2 < \dots < p_s$ e seja $P = \prod_{u \le p_s} u$. Considere os pares $(a_t, b_t) = (btP + k, atP + \ell)$. Tome α como um número real positivo. Dado um primo p, a quantidade de números a_t ou b_t que são divisíveis por p^2, com $t \le \alpha$, é no máximo $2\left\lceil \frac{\alpha}{p^2} \right\rceil$, uma vez que $p \nmid a_t b_t$ para todo $p \le p_s$, e se $p > p_s$, então $atP + \ell \equiv at'P + \ell \pmod{p^2} \iff t \equiv t' \pmod{p^2}$.
Logo, sendo $N(\alpha)$ a quantidade de números do conjunto $\{a_t, b_t | t \le \alpha\}$ que são divisíveis por um quadrado, sabemos que

$$\begin{aligned} N(\alpha) &\le \sum_{\sqrt{\alpha} \ge p > p_s} 2\left\lceil \frac{\alpha}{p^2} \right\rceil \\ &\le \sum_{\sqrt{\alpha} \ge p > p_s} \frac{2\alpha}{p^2} + 2\sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \sum_{n > p_s} \frac{1}{n^2} &\le \sum_{n > p_s} \frac{1}{n(n-1)} \\ &= \sum_{n > p_s} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{p_s}, \end{aligned}$$

Para $p_s > 4$ (e podemos supor isso, já que, tomando $a = 5^3$, $b = 37^2$, temos $p_s = 37$), temos então que $N(\alpha) \le \sqrt{\alpha} + \frac{\alpha}{2} < \frac{2(\alpha - 1)}{3}$ para α suficientemente grande. Como há $\lfloor \alpha \rfloor$ pares (a_t, b_t) com $t \le \alpha$ e no conjunto $\{a_t, b_t | t \le \alpha\}$ no máximo $\frac{2\lfloor \alpha \rfloor}{3}$ são divisíveis por algum quadrado, então pelo menos $\frac{\lfloor \alpha \rfloor}{3}$ dos pares (a_t, b_t), $t \le \alpha$, são formados por números livres de quadrados, e isso garante a existência de infinitos pares (a_t, b_t) livres de quadrados. $\square$