Desigualdades: $\sum f(x) \geq c$

Por Levi Barbosa e João Viana

1 Introdução

O Curso Noic tem um material de Cálculo em Desigualdades onde são apresentados os conceitos de limite, continuidade, convexidade e alguns teoremas comumente vistos na cadeira de Cálculo Universitário. Nesse material, vamos estudar problemas que envolvem achar o mínimo ou máximo de somas de funções com variáveis geralmente restritas a uma condição.

Apresentaremos técnicas como:

- Desigualdades de Jensen/Karamata
- Truque da Reta Tangente
- $n-1$ e.v
- Multiplicadores de Lagrange

É de se esperar que o leitor tenha familiaridade com Cálculo 1, em especial as principais regras de derivação. Boa leitura!

2 A Desigualdade de Jensen

Teorema 2.1. (Jensen) Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável. Se f é convexa no intervalo (a,b), (isto é, $f''(x) \geq 0\ \forall\ x \in (a,b)$), então para quaisquer $x_1, x_2, \ldots x_n \in (a,b)$ vale:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n}\right)$$

Por outro lado, se f é côncava no intervalo (a,b), (isto é, $f''(x) \leq 0\ \forall\ x \in (a,b)$), então para quaisquer $x_1, x_2, \ldots x_n \in (a,b)$ vale:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n}\right)$$

.

Teorema 2.2. (Jensen com Pesos) Nas mesmas condições, sejam $a_1, a_2, \ldots a_n$ reais quaisquer cuja soma é 1. Se $f'' \geq 0$ em (a,b) temos:

$$a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \cdots + a_n f(x_n) \geq f(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n)$$

Se, por outro lado, $f'' \leq 0$ em (a,b) temos

$$a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \cdots + a_n f(x_n) \leq f(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n)$$

Quando a função é estritamente convexa/côncava, a igualdade dessas inequações ocorre somente em $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Vamos ver como usar essa desigualdade com um exemplo.

Exemplo 2.1. (EGMO Brasil TST) Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais positivos com $a_1 + a_2 + \ldots a_n = 1$. Prove que

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}} + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

Solução.
Olhe para a função $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ definida em $(0,1)$. Temos

$$f'(x) = \frac{2-x}{2(1-x)\sqrt{1-x}} \Rightarrow f''(x) = \frac{4-x}{4(1-x)^{\frac{5}{2}}} > 0\ \forall x \in (0,1).$$

Ou seja, podemos usar a desigualdade de Jensen. Logo,

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}} + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}} \geq nf\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

3 A Desigualdade de Karamata

Sinceramente, eu nunca vi nenhum problema usar essa desigualdade. Mas como em todo lugar que vejo Jensen junto está também Karamata, deve ser proibido não falar dela. Então, aqui vai.

Definição 3.1. Dizemos que uma sequência $x_1 \geq \cdots \geq x_n$ **majora** outra sequência $y_1 \geq \cdots \geq y_n$ se

$$x_1 \geq y_1,\ x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2,\ \ldots\ , x_1 + x_2 + \ldots x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n.$$

Teorema 3.1. (Karamata) Se f é uma função convexa em um intervalo (a,b) e $x_1 \geq \cdots \geq x_n$ majora $y_1 \geq \cdots \geq y_n$ para $x_i, y_i \in (a,b)$,

$$f(x_1) + \cdots + f(x_n) \geq f(y_1) + \ldots f(y_n).$$

4 Jensen falhou! E agora?

Tente resolver o seguinte problema:

Exemplo 4.1. Sejam a, b, c reais positivos com $a + b + c = 3$. Prove que

$$\frac{(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2} + \frac{(3+b)^2}{2b^2+(3-b)^2} + \frac{(3+c)^2}{2c^2+(3-c)^2} \le 8$$

Veja que a igualdade ocorre em $a = b = c$. Se você aprendeu bem na seção anterior, tem uma coisa gritando para ser feita: Tentar usar a desigualdade de Jensen! Afinal, temos algo do tipo $\sum f(x) \le c$. Então, derivando a função, temos

$$f(x) = \frac{(3+x)^2}{2x^2+(3-x)^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{4(x+3)(2x-3)}{3(x^2-2x+3)^2} \Rightarrow f''(x) = -\frac{4(-4x^3-9x^2+54x-27)}{3(x^2-2x+3)^3}$$

Ops! Infelizmente, essa função nem sempre é côncava como gostaríamos, e nos encontramos travados no problema. O que acha da seguinte solução?

