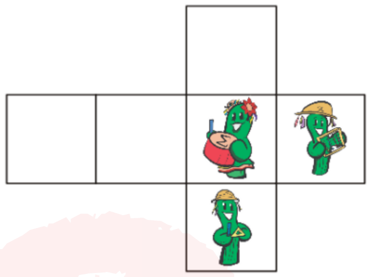
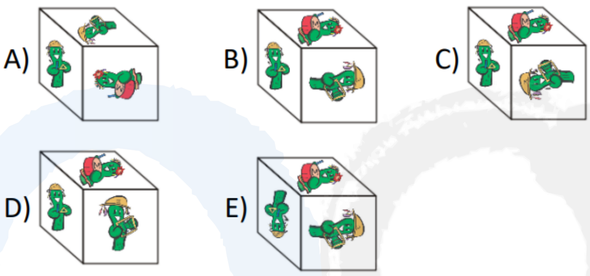
Gabarito Mandacaru - Nível Lampião

Andressa Farias e Luiza Lanza

Questão 1:

1. Zeca colou uma fotografia sua e de seus irmãos Tonho e Tica na planificação de um cubo, conforme a figura a seguir. Qual das alternativas mostra o cubo assim formado?





Observe que o chapéu de Zeca aponta para a mesma aresta que os pés de Tica, assim, já é possível a eliminação das alternativas "a"e "e". Tica e Tonho estão em faces lado a lado (ambos na mesma posição), das alternativas restantes, apenas a "b"mostra os irmãos Tica e Tonho com a mesma orientação.

Gabarito: B)

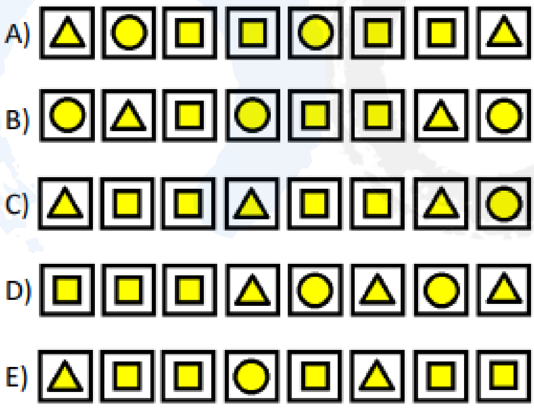
Questão 2:

2. Maria Aparecida está tentando resolver um quebra-cabeça que possui apenas três botões: verde, vermelho e amarelo. Seu objetivo é deixar os números de 1 até 5 em sequência (em ordem crescente). Cada botão tem um efeito:

- O botão △: troca o número da primeira posição com o da segunda posição;
- O botão □: troca o número da segunda posição com o da quarta posição e, após isso, troca o número da terceira posição com o da quarta posição;
- O botão ○: troca o número da quarta posição com o da quinta;

Aparecida deve resolver o quebra-cabeça da seguinte situação:

Qual sequência (da esquerda para direita) ela deve fazer para vencer o jogo?



Dentre as sequências de comandos apresentada na questão, a única que finaliza de maneira correta é a da alternativa E:

45231 $\longrightarrow$ 43521 $\longrightarrow$ 42351 $\longrightarrow$ 42315 $\longrightarrow$ 41235 $\longrightarrow$ 14235 $\longrightarrow$ 13425 $\longrightarrow$ 12345

Para simplificar o 2° comando, imagine que você pegará o 4° algarismo e colocará entre o 1° e o 2°.

Gabarito: E)

Questão 3:

3. Tonho sempre faz alguns rascunhos de quanto deve gastar em relação as comidas durante o período junino. Ele sabe que cada pessoa come em média 20 pamonhas e cada pamonha custa R$ 1,25. A função $f(x)$ que associa valor gasto em função do número x de pessoas é:

A) $f(x) = 1{,}25x$
B) $f(x) = 2{,}5x$
C) $f(x) = 20x$
D) $f(x) = 12{,}5x$
E) $f(x) = 25x$

Uma pessoa come em média 20 pamonhas, portanto, seu gasto será de $1{,}25 \cdot 20 = 25$ reais. Logo, x pessoas gastarão $25x$

