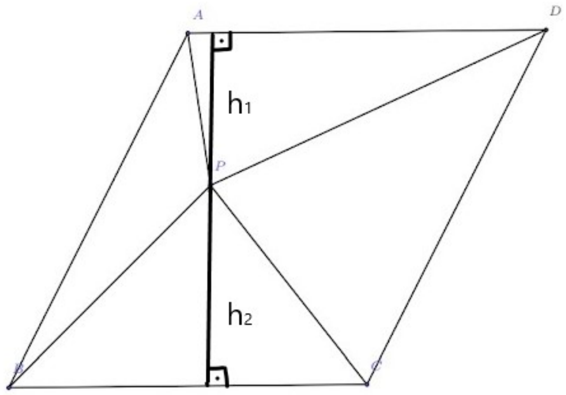
GABARITO - OBOM

Por Matheus Alencar

Questão 1:



A área do triângulo PBC pode ser escrita como a área do paralelogramo ABCD menos as áreas dos triângulos ADP, CDP, APB ou a metade da altura h_2 vezes a base BC:

$$(h_1 + h_2) \cdot BC - 10 - 8 - 14 = \frac{h_2 \cdot BC}{2}$$

$$h_1 \cdot BC + h_2 \cdot BC - 32 = \frac{h_2 \cdot BC}{2}$$

$$h_1 \cdot BC - 32 = -\frac{h_2 \cdot BC}{2}$$

A área do triângulo PAD é $\frac{h_1 \cdot BC}{2} \implies h_1 \cdot BC = 2 \cdot 10 = 20$

$$20 - 32 = -\frac{h_2 \cdot BC}{2} \implies \frac{h_2 \cdot BC}{2} = 12$$

Gabarito: d) 12

Questão 2

Vejamos que 49 Pode ser escrito assim, já que

$$5 \cdot 8 + 1 \cdot 9 = 49$$

Vejamos os outros casos:

- $n = 6 \implies n^2 = 36 \implies 9b \equiv 1 \pmod 5 \implies b \geq 4 \implies 9b \geq 36$. Mas ambos têm que ser positivos $\rightarrow$ Absurdo!
- $n = 5 \implies n^2 = 25 \implies 5 \mid b \implies 9b \geq 45 \rightarrow$ Absurdo!
- $n = 4 \implies 9b \equiv 1 \pmod 5 \implies b \geq 4 \implies 9b \geq 36 \rightarrow$ Absurdo!
- $n \leq 3 \implies n^2 \leq 10$, mas $5a + 9b \geq 5 + 9 = 14 \rightarrow$ Absurdo!

Assim, como queríamos, a resposta é $n = 7$.

Gabarito: b)

Questão 3:

$$3x + \frac{y^2}{x} = 1\ (\cdot x) \implies 3x^2 + y^2 = x\ (i)$$

$$x + \frac{3y^2}{x} = 1\ (\cdot x) \implies x^2 + 3y^2 = x\ (ii)$$

$$i = ii$$

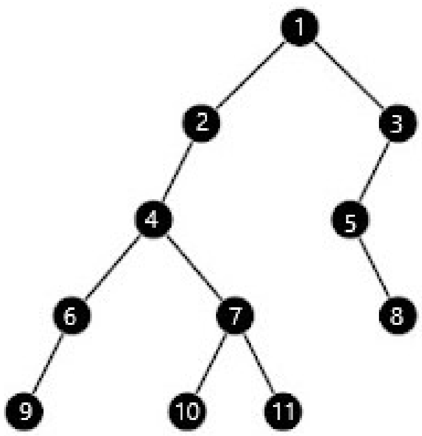
$$\therefore 3x^2 + y^2 = x^2 + 3y^2 \implies 2x^2 = 2y^2 \implies x = y$$

Logo, substituindo y por x na primeira equação, temos:

$$3x + \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = 1(\cdot x) \implies 4x = 1 \implies x = \frac{1}{4}$$

Então $xy = x^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$
Gabarito: d) $\frac{1}{16}$