Solução.

Lema: Para todo $x > 0$, vale

$$\frac{(3+x)^2}{2x^2+(3-x)^2} \le \frac{4x+4}{3}$$

Prova. Eliminando os denominadores e fatorando a expressão, temos

$$\frac{(3+x)^2}{2x^2+(3-x)^2} \le \frac{4x+4}{3} \iff 3(3+x)^2 - (2x^2+(3-x)^2)(4x+4) \le 0 \iff (a-1)^2(4a+3) \ge 0.$$

Sendo assim, somando essa desigualdade em a, b e c,

$$\frac{(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2} + \frac{(3+b)^2}{2b^2+(3-b)^2} + \frac{(3+c)^2}{2c^2+(3-c)^2} \le \frac{4(a+b+c)+12}{3} = 8$$

■

O que aconteceu aqui? Por mais que pareça, esse lema não foi um truque de mágica e nem uma carteação. Usamos o Truque da Reta Tangente.

5 O Truque da Reta Tangente

A igualdade ocorre em $a = b = c$, mas a função não é convexa/côncava! E agora? Felizmente, quando não podemos usar Jensen, ainda temos esperança. As vezes, é possível obter o mesmo resultado usando o Truque da Reta Tangente. Sendo $a = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$, se conseguimos provar a desigualdade

$$f(x) \ge f(a) + (x-a)f'(a)$$

para todo x no intervalo desejado, somando as desigualdades para $x = x_1, \ldots, x_n$ obtemos exatamente $f(x_1) + f(x_2) + \ldots f(x_n) \ge nf(a)$ (Verifique).

Perceba que isso é linearizar nossa desigualdade, e, de fato, o que estamos fazendo é "torcer" para que o gráfico de $f(x)$ esteja totalmente acima da reta tangente à $f(x)$ em $x = a$, dando assim uma estimativa por baixo e que satisfaz o caso de igualdade que temos. Essa desigualdade geralmente é provada fatorando o polinômio obtido, então tenha bastante fé.

Exemplo 5.1. (USAMO 2003). Sejam a, b, c números reais positivos. Prove que

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \le 8.$$

Essa é a versão homogênea do problema apresentado anteriormente. Dessa vez, aplique o Truque da Reta Tangente e "desvende" o passe de mágica que fizemos.

6 n-1 e.v

Se não podemos aplicar Jensen e nem o Truque da Reta Tangente, nossas cartas ainda não acabaram.

Teorema 6.1. **($n-1$ e.v).** Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável e $x_1,\dots x_n$ reais com $x_1+\dots+x_n$ = constante. **Suponha que f tenha exatamente um ponto de inflexão**. Então, se $S=f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)$ atinge valor máximo ou mínimo, esse valor ocorre quando $n-1$ das variáveis são iguais.

Esse resultado é bem intuitivo. Se queremos achar o mínimo de f, por exemplo, note que os pontos da parte convexa de f devem ser iguais (por Jensen) e os pontos da parte côncava devem ser extremos opostos. Ou seja, um deles deve ir para um extremo da parte côncava: O ponto de inflexão! Agora, esse ponto pertence também a parte convexa e, para minimizar o resultado, ele deve ser igual aos demais já citados. Repetindo esse algoritmo de "smoothing" que tem fim somente quando há $n-1$ pontos iguais, chegamos ao valor optimal.

Exemplo 6.1. **(MOP 2012).** Sejam a,b,c,d reais positivos com $a+b+c+d=4$. Prove que

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\geq a^2+b^2+c^2+d^2$$

Veja que, nesse caso, nem Jensen nem o Truque da Reta Tangente funcionam.