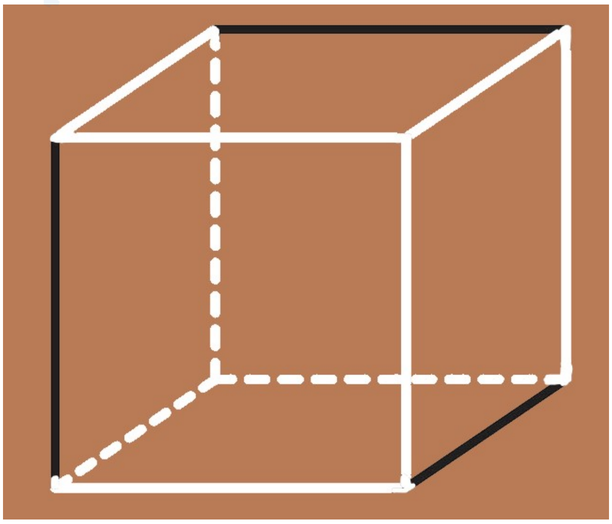
Gabarito: E) $f(x) = 25x$

Questão 4:

4. Tonho e Zeca estão pintando as arestas de um cubo. Em cada face, Tonho pinta três arestas de cor branca e Zeca uma aresta de cor preta. Qual o número de arestas pintadas por Tonho?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 9

Para uma melhor compreensão, veja a imagem abaixo com um exemplo de como um cubo poderia ser pintado:



Desse modo, conclui-se que 9 arestas foram pintadas por Tonho.

Gabarito: E) 9.

Questão 5:

5. Tonho quer selecionar um número para sua camiseta do Salgueiro Atlético Clube. Ele quer que esse número seja um primo com exatamente dois dígitos iguais e esteja entre 10 e 115. O número de opções que Tonho tem para escolher seu número é

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

O número precisa ser primo, estar entre 10 e 115, e ter dois dígitos iguais. Perceba que, se o número tiver apenas dois algarismos, eles precisarão ser repetidos e, consequentemente serão divisíveis por 11, quebrando a condição de ser primo.

Assim, analisaremos de 100 até 115. Nesse intervalo, o único algarismo que pode ser repetido é o 1 (além do 0 em 100), os números serão: 101, 110, 112, 113, 114, 115, dentre esses números, os primos são apenas: 101, 113. Desse modo, Tonho possui 3 opções diferentes.

Gabarito: B) 3.

Questão 6:

6. Tonho escreveu no seu caderno várias vezes a frase “NORDESTE MINHA VIDA” da seguinte maneira: “NORDESTEMINHAVIDANORDESTEMINHA....”. Podemos afirmar que a milésima letra que ele escreveu foi:

A) N B) O C) R D) V E) M

A frase ”NORDESTE MINHA VIDA”possui 17 letras. Então, o resto da divisão de 1000 por 17 determinará a letra que ele escreveu.

$1000 \equiv 14 \ (mod\ 17) \implies 17 \cdot 58 + 14 = 1000$

A 14° letra é V.

Gabarito: D) V.

Questão 7:

7. A Região Nordeste é formada por nove estados litorâneos. Tonho vai escolher três estados para participar da cerimônia de premiação da Mandacaru 2023. De quantas maneiras ele pode fazer essa escolha?

A) 504 B) 350 C) 134 D) 90 E) 84

Basta fazer uma combinação:

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} \Longrightarrow \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 84$$

Gabarito: E) 84

Questão 8: Anulada

8. José Amorim é professor da rede municipal da cidade de Belém/AL. Ele, durante uma atividade prática com os seus alunos, olha para o topo do prédio da Câmara de vereadores da cidade com um ângulo de inclinação de 30°. Sabendo que ele tem 1,7 m de altura e a distância até a base do prédio é 10 m, então a distância de José Amorim até o topo do prédio é