Questão 4:



Para a bola n°1, há 4 cores disponíveis. Já as bolas 2 e 3 não podem ter a mesma cor que a 1, logo, há apenas 3 cores disponíveis para cada. E essa mesma linha de raciocínio é seguida para as demais (a n°4 não pode ter a mesma cor que a n°2, a 5 não pode ter a mesma cor que a 3 e assim sucessivamente). Ou seja, há 4 possibilidades para a bola 1 e 3 possibilidades para as demais $\implies 4 \cdot 3^{10} = 2 \cdot 2 \cdot 9^5 = 18 \cdot 18 \cdot 9^3 = 18^2 \cdot 9^3$.
Gabarito: a) $18^2 \cdot 9^3$

Questão 5:

$$x^{2020} + y^2 = 2y \implies x^{2020} + y^2 - 2y + 1 = 0 + 1$$

$$x^{2020} + (y-1)^2 = 1$$

O termo y-1 está elevado ao quadrado, logo, o valor do 2° termo é maior ou igual a 0. Assim, resta que x^{2020} é 0 ou 1. Mas x não pode ser 0 já que é um inteiro positivo, restando que x só pode ser 1.
$x = 1 \implies x^{2020} = 1$ e $(y-1)^2 = 0 \implies y = 1 \longrightarrow (1, 1)$
Gabarito: b) 1

Questão 6:

$$20! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 20$$

Fatorando em números primos, temos que $20! = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$ Agora, contaremos os pares de números primos entre si (p, q) tais que $pq = 20!$ Veja que, ao escolhermos quais primos dividem p, além desses primos não poderem dividir q, os primos que dividirão q serão os restantes da fatoração de 20!.
Como existem 8 primos que divdem 20!, esse problema mais simples é análogo a escolher os conjuntos de primos menores que 20. Por definição, isso é o número de subconjuntos de $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, que é 2^8. Porém, o que queríamos eram racionais menores que 1, que representam os pares tais que $p < q$ Como os pares que nós contamos são simétricos, contamos os pares (p, q) e o par (q, p)

respectivamente exatamente uma vez. Como estamos associando esses pares a $\frac{p}{q}$, exatamente um deles é menor que 1 $\implies$ basta dividir o número de pares por dois $\implies$ a resposta é $2^7 = 128$
Gabarito: c)

Questão 7:

Como $\angle FCD = \angle FED \implies F, E, C, D$ são concíclicos, e, como EC é tangente à circunferência, por ângulo de segmento (e teorema do bico),

$$\angle EDC = \angle ECD = \angle CAD = \angle FAD \implies \angle CED = 180 - 2\angle FAD \implies \angle DFA = 180 - 2\angle FAD$$

Como $ABCD$ é cíclico, temos também que $\angle FCB = \angle FDA$
Agora, olhando o triângulo ΔFAD

$$\implies \angle FAD + \angle FDA + \angle DFA = 180^\circ \implies 180^\circ - \angle FAD + 20^\circ = 180^\circ \implies \angle FAD = 20^\circ$$

Gabarito: b)

Questão 8:

Na segunda linha da pirâmide, o primeiro tijolo é a média de 1 e 2, ou seja, 1,5, o segundo tijolo é a média de 2 e 3, ou seja, 2,5 e assim sucessivamente. Já na terceira linha, teremos os números $A_3 = \left\{\frac{1{,}5+2{,}5}{2}, \frac{2{,}5+3{,}5}{2} + \frac{3{,}5+4{,}5}{2} + \ldots + \frac{98{,}5+99{,}5}{2}\right\} \implies A_3 = \{2, 3, 4, \ldots, 99\}$, retornando ao primeiro caso porém sem os tijolos 1 e 100. Dessa forma, na quarta linha os tijolos terão números iguais aos da segunda linha, com exceção do primeiro e último tijolos. Assim, perceba que as linhas ímpares possuem um subconjunto de números escritos contido no conjunto $A_{impar} = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ e as linhas pares possuem um subconjunto de números escritos contido no conjunto $A_{par} = \{1,5,\ 2,5\ 3,5,\ \ldots\ , 99,5\}$, bem como a cada linha diminuímos um tijolo no comprimento da linha.