Solução. Seja $f(x)=1/x^2-x^2$. Queremos $\sum f(x)\geq 0$. Temos

$$f'(x)=-\frac{2}{x^3}-2x\Rightarrow f''(x)=\frac{6}{x^4}-2$$

Logo, f é convexa em $(0,\sqrt[4]{3})$ e côncava em $(\sqrt[4]{3},\infty)$. Então, dados a,b,c,d, vamos usar o argumento do n-1 e.v. Primeiro afastamos os pontos de $(\sqrt[4]{3},\infty)$ uns dos outros e juntamos os pontos de $(0,\sqrt[4]{3})$, o que por Jensen minimiza a soma das $f's$. Então, reduzimos ao caso $a=b=c$, e basta

$$3f(x)+f(4-3x)\geq 0\iff -\frac{12(x-1)^2(9x^4-24x^3+19x^2-2x-4)}{x^2(3x-4)^2}\geq 0$$

Lembre que devido a condição, temos $0<x<4/3$. Logo, basta $g(x)=9x^4+19x^2-24x^3-2x-4\leq 0$.

Agora é só usar o que sabemos de cálculo! temos $g'(x)=0\iff 36x^3-72x^2+38x-2=0\iff (x-1)(18x^2-18x+1)=0\iff x=1,\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{6}$. Veja que todos esses pontos estão na parte convexa da função, sendo então mínimos locais. Logo, $g(x)$ não tem máximos locais $\Rightarrow$ pelo teorema do "subiu tem que descer", $g(x)$ tem no máximo duas raízes. Como $g(0)$ e $g(4/3)$ são negativos e $x\to\pm\infty$ nos dá valores positivos, o intervalo $(0,4/3)$ está contido no intervalo das duas raízes e portanto $g(x)<0$ $\forall x\in(0,4/3)$. Como é um sinal estrito, a igualdade ocorre apenas em $a=b=c=d=1$.

■

Agora vamos falar da técnica dos Multiplicadores de Lagrange. Ela é de fato mais rebuscada, pois para entendê-la em sua totalidade é necessário um pouco mais de cálculo. Entetanto, abordaremos de uma forma leve e intuitiva. De qualquer forma, não fique preso às definições ou a formalidade excessiva. Apenas garanta que, ao utilizá-la, todos os requisitos estão sendo cumpridos e que você não está deixando escapar nenhum caso. O lado bom dessa técnica é que ela serve muito bem o seu propósito, afinal, é quase uma receita de bolo, mesmo precisando de um ingrediente a mais de vez em quando.

7 Multiplicadores de Lagrange

Definição 7.1. (Gradiente/Nabla) Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ derivável parcialmente, definimos $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como:

$$\nabla f(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

A parte interessante de definir tal operador aparece quando se olha para as curvas de nível, onde para maximizar/minimizar o crescimento de uma função é necessária uma ortogonalidade.

Exemplo 7.1. Calcule o gradiente de $f(x, y) = x^2 + y^2$

Sol.: Note que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$. Assim, $\nabla f = (2x, 2y)$.

Exemplo 7.2. Calcule o gradiente de $f(x, y, z) = x + y^2 + 2xy + x^3 + z^2$.

Sol.: Primeiro é preciso calcular as derivadas parciais de cada um:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = 1 + 2y + 3x^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = 2y + 2x \\ \frac{\partial f}{\partial z} & = 2z \end{cases}$$

Desse modo, $\nabla f = (1 + 2y + 3x^2, 2y + 2x, 2z)$.

Agora estamos prontos para ver o Teorema principal.

Teorema 7.1. (Multiplicadores de Lagrange). Dada uma função com derivadas parciais bem definidas com $f : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ onde $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ é um compacto, e parâmetros $g_1, g_2, ..., g_k : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ com derivadas parciais bem definidas também, então tem-se que f admite um máximo e um mínimo e eles ou estão na borda ou satisfazem a seguinte situação:

$$\nabla f(p) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(p)$$

Para algumas contantes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{K}$ o ponto que assume a optimalidade.

Vale salientar que muitas vezes o domínio não será um compacto, entretanto podemos contornar com alguns casos bem definidos:

(i) Se o o domínio dos pontos for ilimitado, sendo um aberto, podemos olhar para o bordo com uma sequência indo para os limites do aberto.

(ii) Se o domínio for limitado, apenas considere um compacto que consiga englobar todo o domínio e bordo que será analisado é o bordo deste compacto.

Exemplo 7.3. Encontre o valor máximo de $x + y$ dado que $x^2 + y^2 = 1$.