A) $\frac{100\sqrt{3}+51}{30}$

B) $\frac{200\sqrt{3}+102}{40}$

C) $\frac{300\sqrt{3}+153}{100}$

D) $\frac{400\sqrt{3}+204}{110}$

E) $\frac{500\sqrt{3}+255}{160}$

Não há no gabarito uma correspondência para a distância de José até o topo do prédio. A letra A) é a que mais plausível, uma vez que corresponde à altura do prédio. Porém, a pergunta no enunciado é ambígua, deixando margem para outras interpretações sobre a distância pedida. Fazendo a altura do prédio:

$$H = 10 \times tg\ 30° + 1{,}7$$

$$H = \frac{10\sqrt{3}}{3} + 1{,}7$$

$$H = \frac{100\sqrt{3}}{30} + 1{,}7 = \frac{100\sqrt{3} + 51}{30}$$

Gabarito: Sem gabarito

Questão 9:

9. Tonho tem um saquinho com 12 chás de caramelo, 12 de chocolate e 6 de menta. Ele puxa um e entrega para Zeca e depois outro para Tica. Se o primeiro que ele pegou fosse chocolate, então a probabilidade de que o segundo também seja de chocolate corresponde a

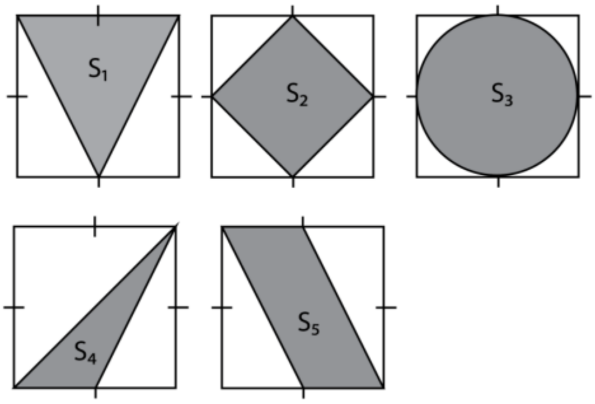
A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{2}{13}$ C) $\frac{12}{30}$ D) $\frac{11}{29}$ E) $\frac{11}{30}$

Após a retirada do saquinho de chocolate restaram 12+11+6=29 saquinhos, há 11 saquinhos restantes de chocolate, logo, a probabilidade de retirar um saquinho de chocolate será $\frac{11}{29}$

Gabarito: D) $\frac{11}{29}$

Questão 10:

10. Os quadrados da figura são todos iguais, nos quais os pontos médios de seus lados foram marcados. Em cada quadrado uma área foi sombreada e as medidas dessas áreas sombreadas foram chamadas de S_1, S_2, S_3, S_4 e S_5.



Seja A, a área de um dos quadrados. Das relações a seguir, a que é VERDADEIRA é

A) $S_2 + S_5 + S_1 < S_4 + S_3$

B) $S_1 + S_2 < S_4 + S_5$

C) $S_4 \leq S_5 = S_1 = S_3 \leq S_2$

D) $S_5 + S_3 \geq \frac{5A}{4}$

E) $S_3 + S_4 \geq \frac{5A}{4}$

Sendo l o lado do quadrado.
$S_1 = \frac{l \cdot l}{2} = \frac{l^2}{2}$
$S_2 = (\frac{l}{2} \cdot \sqrt{2})^2 = \frac{2l^2}{4} = \frac{l^2}{2}$
$S_3 = \pi \cdot (\frac{l}{2})^2 \approx \frac{3{,}14l^2}{4} = \frac{1{,}57l^2}{2}$
$S_4 = \frac{\frac{l}{2} \cdot l}{2} = \frac{l^2}{4}$
$S_5 = \frac{l}{2} \cdot l = \frac{l^2}{2}$
Analisando as alternativas, a alternativa D é a correta já que $S_5 + S_3 = \frac{l^2}{2} + \frac{1{,}57l^2}{2} = \frac{2{,}57l^2}{2} \implies \frac{2{,}57l^2}{2} \geq \frac{5l^2}{4} \implies S_5 + S_3 \geq \frac{5A}{4}$

Gabarito: D) $S_5 + S_3 \geq \frac{5A}{4}$

Questão 11:

11. Tonho e Tica irão participar de uma quadrilha junina na cidade de Parelhas/RN. O marcador Inácio solicita que as 40 duplas, considerando na contagem a dupla formada por Tonho e Tica, juntem-se para começar a festa. A partir desse momento, a quadrilha começa a movimentar formando um circular. Utilizando Tonho como ponto de referência para dar os comandos à quadrilha, sempre que ele aparece Inácio realiza a contagem fazendo um risco no papel. A figura ao lado mostra o padrão que o marcador estava seguindo para pedir que os cavalheiros avançassem uma dupla. Considere Tonho e Tica como a dupla número 1.

|| Avance!
||| Avance!
|| Avance!
||| Avance!
|| Avance!
||| Avance!
...