Na linha 1 temos 100 tijolos, na linha 2 temos 99 tijolos,... então em qual linha teremos 1 tijolo (última linha)? O número de tijolos da linha n é dado por $100 - (n-1) = 101 - n$. Logo, $101 - n = 1 \implies n = 100$. Como 100 é par, o número do tijolo da linha 100 é a mediana do conjunto $A_{par} = \{1,5,\ 2,5\ 3,5,\ \ldots\ , 99,5\}$, que por ser uma P.A. de razão 1 podemos calcular a mediana como a média aritmética do maior e menor termo, ou seja $\frac{1{,}5+99{,}5}{2} = 50,5$

Gabarito: d)

Questão 9:

Lembramos da existência da circunferência dos 9 pontos. Então, por potência de ponto em T, temos:

$$TD \cdot TM = TE \cdot TF = TB \cdot TC = 20(20 + 80) = 2000$$

Temos também que $TM = TB + MB = 20 + 40 = 60 \implies TM \cdot TD = 60 \cdot TD = 2000 \implies 3 \cdot TD = 100 \implies 3MD = 3(TM - TD) = 3TM - 3TD = 180 - 100 = 80$

Resposta: 80

Questão 10:

$$a^3 - 2a^2 + 8a - 33 = a^3 - 3a^2 + a^2 + 11a - 3a - 33 = a(a^2 + a + 11) - 3(a^2 + a + 11) = (a - 3)(a^2 + a + 11)$$

Após fatorada, a expressão ficou mais simples, como o resultado é igual a um número primo, é necessário que uma das parcelas tenha módulo igual a 1. Portanto:

$$a - 3 = -1 \implies a = 2$$

$$a - 3 = 1 \implies a = 4$$

$$a^2 + a + 11 = -1 \implies a = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} \implies a \notin \mathbb{R}$$

$$a^2 + a + 11 = 1 \implies a = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} \implies a \notin \mathbb{R}$$

Conclui-se, portanto, que a soma dos inteiros a é $2 + 4 = 6$

Questão 11:

Se escrevermos o número n em binário, veja que tudo que a função f faz é tirar o último dígito de n, se ele for 0, ou passar seu último dígito para a primeira casa em binário e colocar um 0 no final, se for 1. Assim, Veja que o número de 0's do número, quase sempre, vai diminuir e o número de 1's sempre se manterá o mesmo. Assim, após um tempo, é de se esperar que não tenhamos nenhum 0 no número em decimal, que implicaria que ele seria uma série de 1's em binário, com o mesmo número de 1's que 2345, que é $100100101001_2 \implies$ ao final, teremos o número $11111_2 = 31$ e, após ele, $111110_2 = 62 \implies$ eventualmente, $f^k(2345) + f^{k+1}(2345) = 62 + 31 = 93$.

Para a solução seria suficiente só isso, porém, vamos provar o por que disso ser eventualmente constante:

Veja que se o número em binário termina em 0, ao tirarmos seu f, o número de 0's vai diminuir. E que ao tirarmos dois f's seguidos de um número, a quantidade de 0's dele pelo menos não aumenta. Pois ao fazer isso temos duas opções: Ou passamos o 1 que estava no final da representação decimal do número e o passamos para o começo, ou tiramos um 0 do número na primeira jogada (E colocamos no máximo um na próxima) Assim, se formos fazendo séries de duas jogadas e sempre que tivermos só um 0 fizermos uma jogada, o número de 0's vai diminuir, chegando assim, em no máximo $2\#1 + \#0$ jogadas, em um número que só tem 1's. Como $2\#1 + \#0 = 17$ nesse número, em no máximo 17 jogadas teríamos um número só de 1's.