Sol.: Perceba que a função que queremos optimizar é justamente $f(x, y) = x + y$ e o parâmetro é $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. Logo, precisamos testar a borda do compacto $[-1, 1]^2$ que contém o domínio e testar a hipótese do Lagrange, sendo ela:

$$\nabla f = \lambda \nabla g \iff (1, 1) = (2\lambda x, 2\lambda y)$$

O que implica que $x = y$. Assim, $2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Assim, testando, tem-se os valores $f = \pm\sqrt{2}$ e o caso da borda, tem-se $f = \pm 1$. Ou seja, o máximo ocorre com $f = \sqrt{2}$ e o mínimo $f = -\sqrt{2}$.

Até agora só falamos de teorias bonitas, mas o importante é colocar a mão na massa com problemas mais desafiadores. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 7.4. (IMO 2001). Prove que para todos os reais positivos a, b, c, tem-se

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ba}}\geq 1$$

Sol.: A primeira vista, multiplicadores de Lagrange não parece uma boa ideia até porque precisamos de parâmetros. Mas vamos achar o parâmetro na marra com algumas substituições de variáveis:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ba}}\geq 1 \iff \frac{1}{\sqrt{1+\frac{8bc}{a^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8ac}{b^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8ab}{c^2}}}\geq 1$$

Logo, fazendo a substituição $\frac{bc}{a^2}=x$, $\frac{ac}{b^2}=y$, $\frac{ba}{c^2}=z$, obtemos:

$$f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{1+8x}}+\frac{1}{\sqrt{1+8y}}+\frac{1}{\sqrt{1+8z}}$$

Com o adicional

$$g(x,y,z)=xyz=1$$

Agora é ir pro abraço! Aplicando a técnica dos Multiplicadores de Lagrange, temos

$$\nabla f(x,y,z)=\left(\frac{-4}{(1+8x)^{\frac{3}{2}}},\frac{-4}{(1+8y)^{\frac{3}{2}}},\frac{-4}{(1+8z)^{\frac{3}{2}}}\right)=\lambda\nabla g(x,y,z)=\lambda(yz,xz,xy)\iff$$

$$\iff\left(\frac{-4}{(1+8x)^{\frac{3}{2}}},\frac{-4}{(1+8y)^{\frac{3}{2}}},\frac{-4}{(1+8z)^{\frac{3}{2}}}\right)=\lambda\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right)\iff$$

$$\iff\left(\frac{x}{(1+8x)^{\frac{3}{2}}},\frac{y}{(1+8y)^{\frac{3}{2}}},\frac{z}{(1+8z)^{\frac{3}{2}}}\right)=\left(\frac{-\lambda}{4},\frac{-\lambda}{4},\frac{-\lambda}{4}\right)$$

Vamos analisar o crescimento dessa função. Veja que

$$h(x)=\frac{x}{(1+8x)^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow h'(x)=\frac{1-4x}{(1+8x)^{\frac{5}{2}}}$$

Como estamos trabalhando com $x>0$, sua derivada é positiva em $(0,\frac{1}{4})$ e negativa em $(\frac{1}{4},\infty)$. Assim, nesses intervalos, a função é crescente e decrescente, respectivamente, fazendo com que dois dos valores x, y, z caiam em um mesmo intervalo, por PCP. Desse modo, eles são iguais. Então, $x=y$, $x=z$ ou $y=z$ para a optimalidade (ainda sem considerar a borda). Considere, sem perda de generalidade, $x=y\Rightarrow x^2\cdot z=1\Rightarrow z=\frac{1}{x^2}$. Assim, nos resta analisar o máximo de

$$m(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}}+\frac{2}{\sqrt{1+8x}}$$

Isso é bem mais palpável, pois a teoria de máximos e mínimos para funções de uma só variável está bem definida e é algo recorrente. Temos que os extremos ocorrem em

$$m'(x)=0\iff\frac{8}{(\frac{8}{x^2}+1)^{\frac{3}{2}}x^3}-\frac{8}{(8x+1)^{\frac{3}{2}}}=0\iff(8+x^2)^{\frac{3}{2}}=(8x+1)^{\frac{3}{2}}\iff x\in\{1,7\}.$$

