

IYPT Brasil 2022
Deixa de ser Feyn, man

Problema 08: Pêndulo de Euler

Gustavo Lima Affonso Ferreira
Gustavo Victor Valente Braga e Souza
João Henrique Martins de Lima e Silva
Lucas Tavares Vitoriano
Mychel Lopes Segrini

Líder: Prof. Cícero Arthur

Fortaleza - CE
Colégio Farias Brito
2022

Sumário

1	Enunciado do problema e descrição	3
2	Fundamentação teórica	4
2.1	Sobre os imãs	4
2.1.1	Análise qualitativa	4
2.1.2	Análise quantitativa	4
2.2	Análise do movimento do pêndulo	5
3	Procedimento Experimental	7
3.1	Materiais	7
3.2	Montagem	7
3.3	Métodos	9
4	Resultados	10
4.1	Análise do período quanto à espessura da placa	10
4.2	Análise do período quanto ao comprimento do imã	11
4.3	Análise do período quanto à intensidade dos dipolos	11
4.4	Análise para o amortecimento	13
5	Conclusões	17
5.1	Pontos positivos	17
5.2	Pontos negativos	17
5.3	Espectativas futuras	17
6	Bibliografia	18

1 Enunciado do problema e descrição

”Pegue uma placa grossa de material não magnético e fixe um ímã de neodímio em cima dela. Suspenda uma haste magnética (que pode ser montada a partir de ímãs cilíndricos de neodímio) embaixo dela. Desvie a haste para que ela toque a placa apenas com a borda mais alta e solte-a. Estude o movimento de tal pêndulo sob várias condições.”

Enunciado IYPT - Brasil

O enunciado do problema indica que, ao colocar uma haste, que formada por ímãs de neodímio, na presença de um campo magnético criado por ímãs de neodímio, suspensa e apoiada sobre uma borda será possível observar um determinado movimento dessa barra. Esse movimento poderá ser caracterizado como um movimento oscilatório.

Esse relatório visa caracterizar algumas propriedades do movimento que a haste possui nesse experimento. Para isso, buscamos criar um modelo teórico que seja capaz de explicar o que ocorre durante o fenômeno e que consiga criar algumas previsões sobre o movimento da haste.

Ao analisar o experimento, percebe-se que o movimento da haste possui um carácter oscilatório que é similar ao movimento de um pêndulo físico.

Uma vez determinado quais as condições iniciais do pêndulo, iremos analisar características do movimento, como o período das oscilações e o tempo de duração do mesmo. Também será analisado fatores que influenciam no experimento, como a influência do campo magnético, da placa que separa os ímãs e do tamanho da haste.

Os resultados encontrados estão apresentados nas seções seguintes desse relatório, no qual é usado para a aquisição e análise dos dados experimentais o software *Tracker*.