Se Inácio já fez 68 riscos, qual a menor quantidade de duplas que estão entre Tonho e Tica?

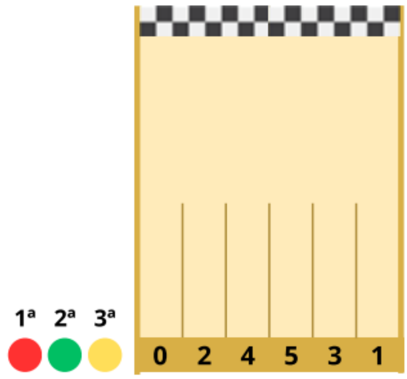
A) 10
B) 11
C) 12
D) 13
E) 14

Perceba que, a cada 5 riscos indica que Tonho passou 2 vezes por Inácio. Como $68 \equiv 3\ (mod\ 5)$, Inácio deu o comando avançar pelo menos $\frac{68-3}{5} \times 2 = 26$ vezes. Como Inácio começa fazendo 2 riscos, após 13 grupos de 5 riscos Inácio marca 2 riscos e dá um comando de avançar, depois marca um último risco completando 68 e dá outro comando de avançar. Logo, as duplas avançaram 28 vezes, ou seja, Tonho saiu da posição 1 e foi para a 29. Entre Tonho e Tica há 27 duplas ou 11 duplas.

Gabarito: B) 11.

Questão 12:

12. Tonho está participando de um desafio que consiste em soltar 3 bolas distintas em uma caixa de madeira. A caixa está inclinada, possui divisões no final e cada uma delas recebe uma pontuação. De acordo com a ordem indicada abaixo, para ganhar uma sanfona, a soma da pontuação das três bolas deve ser exatamente 10 pontos.



De quantas maneiras diferentes Tonho pode obter a pontuação necessária para ganhar a sanfona?

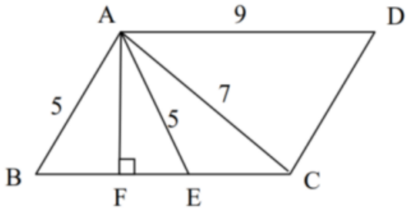
A) 5 B) 12 C) 15 D) 21 E) 36

As somas possíveis para 10 são: 0+5+5; 1+4+5; 2+4+4; 2+3+5; 3+3+4, ou seja, há 5 somas possíveis. Aquelas que estarão na mesma divisão serão uma permutação com repetição, ou seja, nos casos 5+5+0, 2+4+4 e 3+3+4 teremos $\frac{3!}{2!} = 3$ e, nos demais casos(1+4+5 e 2+3+5), será uma permutação simples $3! = 6$. Logo, há $3 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 21$ maneiras.

Gabarito: D) 21.

Questão 13:

13. Considere o seguinte paralelogramo $ABCD$ da figura abaixo, cujos lados medem 5 m e 9 m. Tonho realizou o trajeto de A até E, perfazendo 5 m *e* Zeca do ponto A até C, perfazendo 7 m. Qual a distância de Tonho até Zeca?