Não é complicado ver que 1 corresponde ao mínimo e 7 ao máximo (pois $\lim_{x\to 0}m(x)=2$, assim $m(1)=1$ é mínimo e $m(7)=\frac{9}{\sqrt{57}}>1$ é de máximo, além disso $\lim_{x\to\infty}m(x)=1$). Assim, o mínimo ocorre quando $x=1\Rightarrow m(x)=1$, então um possível candidato a mínimo é 1. Perceba que isso não está exatamente definido em um compacto, mas podemos extrapolar e ver que mesmo estando definido em um aberto, o resulto vale com algumas ressalvas: Precisamos olhar para a borda com uma sequência de pontos indo para os limites do aberto. Isso seria algo como um deles ir pra infinito, fazendo que algum vá pra zero e vice-versa, mas note que, para minimizar, é necessário que o terceiro também vá para infinito, obtendo assim 1 como resultado, que não é válido pois isso só ocorre no limite. Portanto, o mínimo é 1 e só ocorre com $a=b=c$.

■

8 Problemas Propostos

Os problemas destacados em vermelho possuem solução no final do material. Os demais possuem um link do AoPS com a solução. Não pensamos na ordem dos problemas ao adicioná-los, então não ligue para isso. Divirta-se!

1. Sejam A, B e C os ângulos internos de um triângulo acutângulo. Prove que:

$$tg(A) + tg(B) + tg(C) \geq 3\sqrt{3}$$

2. (MA-MG). Sejam $a_1, a_2, \ldots a_n$ reais positivos. Prove que:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

3. (Alemanha 2017). Sejam x, y, z inteiros não negativos satisfazendo $x + y + z = 1$. Prove que:

$$1 \leq \frac{x}{1 - yz} + \frac{y}{1 - zx} + \frac{z}{1 - xy} \leq \frac{9}{8}.$$

4. (IMO 2020). Os reais a, b, c, d satisfazem $a \geq b \geq c \geq d > 0$ e $a + b + c + d = 1$. Prove que:

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1$$

5. (IMOSL 2009). Sejam a, b, c reais positivos com $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$. Prove que:

$$\frac{1}{(2a + b + c)^2} + \frac{1}{(a + 2b + c)^2} + \frac{1}{(a + b + 2c)^2} \leq \frac{3}{16}.$$

6. (China) Sejam a, b, c, d reais positivos com $a + b + c + d = 1$. Prove que:

$$6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + \frac{1}{8}$$

7. (MOP 2002) Determine os possíveis valores de

$$S = \left(\frac{2a}{b + c}\right)^r + \left(\frac{2b}{c + a}\right)^r + \left(\frac{2c}{a + b}\right)^r$$

sobre os reais $a, b, c > 0$ para (i) $r = \frac{1}{2}$, (ii) $r = \frac{2}{3}$.

8. (Japão 1997). Sejam a, b, c reais positivos. Prove que:

$$\frac{(b + c - a)^2}{(b + c)^2 + a^2} + \frac{(c + a - b)^2}{(c + a)^2 + b^2} + \frac{(a + b - c)^2}{(a + b)^2 + c^2} \geq \frac{3}{5}$$

9. (USAMO 2017). Sejam a, b, c, d reais não negativos com $a + b + c + d = 4$. Ache o mínimo de

$$\frac{a}{b^3 + 4} + \frac{b}{c^3 + 4} + \frac{c}{d^3 + 4} + \frac{d}{a^3 + 4}$$

10. (ELMOSL 2013). Sejam a, b, c reais positivos com $a + b + c = 3$. Prove that

$$18 \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{(3 - c)(4 - c)} + 2(ab + bc + ca) \geq 15.$$

11. (Hong Kong TST 2019). Se $57a + 88b + 125c \geq 1148$, onde $a, b, c > 0$, ache o mínimo de

$$a^3 + b^3 + c^3 + 5a^2 + 5b^2 + 5c^2?$$

12. (IMOSL 2016) Sejam a, b, c números reais positivos com $\min(ab, bc, ca) \geq 1$. Prove que

$$\sqrt[3]{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)} \leq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^2 + 1.$$