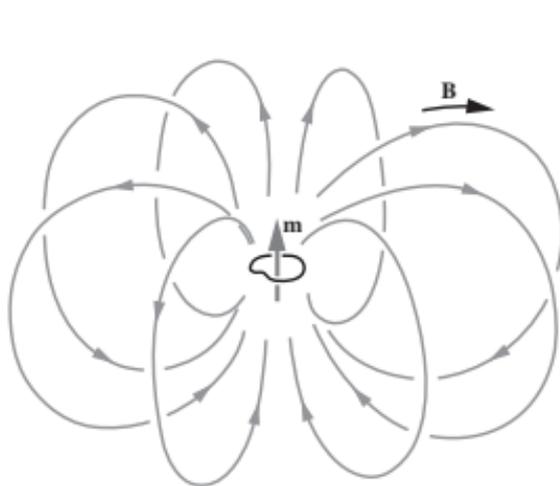
2 Fundamentação teórica

2.1 Sobre os imãs

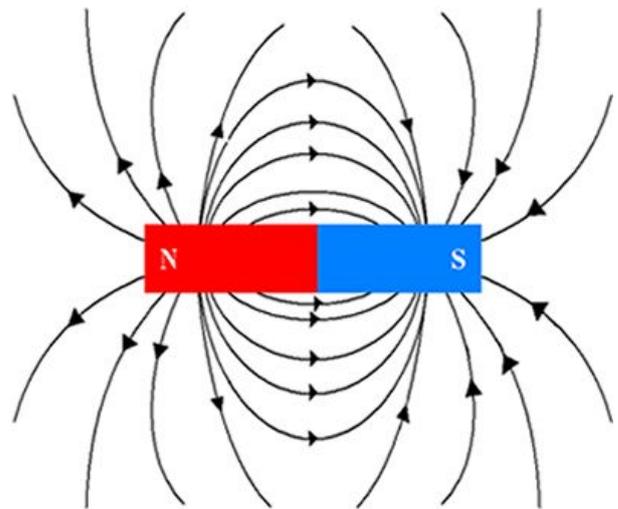
2.1.1 Análise qualitativa

Imãs são materiais capazes de criar campos magnéticos próprios, logo eles podem exercer torques e forças entre si, de acordo com as leis do eletromagnetismo. Isso se deve ao fato de que um imã possui um momento de dipolo magnético intrínseco. Isso ocorre pois um imã é uniformemente magnetizado, ou seja, possui um grande número de dipolos magnéticos atômicos apontando para uma mesma direção. Sendo assim, ao quanto maior for o imã, maior será esse momento de dipolo, pois terá mais dipolos magnéticos atômicos.

Além disso, as linhas de campo magnético que estão a uma mesma distância de um imã são similares às linhas de campo que estão a uma mesma distância de um dipolo. Veja as figuras 1a e 1b. Tendo isso em mente, no nosso modelo teórico vamos considerar um imã como sendo um grande dipolo magnético.



(a) Linhas de campo de um dipolo magnético



(b) Linhas de campo de um imã genérico

2.1.2 Análise quantitativa

Como dito anteriormente, em nosso modelo o imã será considerado um dipolo magnético. Com isso será possível caracterizar cada imã cilíndrico de neomíneo com um momento de dipolo \vec{m} . Entretanto, a haste é formada pela associação de vários imãs. Então, teremos que o momento de dipolo da haste aumentará com o comprimento da barra. $\uparrow l \uparrow m_2$

O campo gerado por um dipolo magnético é dado por:

$$\vec{B}_{dip} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \cdot \hat{r} - \vec{m}) \quad (1)$$

O torque (\vec{N}) gerado em um dipolo na presença de um campo magnético é dado por

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (2)$$

Sendo assim, ao colocar-mos um dipolo \vec{m}_2 para interagir com o campo magnético do dipolo \vec{m}_1 o torque que 2 sofrerá de 1 será:

$$\vec{N} = \vec{m}_2 \times \vec{B}_1$$

$$\vec{N} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m}_2 \times \hat{r})(\vec{m}_1 \cdot \hat{r}) - \vec{m}_2 \times \vec{m}_1]$$

Perceba que \vec{m}_2 é paralelo a \hat{r} . Portanto, esse produto vetorial é igual a zero. Logo:

$$\vec{N} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (\vec{m}_1 \times \vec{m}_2) \quad (3)$$

Na figura 1 é possível observar alguns parâmetros relevantes, como \vec{m}_1 , \vec{m}_2 e \hat{r} . Perceba também que, caso os momentos de dipolo estejam virados para outra direção, não haverá alterações nas equações, pois os sinais de "-" que surgiriam ao inverter o sentido dos dipolos iriam se cancelar. Sendo assim, o sentido dos dipolos é um parâmetro irrelevante.