A) $\frac{8}{3}$ m B) 3 m C) 6 m D) 12 m E) 16 m

Por ser um paralelogramo, os lados paralelos são iguais, logo, BC=9. Seja a altura AF=h, BF=FE=x,e EC=9-2x temos:

Observando os triângulos retângulos ACF e AEF, podemos construir o seguinte sistema:

$$\begin{cases} h^2 + (9-x)^2 = 7^2 \\ h^2 + x^2 = 5^2 \end{cases}$$

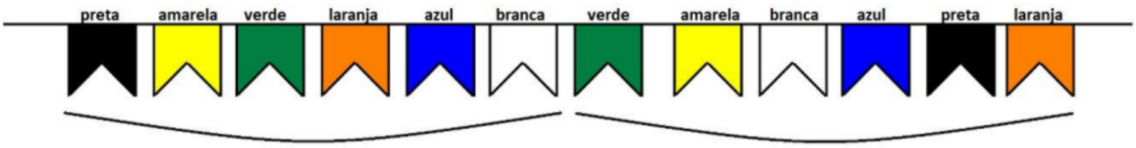
$\implies 49 - (9-x)^2 = 25 - x^2 \implies 24 = -x^2 + 81 - 2 \cdot 9 \cdot x + x^2 \implies 18x = 81 - 24 \implies x = \frac{57}{18}$

$EC = 9 - 2X \implies EC = 9 - 2 \cdot \frac{57}{18} \implies EC = 9 - \frac{19}{3} \implies EC = \frac{8}{3}$m

Gabarito: A) $\frac{8}{3}$m

Questão 14:

14. Para organizar a festa junina na sua escola, Tica quer colar doze bandeirinhas no cordão, conforme figura abaixo. As seis primeiras bandeirinhas consecutivas devem conter cores distintas, sendo: azul, vermelha, preta, amarela, verde e branca e as seis restantes também. De quantas maneiras diferentes ela pode organizar de modo que bandeirinhas vizinhas tenham cores diferentes?



A) 5 . 6! . 5!
B) 12!
C) 2 . 6! . 6!
D) 2 . 6!
E) 6! . 6!

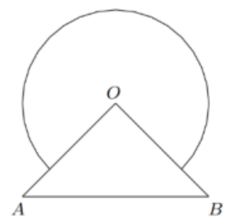
Podemos permutar as 6 primeiras bandeiras normalmente, a 7° pode assumir apenas 5 cores (já que não pode assumir a cor da 6º bandeira), as 5 demais bandeiras permutam normalmente com as 5 cores restantes. Logo, teremos $6! \cdot 5 \cdot 5!$ maneiras.

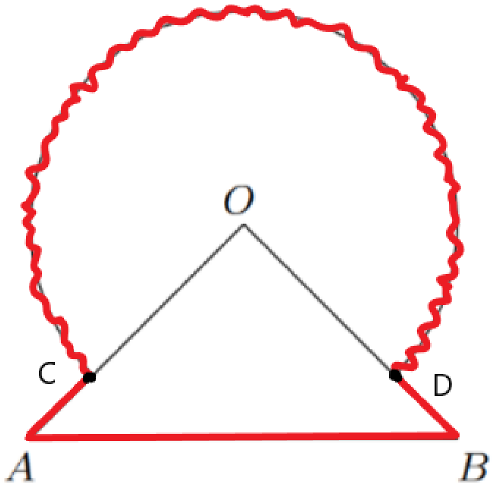
Gabarito: A) $5 \cdot 6! \cdot 5!$

Questão 15:

15. Tonho desenhou parte de um círculo e um triângulo, como mostra a figura abaixo, e calculou o seu perímetro. O triângulo AOB é isósceles e reto em O. Se O é o centro do círculo cujo raio é 2 e $AB = 4$, então, qual foi o perímetro calculado por Tonho?

A) $4 + 3\pi$
B) $4\sqrt{2} + \frac{3}{2}\pi$
C) $4\sqrt{2} + 3\pi$
D) $4\sqrt{2} + 4\pi$
E) 4π





Primeiro calcularemos a parte do comprimento do círculo, como $\angle AOB = 90°$, há $\frac{3}{4}$ da circunferência que deve ser levada em conta na contagem do perímetro. $\frac{3}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 = 3\pi$.

Agora, calcularemos o perímetro de parte do triângulo.