13. (USAMO 2001) Sejam $a, b, c \geq 0$ satisfazendo $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Prove que:

$$0 \leq ab + bc + ca - abc \leq 2.$$

14. (Rússia) Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Prove que

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} \geq 2(ab + bc + ca)$$

9 Soluções

Solução 6. (China) Vamos ao básico,

$$6(a^3+b^3+c^3+d^3) \geq (a^2+b^2+c^2+d^2)+\frac{1}{8} \iff 6(a^3+b^3+c^3+d^3)-a^2-b^2-c^2-d^2 \geq \frac{1}{8}$$

Assim, faz muito setindo definir a função

$$f(a,b,c,d) = 6(a^3+b^3+c^3+d^3)-a^2-b^2-c^2-d^2$$

e note que $(a,b,c,d) \in [-1,1]^4$ que é um compacto, então podemos usar lagrange com o parâmetro

$$g(a,b,c,d) = a+b+c+d = 1$$

Agora, vamos ao lagrange:

$$\nabla f = \lambda \nabla g \iff (18a^2-2a, ..., 18d^2-2d) = \lambda(1,1,1,1)$$

Logo, analisando a equação

$$18x^2-2x = \lambda$$

ela possui no máximo duas soluções reais (é uma equação do segundo grau) e tem soluções a,b,c,d assim, temos alguns casos para analisar: $a=b=c\neq d$, $a=b\neq c=d$ e $a=b=c=d$.

Caso 1. $(a=b=c=d)$ então todo mundo é igual a $\frac{1}{4}$. Substiuindo fica:

$$f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) = 6\times 4\left(\frac{1}{4}\right)^3 - 4\times\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

Caso 2. $(a=b\neq c=d)$ temos que $a+c=\frac{1}{2}$. Assim,

$$f(a,b,c,d) = 12(a^3+c^3)-2(a^2+c^2) = 12(a+c)((a+c)^2-3ac)-2((a+c)^2-2ac)$$

que tem mínimo quando ac é mínimo, que é quando é 0. Assim, o caso mínimo nesse caso é

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0\right) = 1$$

Caso 3. $(a=b=c\neq d)$ temos:

$$3a+d=1 \Rightarrow d = 1-3a$$

Resultando em maximizar uma função de uma variável em a:

$$f(a,a,a,1-3a) = 18a^3+6(1-3a)^3-3a^2-(1-3a)^2$$

e não é difícil ver que $a\to\frac{1}{4}$ é o mínimo dessa função definida em $a\in(0,\frac{1}{3})$ basta analisar a derivada e os extremos. Assim, o mínimo pelo lagrange é $\frac{1}{8}$ e ocorre quando $a=b=c=d$ até agora. Só precisamos finalmente observar a borda do compacto que contém que é $[-1,1]^4$ e para estar na borda, algum deles tem que ser 1 pois não pode ser -1. Assim, o resto seria 0 sendo assim:

$$f(1,0,0,0) = 6-1 = 5$$

que não é um mínimo.

Logo, o mínimo é $\frac{1}{8}$ e ocorre se, e somente se, $a=b=c=d=\frac{1}{4}$.

Interessante salientar que essa função nas condições dadas do enunciado não possui máximo, apenas supremo sendo ele igual a 5 e que se obtem apenas na borda (SIM, existem casos onde a borda assume a optimalidade e é por isso que não se deve ignorar esses casos).

Solução 7. (MOP 2002) Primeiro, fixando b, c e $a \to +\infty$ nos dá que ambas as expressões não possuem máximo. Vamos achar o valor mínimo delas.

Para (i) $r = \frac{1}{2}$, fixando $a + b + c = 2$ pela homogeneidade, conjecturamos pelo Truque da Reta Tangente que

$$\sqrt{\frac{2x}{2-x}} \geq \sqrt{2}x$$

Abrindo as contas, isso equivale a $(x-1)^2 \geq 0$, que é verdade. Somando em a, b, c, temos que *lado esquerdo* $\geq 2\sqrt{2}$, mas a igualdade não pode ocorrer em todos devido a condição $a + b + c = 2$. Mas de fato, $a = b$ e $c \to 0$ nos dá que o intervalo $(2\sqrt{2}, +\infty)$ é completamente preenchido.