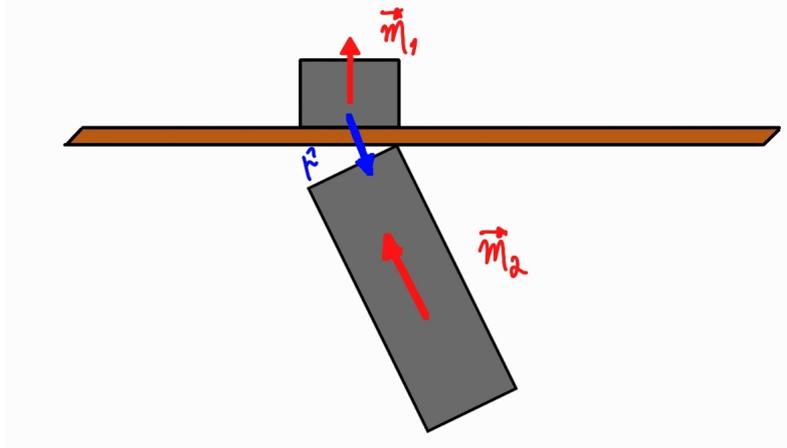


Figura 1: Imagem do sistema analisado

2.2 Análise do movimento do pêndulo

Agora vamos analisar como se dará o movimento da haste sobre a influência do campo magnético discutido anteriormante. Como foi dito na introdução, o movimento pode ser dado de duas formas, análogo a um pêndulo físico ou análogo a um pêndulo cônico. Nessa subseção será dividida em duas partes para uma melhor análise de ambos os movimentos.

A figura 2 mostra uma imagem meramente ilustrativa do sistema, em que h representa a separação entre o ímã e o ponto de contato da haste.

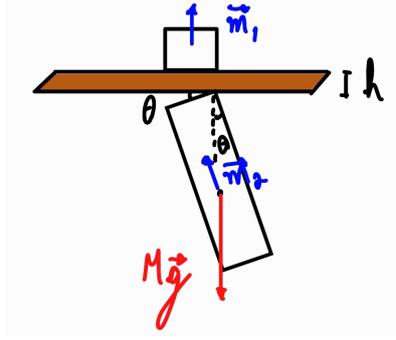


Figura 2: Imagem do sistema de pêndulo físico

Assim, podemos calcular o torque resultante em relação ao ponto de contato, que será dado por:

$$\vec{N} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}_1 \times \vec{m}_2}{r^3} + \vec{r}' \times M\vec{g}$$

$$\frac{1}{3}Ml^2\ddot{\theta} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_1m_2 \sin \theta}{(l^2/4 + h^2 + lh)^{3/2}} - \frac{l}{2}Mg \sin \theta$$

Em que $r \approx \sqrt{l^2/4 + h^2 + lh}$, $r' = l/2$ e $M =$ massa da barra. Para pequenos ângulos $\sin \theta \approx \theta$. Perceba que, com essa aproximação, encontraremos a equação característica de um MHS. Logo, temos que:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{3 \left[Mgl + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{16m_1m_2}{(l^2/4 + h^2 + lh)^{3/2}} \right]}{2Ml^2}$$

Portanto, o período de cada oscilação será dado por:

$$T = 2\pi l \sqrt{\frac{2M}{3 \left[Mgl + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{16m_1m_2}{(l^2/4 + h^2 + lh)^{3/2}} \right]}} \quad (4)$$

Portanto, percebe-se que o período de oscilações deve aumentar com o comprimento da barra ($\uparrow l \uparrow T$), aumenta com a espessura da placa que separa os imãs ($\uparrow h \uparrow T$) e diminui com a intensidade dos imãs ($\uparrow m_1 \downarrow T$ e $\uparrow m_2 \downarrow T$)

3 Procedimento Experimental

3.1 Materiais

Para a realização do experimento, utilizamos os seguintes materiais:

- Imãs de Neodímio;
- Placas idênticas de MDF de espessura uniforme (2mm);
- Celular para filmagens.

A figura 3 mostra todos os materiais utilizados.



Figura 3: Materiais utilizados

Durante o experimento, foi utilizado imãs diferentes, como mostra na figura. Dentre eles, há imãs de diâmetro de 13mm, 12mm, 10mm e 5mm. Chamaremos esses imãs de imã 1, 2, 3 e 4, respectivamente, sendo 1 o mais "forte" e o 4 o mais "fraco". A figura 4 mostra esses diferentes imãs e suas respectivas numerações

3.2 Montagem

O experimento é montado da seguinte maneira: imãs que formam o dipolo m_1 são presos na placa de MDF utilizando-se fita. Para poder analisar o movimento da haste, foi realizado o



Figura 4: Imãs utilizados no experimento

seguinte método experimental: O experimento é realizado em um suporte adequado enquanto é gravado abaixo dele. A figura 5 mostra o arranjo experimental visto de lado. Nela, percebe-se que o ítem 1 representa o dipolo m_1 , o ítem 2 representa a placa que separa os imãs e o ítem 3 representa o dipolo m_2 .