$AO\sqrt{2} = AB \implies AO = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$AC = DB = 2\sqrt{2} - 2$

O perímetro total será $3\pi + 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} - 2 + 4 = 4\sqrt{2} + 3\pi$

Gabarito: C) $4\sqrt{2} + 3\pi$

Questão 16:

16. Na propriedade de Tonho há uma cacimba completamente cheia e em forma cilíndrica medindo 3 metros de profundidade e 2 metros de diâmetro. Ele pretende distribuir a água da cacimba para toda sua vizinhança. Em sua caminhonete, ele consegue levar 4 baldes com 100 litros cada uma. Qual o número mínimo de viagens de ida e volta que Tonho pretende fazer até a cacimba esvaziar completamente? Use $\pi = 3$.

A) 20
B) 25
C) 24
D) 23
E) 26

Calculando o volume da cacimba: $\pi r^2 \cdot h = 3 \cdot 1^2 \cdot 3 = 9m^3 = 9000\text{L}$

A cada viagem de ida e volta, ele consegue levar $4 \cdot 100 = 400\text{L}$, assim, ele precisará fazer $\frac{9000}{400} = 22{,}5$ viagens. Ou seja, em 22 viagens ele não consegue levar toda a água da cacimba, mas em 23 sim.

Gabarito: D) 23.

Questão 17:

17. O professor de matemática da escola Balduino Barbosa, localizada na cidade de Oeiras/PI, aplicou um teste com três questões para 50 alunos do 8º ano. Após corrigir ele constatou que:

- Todos responderam pelo menos uma pergunta corretamente.
- O número total de questões respondidas corretamente foi de 100.

O número máximo possível de alunos que responderam corretamente às três perguntas corretamente foi

A) 15
B) 25
C) 30
D) 33
E) 50

Seja x o número de alunos que respondeu as 3 perguntas certas. Para maximar o valor de x, considere que os outros $50 - x$ alunos responderam o mínimo de perguntas certas, ou seja, uma pergunta. Logo, $3x + (50 - x) \times 1 = 100 \rightarrow 2x = 50 \rightarrow x = 25$.

Gabarito: B) 25

Questão 18:

18. Zeca escreveu os números naturais de 1 *a n*, conforme a figura abaixo. Em seguida, ele destacou alguns números gerando a seguinte sequência: (1, 9, 13, 17, 25, 27, 33, 39, 41, 49, 53, 57, 65, 67, ...). Podemos afirmar que o milésimo termo dessa sequência é:

5	6	15	16	25	26	35	36	45	46	55	56	65	66	
4	7	14	17	24	27	34	37	44	47	54	57	64	67	
3	8	13	18	23	28	33	38	43	48	53	58	63	68	...
2	9	12	19	22	29	32	39	42	49	52	59	62	69	
1	10	11	20	21	30	31	40	41	50	51	60	61	70	

A) 4797
B) 3998
C) 4999
D) 5231
E) 5001

A sequência segue o padrão +8, +4, +4, +8, +2, +6, +6, +4. E os números que estão na última linha seguem a sequência +40 (1, 41, 81, ...). Portanto, olhando para a última linha, podemos dizer que a cada 8 números da sequência, o 8° número é o 1° + 40. Materializando essa linha de raciocínio em uma equação, dizemos que um número em uma posição n será 1+40x sendo que a relação entre x e n é 1+8x=n

Exemplos:

O número na posição 9 é $1 + 8x = 9 \Longrightarrow x = 1 \longrightarrow 1 + 40 \cdot 1 = 41$;

O número na posição 17 será $1 + 8x = 17 \Longrightarrow x = 2 \Longrightarrow 1 + 40 \cdot 2 = 81$

Pegaremos a posição mais próxima de 1000 que esteja na última linha, ou seja, o n mais próximo de 1000 em que x dê exato. E ele é 1001, veja:

$1 + 8x = 1001 \Longrightarrow x = 125 \longrightarrow 1 + 40 \cdot 125 = 5001$. Logo, o número de posição 1001° está na última linha e vale 5001, assim, concluímos que o 1000° tem valor 5001-2=4999

Gabarito: C) 4999

Questão 19:

19. O casamento matuto é uma peça junina que não pode faltar nas quadrilhas de São João. Tica foi convidada para ser a noiva e Zefinha para enfeitar o véu. Ela está enfeitando com adesivos de bandeirinhas, milhos e fogueiras. Inicialmente, Zefinha fez um esboço de onde colocará os enfeites, conforme ilustrado na figura 1. Em cada círculo deverá ser colocada apenas uma figurinha. Além disso, círculos unidos por uma fita possuem figuras diferentes. O preço das figurinhas estão destacados na figura 2.