Solução 2:

$$f(2345) = 2345 + g(2345) - 1 \implies 2345 + 4096 = 6440$$
$$f(6440) = 3220$$
$$f(3220) = 1610$$
$$f(1610) = 805$$
$$f(805) = 805 + g(805) - 1 = 805 + 1024 - 1 = 1828$$
$$f(1828) = 914$$
$$f(914) = 457...$$

Seguindo com a função iterada, temos que $f(457) = 968$, $f(968) = 484$, $f(484) = 242$, $f(242) = 121$, $f(121) = 244$, $f(244) = 122$, $f(122) = 61$, $f(61) = 124$, $f(124) = 62$, $f(62) = 31$, $f(31) = 62$, $f(62) = 31$... Veja que a iterada é cíclica para $f(62)$, ou seja, $f^{16}(2345)$. Assim, para $f^{par}(2345) = 62$ e $f^{impar}(2345) = 31$. Logo, $f^{2345}(2345) = 31$ e $f^{2346}(2345) = 62$, então $f^{2345}(2345) + f^{2346}(2345) = 62 + 31 = 93$

Questão 12: Veja que com um cubo e um heptaedro podemos formar qualquer número de 01 a 30, basta colocarmos em um os números $0, 1, 2, 3, 4, 5$ e no outro os números $0, 1, 2, 6, 7, 8, 9$. Nesse caso,

$a^2 + b^2 = 36 + 49 = 85$.

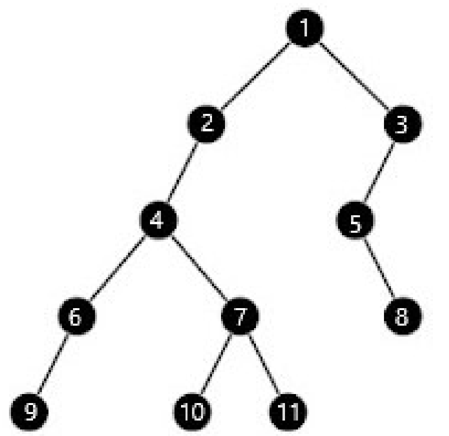
Vamos provar que não existe nenhum caso com soma de quadrados menor que essa. Para isso, vejamos que, primeiramente, os algarismos 1 e 2 devem estar em ambos os poliedros, afinal, 11 e 22 devem conseguir ser representados. Vejamos também que se 0 não está em ambos os poliedros, então o que não tiver 0 terá que ter todos os números de 1 a 9, afinal, 01, 02, ..., 09 todos têm que ser representados. Porém, isso já nos daria que a soma é pelo menos $9^2 + 4^2 > 85$, dado que um dos poliedros tem pelo menos 9 faces. Assim, ambos tem que ter 0, logo, $a + b \geq 13$, pois dentre eles precisamos colocar todos os números de 0 a 9 sendo 0,1 e 2 números que aparecem duas vezes nos poliedros

Porém, como fazemos pra minimizar $a^2 + b^2$ dado a soma mínima $a + b$? Por $MA - MG$, esse mínimo será dado quando a estiver o mais próximo possível de b

$$\implies \text{quando } a = 6, b = 7$$

Como queríamos demonstrar.
Nível 2 (Ensino médio):

Questão 1:



Para a bola n°1, há 4 cores disponíveis. Já as bolas 2 e 3 não podem ter a mesma cor que a 1, logo, há apenas 3 cores disponíveis para cada. E essa mesma linha de raciocínio é seguida para as demais (a n°4 não pode ter a mesma cor que a n°2, a 5 não pode ter a mesma cor que a 3 e assim sucessivamente). Ou seja, há 4 possibilidades para a bola 1 e 3 possibilidades para as demais $\implies 4 \cdot 3^{10} = 2 \cdot 2 \cdot 9^5 = 18 \cdot 18 \cdot 9^3 = 18^2 \cdot 9^3$.
Gabarito: a) $18^2 \cdot 9^3$