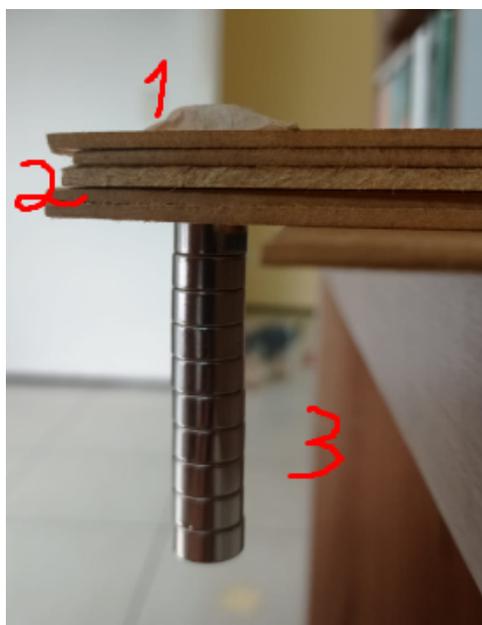


Figura 5: Arranjo experimental

3.3 Métodos

Para a análise de dados, foi utilizado o software *Tracker*, que permite analisar um vídeo frame a frame, de tal forma que é possível analisar com maior precisão a evolução dos parâmetros do problema. Como se pode observar na figura 6, o *Tracker* permite a escolha de um eixo de coordenadas, tirar dados em escala, uma análise detalhada do movimento do pêndulo, além de plotar tabelas e gráficos com os resultados obtidos.

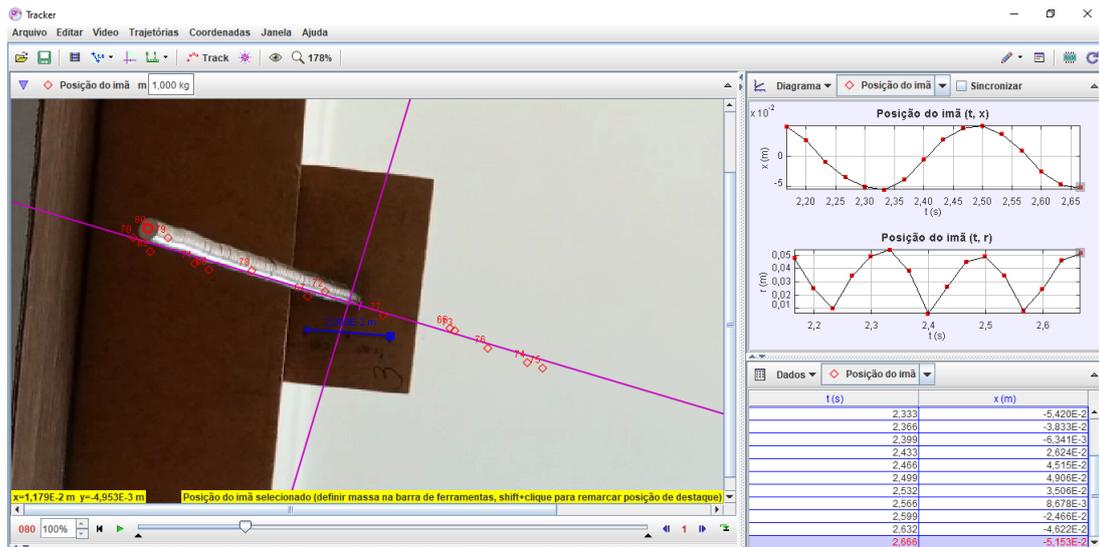


Figura 6: Imagem do tracker sendo utilizado

4 Resultados

Ao realizar o experimento, observa-se um grande aspecto no movimento além das oscilações. Percebe-se que há um certo amortecimento nas oscilações que, dependendo dos parâmetros utilizados (l, h, m_1 e m_2) pode ser muito intenso.

Para melhores resultados experimentais, são analisadas a influência de cada parâmetro nas subseções abaixo, bem como uma discussão sobre o que causa essa dissipação.