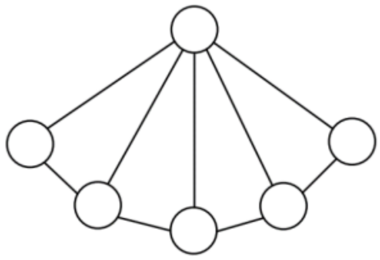


Figura 1

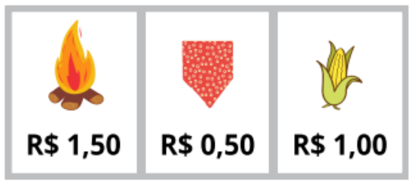


Figura 2

Qual é o menor valor que ela poderá gastar na confecção desse vestido?

A) R$ 4,50 B) R$ 5,00 C) R$ 5,50 D) R$ 6,00 E) R$ 6,50

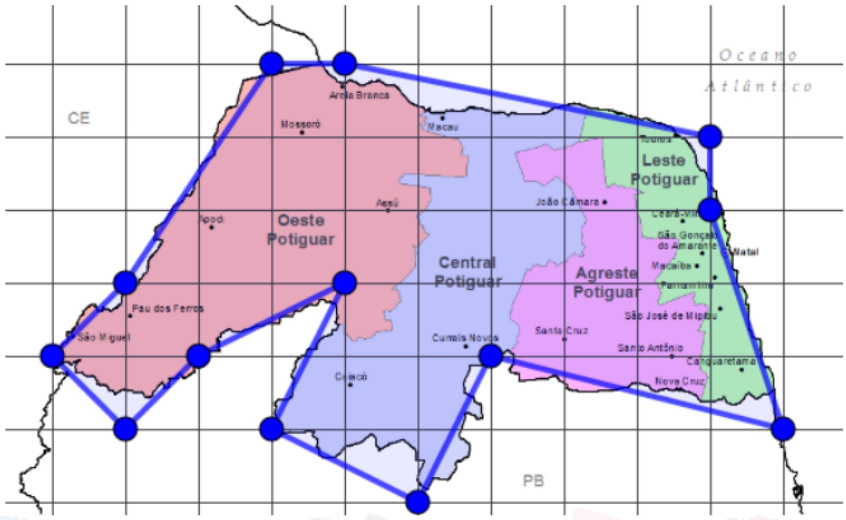
No círculo do topo deve ser o colocada a figura mais cara uma vez que ela não será repetida, ou seja, a fogueira ficará nesse círculo. Agora, queremos colocar o mínimo possível de figuras do milho, que são 2 figuras nos 2° e 4° círculos, e nos demais círculos colocaremos as bandeiras.

Portanto, o menor valor gasto será $1{,}5 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0{,}5 = 5$ reais.

Gabarito: B) R$5,00

Questão 20:

20. Tonho, curioso em estimar a área territorial do estado do Rio Grande do Norte, ajustou em uma malha quadriculada $1\ cm \times 1\ cm$ um mapa de escala $1 : 4\ 000\ 000$. Em seguida, Tonho contornou o mapa com um polígono de 13 vértices, todos marcados sobre os pontos da malha quadriculada, conforme a figura a seguir:



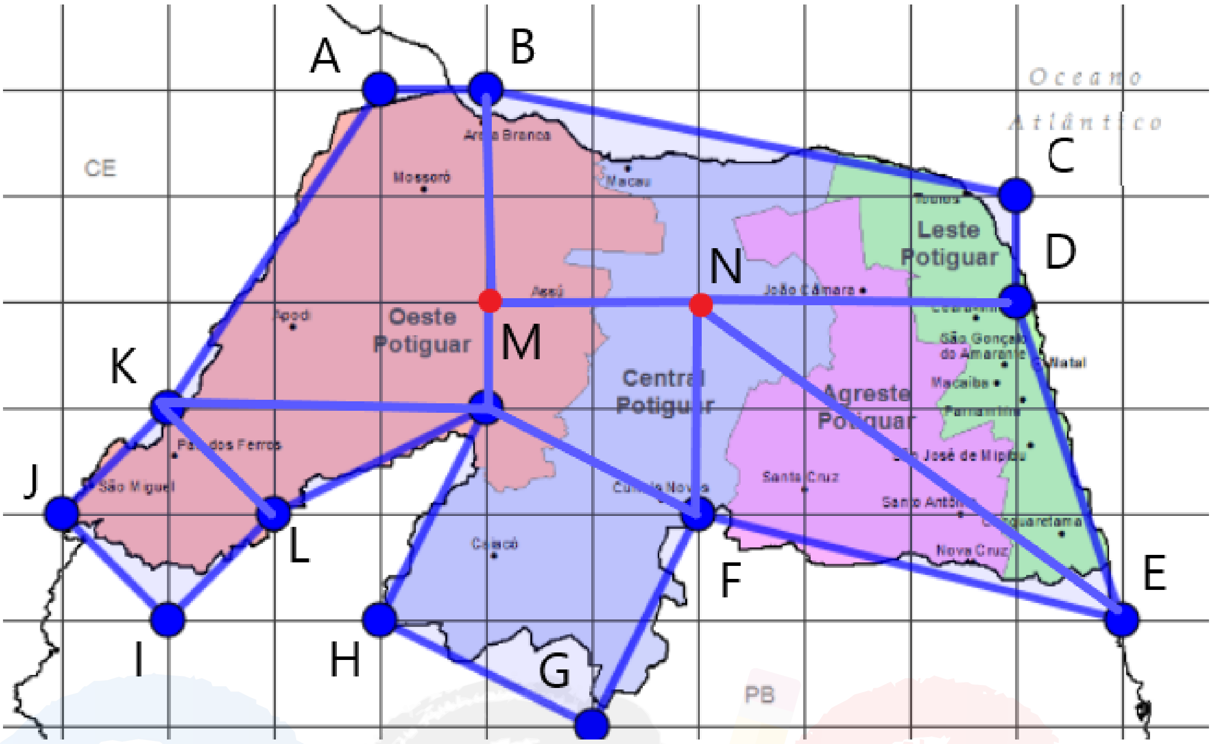
Fonte: Compilação do autor[1].

[1]Mapa disponível em: <*https://www.baixarmapas.com.br/mapa-de-mesorregioes-do-rio-grande-do-norte/*>. Acesso em: 18 jul. 2023.

Tonho calculou a área real do polígono para aproximar a área territorial do Rio Grande do Norte. Qual o tamanho da área, em km^2, que ele obteve?

A) 52800 B) 53000 C) 53200 D) 53600 E) 54400

Nessa figura, o mais adequado a fazer é dividí-la em trapézios, quadrados e triângulos.



$S_{ABMK} = \frac{(3+1)\cdot 3}{2} = 6cm^2$
$S_{KLM} = \frac{3\cdot 1}{2} = \frac{3}{2}cm^2$
$S_{KLIJ} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2cm^2$
$S_{BCDM} = \frac{(2+1)\cdot 5}{2} = \frac{15}{2}$
$S_{FMNO} = \frac{(1+2)\cdot 2}{2} = 3cm^2$
$S_{NDE} = \frac{3\cdot 3}{2} = \frac{9}{2}cm^2$
$S_{NFE} = \frac{2\cdot 4}{2} = 4cm^2$
$S_{FGHO} = (\sqrt{5})^2 = 5cm^2$
$S_{TOTAL} = 6 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{15}{2} + 3 + \frac{9}{2} + 4 + 5 = \frac{67}{2}cm^2$
$1cm^2 \longrightarrow (4\cdot 10^6)^2 = 16\cdot 10^{12}cm^2 \Longrightarrow \frac{67}{2} \longrightarrow 536\cdot 10^{12}cm^2 = 536\cdot 10^{12}\cdot 10^{-10}km^2 = 53600km^2$

Gabarito: D) $53600km^2$