Questão 2: Note que $f(n)$ possui no máximo 1 fator 2 em sua fatoração. Dessa forma, se $n! \mid f(n)$, sabemos que $n \geq 4 \implies$ Abs! Pois $4 \mid n! \mid f(n)$, mas $4 \nmid f(n)$. Dessa forma, $n \leq 3$. Testando $n = 1, 2, 3$, temos:
$n = 1 \implies 1! = 1 \mid f(1) = 1 \rightarrow$ Ok!
$n = 2 \implies 2! = 2 \mid f(2) = 2 \rightarrow$ Ok!
$n = 3 \implies 3! = 6 \mid f(3) = 3 \cdot 2 = 6 \rightarrow$ Ok!
Logo, os três casos dão certo, então temos 3 valores inteiros positivos de n tal que $n! \mid f(n)$.
Gabarito: c)
Questão 3: Pela lei dos senos, sendo R o raio do circuncírculo de ABC, teremos: $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R \implies \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2R \implies R = 1$. Daí, a área do círculo será $\pi R^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$. Assim, o inteiro mais próximo de π é 3.
Gabarito: b)
Questão 4:

Na segunda linha da pirâmide, o primeiro tijolo é a média de 1 e 2, ou seja, 1,5, o segundo tijolo é a média de 2 e 3, ou seja, 2,5 e assim sucessivamente. Já na terceira linha, teremos os números

$A_3 = \left\{\frac{1,5+2,5}{2}, \frac{2,5+3,5}{2} + \frac{3,5+4,5}{2} + ... + \frac{98,5+99,5}{2}\right\} \Longrightarrow A_3 = \{2, 3, 4, ..., 99\}$, retornando ao primeiro caso porém sem os tijolos 1 e 100. Dessa forma, na quarta linha os tijolos terão números iguais aos da segunda linha, com exceção do primeiro e último tijolos. Assim, perceba que as linhas ímpares possuem um subconjunto de números escritos contido no conjunto $A_{impar} = \{1, 2, 3, ..., 100\}$ e as linhas pares possuem um subconjunto de números escritos contido no conjunto $A_{par} = \{1,5,\ 2,5\ 3,5,\ ...\ ,99,5\}$, bem como a cada linha diminuímos um tijolo no comprimento da linha.

Na linha 1 temos 100 tijolos, na linha 2 temos 99 tijolos,... então em qual linha teremos 1 tijolo (última linha)? O número de tijolos da linha n é dado por $100 - (n-1) = 101 - n$. Logo, $101 - n = 1 \Longrightarrow n = 100$. Como 100 é par, o número do tijolo da linha 100 é a mediana do conjunto $A_{par} = \{1,5,\ 2,5\ 3,5,\ ...\ ,99,5\}$, que por ser uma P.A. de razão 1 podemos calcular a mediana como a média aritmética do maior e menor termo, ou seja $\frac{1,5+99,5}{2} = 50,5$

Gabarito: d)

Questão 5:

Se tomarmos o subconjunto $\{1, 2, 3, 5, 8\}$ é fácil ver que ele funciona, vamos provar que é impossível com 6:
Veja que se fossem ao menos 6 elementos, olhando os pares

$$(1,8), (2,7), (3,6), (4,5)$$

Por PCP, ao menos dois deles teriam seus dois elementos no conjunto $\Longrightarrow$ temos dois pares com soma 9 → Absurdo! Então o maior conjunto tem 5 elementos.

Questão 6:

Veja que as únicas maneiras de n ser um ponto de pulo são se n for um número primo (que ainda não aparecia no mmc anterior) ou ser uma potência de um primo (pois o grau desse primo no mmc anterior seria menor). Se a fatoração de n envolver 2 ou mais primos ($n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots p_k^{\alpha_k}$), cada um dos termos $p_i^{\alpha_i}$ é menor que n, então já aparece no mmc. Dessa forma, queremos contar quantos primos e potências de primos temos entre 1 e 30. São eles:
$2,\ 3,\ 2^2 = 4,\ 5,\ 7,\ 2^3 = 8,\ 3^2 = 9,\ 11,\ 13,\ 2^4 = 16,\ 17,\ 19,\ 23,\ 5^2 = 25,\ 3^3 = 27,\ 29$, totalizando então em 16 pontos de pulo.
Gabarito: c)
Questão 7: Teremos que $x^3 + 2 + \frac{1}{x} = 2x^2 + x \iff x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$. Porém, note que $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = x^3 \cdot (x-2) - x \cdot (x-2) + 1 = (x-2) \cdot (x^3 - x) + 1 = (x-2) \cdot (x-1) \cdot x \cdot (x+1) + 1$. Assim, perceba que, se $x \geq 2$, $(x-2) \cdot (x-1) \cdot x \cdot (x+1) \geq 0$ (pois todos os fatores da multiplicação serão ≥ 0), e daí nossa equação será maior ou igual a 1. Logo, $x < 2$.