4.1 Análise do período quanto à espessura da placa

Para a análise desse parâmetro, outros parâmetros serão fixados. Veja:

1. l será 8cm;
2. O imã que compõe m_1 será o imã 1;
3. O imã que compõe m_2 será o imã 4.

Sendo assim, podemos fazer um gráfico do período em função da espessura da placa para poder comparar o modelo teórico com os resultados experimentais.

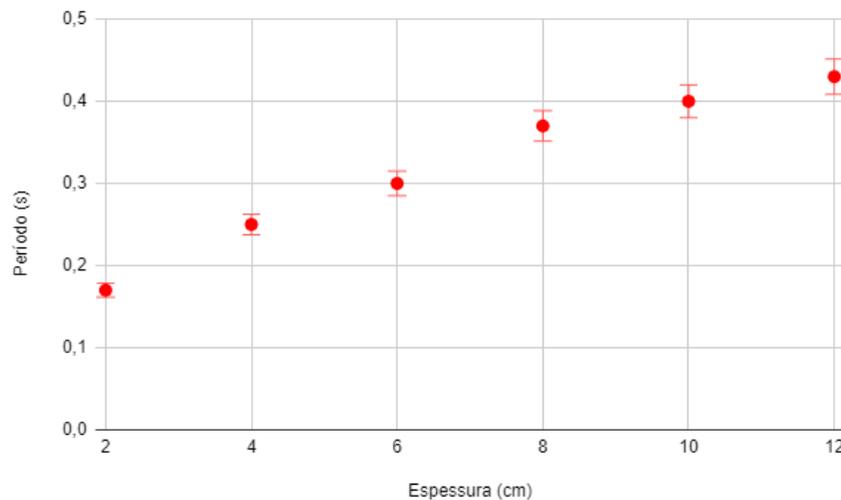


Figura 7: Gráfico do período em função da espessura

Ao comparar o gráfico da figura 7 com a equação 4 percebe-se que o modelo teórico está de acordo com o modelo experimental, ou seja, os resultados concordam com o que foi previsto anteriormente, tendo em vista que o esperado era obter relação $\uparrow h \uparrow T$. Entretanto, devido à grande quantidade de termos da equação 4, e a pouca quantidade de pontos, não foi possível validar a exata dependência de h .

4.2 Análise do período quanto ao comprimento do imã

Agora será avaliado a influência do comprimento do imã que compõe m_2 no período das oscilações.

Para essa análise da influência de l , serão fixados os seguintes parâmetros:

1. h será 6cm;
2. O imã que compõe m_1 será o imã 1;
3. O imã que compõe m_2 será o imã 4.

Plotando um gráfico do período em função do comprimento:

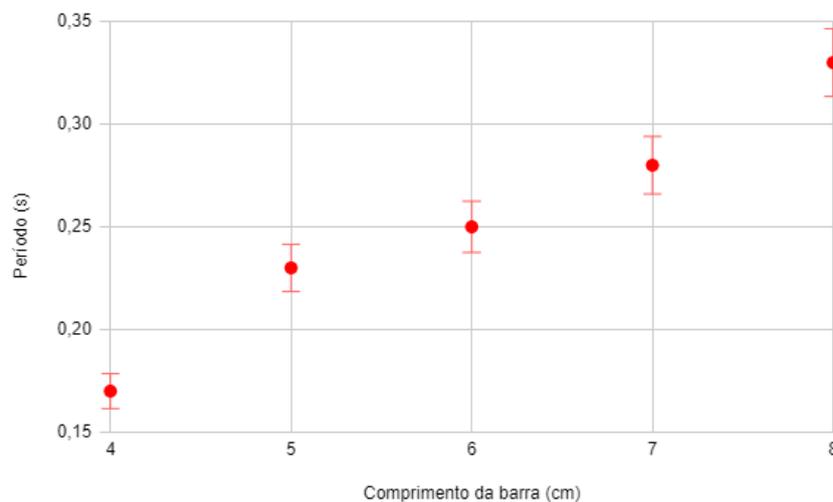


Figura 8: Gráfico do período em função de l

Logo, ao comparar o gráfico da figura 8 com a equação 4, percebe-se que o modelo teórico também está de acordo com os resultados experimentais, visto que foi encontrada a relação $\uparrow l \uparrow T$. Entretanto, da mesma forma que a análise de h , não foi possível determinar a exata relação entre l e T .