Para (ii) $r = \frac{2}{3}$, fixando $a + b + c = 3$ pela homogeneidade, conjecturamos pelo Truque da Reta Tangente que

$$\sqrt[\frac{2}{3}]{\frac{2x}{3-x}} \geq x$$

Abrindo as contas, isso equivale a $4 \geq (3-x)^2 x \iff 0 \geq (x-1)^2(x-4)$ que é verdade para $x \in (0,3)$. Somando em a, b, c temos

$$\sum_{sym} \sqrt[\frac{2}{3}]{\frac{2a}{3-a}} \geq a + b + c = 3$$

com igualdade se e somente se $a = b = c$. Então, o intervalo $(3, +\infty)$ é completamente preenchido.

Solução 9. (USAMO 2017) Motivado pela reta tangente ao gráfico de $\frac{1}{x^3+4}$ em $x = 2$, veja que

$$\frac{1}{x^3+4} \geq -\frac{x}{12} + \frac{1}{4} \iff x(x+1)(x-2)^2 \geq 0, \text{ verdade.}$$

Então, temos que

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b^3+4} \geq \sum_{cyc} \frac{a}{4} - \sum_{cyc} \frac{ab}{12} = 4 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{12} \sum_{cyc} ab \geq 2/3$$

usando MA-MG em $(a+c, b+d)$ para ver que $\sum_{cyc} ab \leq 4$. Logo, a resposta é $2/3$ e a igualdade vale se e somente se $a + c = b + d$ para $a, b, c, d \in \{0, 2\}$, i.e, $(a, b, c, d) = (0, 0, 2, 2)$ e permutações cíclicas.

Solução 14. (Rússia) Fixando $a + b + c = 1$ pela homogeneidade, queremos provar que

$$\sum_{sym} f(a) = \sum_{sym} a^2 - \frac{2}{a} + 1 \geq 0$$

.

Vamos analisar a concavidade dessa função. Temos

$$f'(a) = 2x + \frac{2}{x^2} \Rightarrow f''(a) = 2 - \frac{4}{x^3}$$

Logo, f é côncava em $(0, \sqrt[3]{2})$ e convexa em $(\sqrt[3]{2}, \infty)$. Pelo $n-1$ e.v, o mínimo ocorre quando duas variáveis são iguais. Se $a = b \Rightarrow c = 1/a^2$, queremos

$$2a^2 - \frac{4}{a} + 2 + \left(\frac{1}{a^2}\right)^2 - 2a^2 + 1 \geq 0 \iff \frac{1}{a^4} + 3 \geq \frac{4}{a}$$

E isso é verdade por MA-MG. Ademais, a igualdade ocorre se e somente se $a = b = c$.

10 Dicas/Links

1. Essa é uma aplicação direta de Jensen, usando que $A + B + C = \pi$.
2. Aplique o logaritmo natural dos dois lados e use Jensen.
3. https://artofproblemsolving.com/community/c6h1441668p8209248
4. https://artofproblemsolving.com/community/c6h2278647p17821569
5. https://artofproblemsolving.com/community/c6h355781p1932917
8. https://artofproblemsolving.com/community/c6h146p537
10. https://artofproblemsolving.com/community/c6h545070p3151938
11. https://artofproblemsolving.com/community/c6h1693996p10846227
12. https://artofproblemsolving.com/community/c6h1480690p8639254
13. https://artofproblemsolving.com/community/c5h13655p96705

11 Referências

1. *OTIS Excerpts*, Evan Chen.

2. *A Brief Introduction to Olympiad Inequalities*, Evan Chen.

3. *Lagrange Murderpliers Done Correctly*, Evan Chen.

4. *evan explains the n-1 equal value principle* - vEnhance (Evan Chen on yt).

5. *Standard Inequalities*, Evan Chen.

6. *Técnicas em Desigualdades - Semana Olímpica 2021*, Rafael Filipe.

7. *Using Tangent Lines to Prove Inequalities*, Mathematical Excalibur Volume 10, Number 5.

8. *Desigualdades II - POTI*, Valentino Amadeus Sichinel.

9. *O Rei das Mentiras*, Luís Farias Maia.

10. *Art Of Problem Solving*.

Email para sugestões/contato: levi.fb.123@gmail.com e jgcostaviana@gmail.com