Porém, vejamos que $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = x^4 + x^2 + 1 - 2x^2 + 2x - 2x^3 = (x^2 - x - 1)^2 \Longrightarrow \varphi$ é uma solução dessa equação! (Nota: φ é a raiz positiva de $x^2 - x - 1 = 0$) **Gabarito:** 1

Questão 8:

Veja que $BAED$ é cíclico, pois $\angle BDA = \angle BEA = 90°$ $\Longrightarrow$ Por potência de ponto, como M é o centro dessa circunferência,

$$HA \cdot HD = MB^2 - MH^2 \Longrightarrow MH^2 = 25(25 - 21) = 100 \Longrightarrow MH = 10$$

Gabarito: c)

Questão 9:

Veja que

$$\sum_{i=1}^{20}(a_i - i)^2 = 2\sum_{i=1}^{20} i^2 - 2\sum_{i=1}^{20} ia_i$$

Então, para maximizar aquela soma precisaremos minimizar a soma

$$\sum_{i=1}^{20} ia_i$$

Por rearranjo, esse valor mínimo é atingido quando pareamos o maior com o menor, o segundo menor com o segundo maior, ...

$$\implies \sum_{i=1}^{20} ia_i \geq \sum_{i=1}^{20} i(21-i)$$

Com igualdade quando $a_i = 21 - i \implies$ Assim, o maior valor possível é

$$\sum_{i=1}^{20}(21-2i)^2 = 19^2 + 17^2 + \cdots + (-19)^2 = 2(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots 19^2) = 2660$$

Resposta: 2660

Questão 10:

Sabemos que

$$\frac{XB}{XC} = (\frac{AB}{AC})^2$$

Pois $\Delta XAC \sim \Delta XBA$

$$\implies \frac{XB}{XA} = \frac{XA}{XC} \implies \frac{XB}{XC} = (\frac{XA}{XC})^2 = (\frac{AB}{AC})^2$$

Porém, pelo teorema da ceviana qualquer,

$$\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC}\frac{Sen\measuredangle BAM}{Sen\measuredangle CAM}$$

$$\implies (\frac{KC}{KB})^2 = (\frac{Sen\measuredangle CAM}{Sen\measuredangle BAM})^2 = \frac{XB}{XC} \implies \frac{1}{4} = \frac{20}{XC} \implies XC = 80$$

Assim, $BC = XC - XB = 80 - 20 = 60$

Resposta: 60

Questão 11: Considere $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ a parte fracionária de x. Dessa forma, $\lfloor x \rfloor = x - \{x\}$. Daí, teremos:

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left\lfloor \frac{1829k}{p} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{p-1}\frac{1829k}{p} - \sum_{k=1}^{p-1}\left\{\frac{1829k}{p}\right\} = \frac{1829}{p}\cdot\frac{(p-1)p}{2} - \sum_{k=1}^{p-1}\left\{\frac{1829k}{p}\right\} = \frac{1829(p-1)}{2} - \sum_{k=1}^{p-1}\left\{\frac{1829k}{p}\right\}$$

Note que, como $p > 1829$, os números $1829, 2\cdot1829, \ldots, (p-1)\cdot 1829$ formam um sistema completo de resíduos módulo p (ou seja, todos eles deixam resto $1, 2, \ldots, p-1$ na divisão por p, em alguma ordem.