4.3 Análise do período quanto à intensidade dos dipolos

Agora será avaliado a influência da intensidade dos imãs nos períodos das oscilações. Para isso, será feita duas análise, uma para o dipolo m_1 e outra para o dipolo m_2 .

Para a primeira análise, será avaliado o período de oscilação, variando o tamanho do imã que compõe m_1 , ou seja, variando o diâmetro dos imãs, enquanto será mantido os seguintes parâmetros:

1. l será 8cm;
2. h será 6cm;
3. O imã que compõe m_2 será o imã 4.

Com isso, obtém-se o gráfico da figura 9.

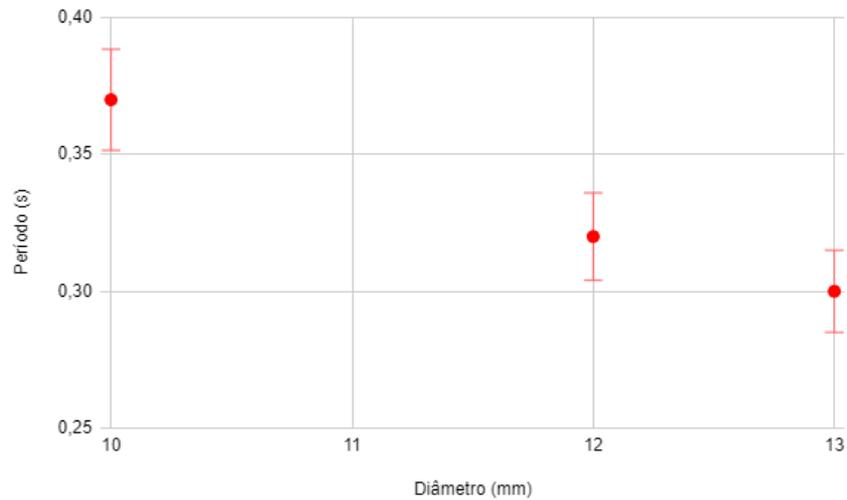


Figura 9: Período em função do diâmetro do imã de m_1

Percebe-se que o período diminui quando é utilizado diâmetros maiores, ou seja, quanto maior o dipolo de m_1 , menor será o período. Esse resultado é o previsto pelo modelo teórico.

Perceba que não há dados para o imã de 5mm de diâmetro, pois magnética que ele gera não consegue manter o pêndulo em contato com a placa ($F_{mag} < Peso$)

Agora, para a segunda análise, será avaliado o período de oscilação, variando o tamanho do imãs que compõem m_2 , ou seja, variando o diâmetro dos imãs, enquanto será mantido os seguintes parâmetros:

1. l será 6cm;
2. h será 6cm;
3. O imã que compõe m_1 será o imã 1.

Assim, plotando o gráfico da figura 10:

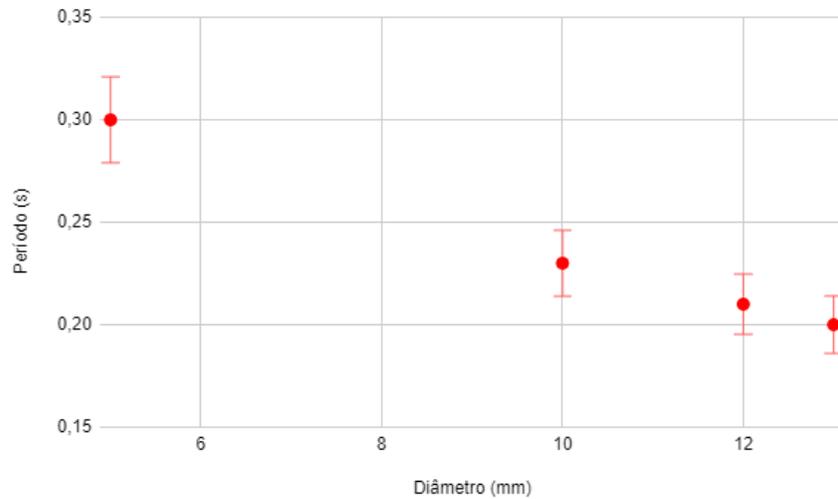


Figura 10: Período em função do diâmetro do ímã de m_2

Da mesma forma que na primeira análise, o período diminui conforme o diâmetro do ímã aumenta, validando novamente o modelo teórico.