Prova. Suponha que existam i, j tais que $1829i \equiv 1829j \pmod{p}$. Como $p > 1829$, $mdc(p, 1829) = 1 \implies$ podemos cancelar 1829 em ambos os lados. Assim, $i = j$. Dessa forma, teremos:

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left\{\frac{1829k}{p}\right\} \stackrel{*}{=} \sum_{k=1}^{p-1}\left\{\frac{k}{p}\right\} = \sum_{k=1}^{p-1}\frac{k}{p} = \frac{1}{p}\cdot\frac{(p-1)p}{2} = \frac{p-1}{2}$$

Aqui, $*$ ocorre a igualdade pois se $a \equiv b \pmod{c}$, $\left\{\frac{a}{c}\right\} = \left\{\frac{b}{c}\right\}$. Dessa forma, nossa soma original fica igual a $\frac{1829(p-1)}{2} - \frac{p-1}{2} = \frac{1828(p-1)}{2} = 914\cdot(p-1)$. Note que $p - 1 \equiv -1 \pmod{p}$. Assim, nossa resposta será $914\cdot(-1) = -914$. Como queremos achar o valor absoluto da resposta, obtemos $|-914| = 914$.

Questão 12:

Se escrevermos o número n em binário, veja que tudo que a função f faz é tirar o último dígito de n, se ele for 0, ou passar seu último dígito para a primeira casa em binário e colocar um 0 no final, se for 1. Assim, Veja que o número de 0's do número, quase sempre, vai diminuir e o número de 1's sempre se manterá o mesmo. Assim, após um tempo, é de se esperar que não tenhamos nenhum 0 no número em decimal, que implicaria que ele seria uma série de 1's em binário, com o mesmo número de 1's que 2345, que é $100100101001_2 \implies$ ao final, teremos o número $11111_2 = 31$ e, após ele, $111110_2 = 62 \implies$ eventualmente, $f^k(2345) + f^{k+1}(2345) = 62 + 31 = 93$.

Para a solução seria suficiente só isso, porém, vamos provar o por que disso ser eventualmente constante:

Veja que se o número em binário termina em 0, ao tirarmos seu f, o número de 0's vai diminuir. E que ao tirarmos dois f's seguidos de um número, a quantidade de 0's dele pelo menos não aumenta. Pois ao fazer isso temos duas opções: Ou passamos o 1 que estava no final da representação decimal do número e o passamos para o começo, ou tiramos um 0 do número na primeira jogada (E colocamos no máximo um na próxima) Assim, se formos fazendo séries de duas jogadas e sempre que tivermos só um 0 fizermos uma jogada, o número de 0's vai diminuir, chegando assim, em no máximo $2\#1 + \#0$ jogadas, em um número que só tem 1's. Como $2\#1 + \#0 = 17$ nesse número, em no máximo 17 jogadas teríamos um número só de 1's.

Solução 2:

$$f(2345) = 2345 + g(2345) - 1 \Longrightarrow 2345 + 4096 = 6440$$

$$f(6440) = 3220$$

$$f(3220) = 1610$$

$$f(1610) = 805$$

$$f(805) = 805 + g(805) - 1 = 805 + 1024 - 1 = 1828$$

$$f(1828) = 914$$

$$f(914) = 457...$$

Seguindo com a função iterada, temos que $f(457) = 968$, $f(968) = 484$, $f(484) = 242$, $f(242) = 121$, $f(121) = 244$, $f(244) = 122$, $f(122) = 61$, $f(61) = 124$, $f(124) = 62$, $f(62) = 31$, $f(31) = 62$, $f(62) = 31$... Veja que a iterada é cíclica para $f(62)$, ou seja, $f^{16}(2345)$. Assim, para $f^{par}(2345) = 62$ e $f^{impar}(2345) = 31$. Logo, $f^{2345}(2345) = 31$ e $f^{2346}(2345) = 62$, então $f^{2345}(2345) + f^{2346}(2345) = 62 + 31 = 93$.