Esses dados comprovam que, quanto maior for o torque magnético, menor será o período de oscilação.

4.4 Análise para o amortecimento

Ao colocar o pêndulo para oscilar, percebe-se um amortecimento no movimento que se assemelha com o amortecimento de um movimento amortecido sub-crítico. Veja a figura 11.

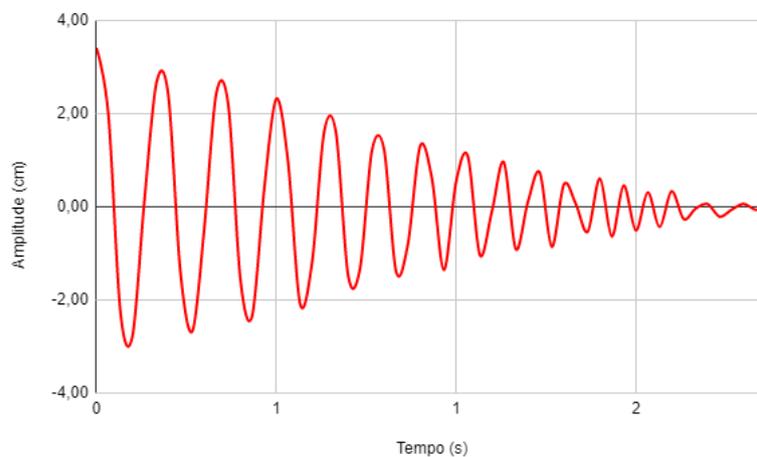


Figura 11: Gráfico da amplitude em função do tempo para $l = 8\text{cm}$, $h = 2\text{cm}$, m_1 o mais forte e m_2 o mais fraco.

Para poder analisar o amortecimento presente no fenômeno, será observado o tempo de duração do experimento de acordo com cada parâmetro (h, l, m_1)

A figura 12 mostra o tempo de duração em função da espessura da placa. Perceba que, quando maior for h , maior é o tempo de duração do experimento, ou seja, menor é o amortecimento.

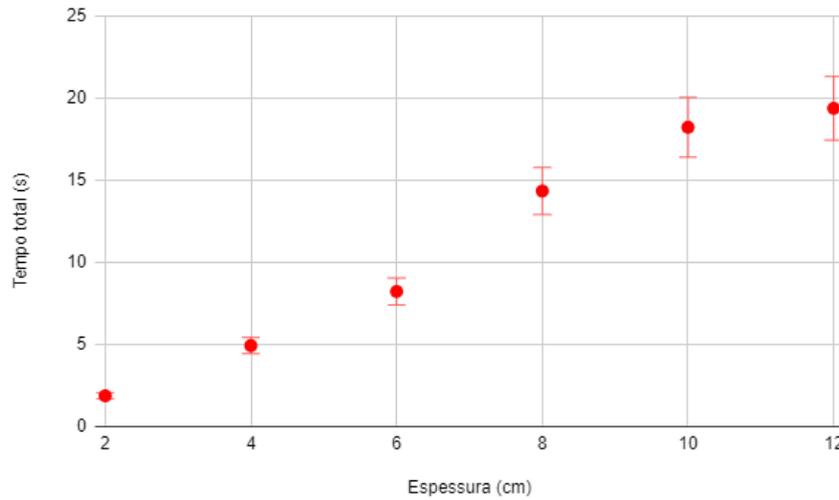


Figura 12: Gráfico do tempo de oscilação em função da espessura

Agora, analisando a figura 13 percebe-se um padrão diferente. O tempo de duração do experimento aumenta de acordo com l até chegar em um certo valor e depois diminui.

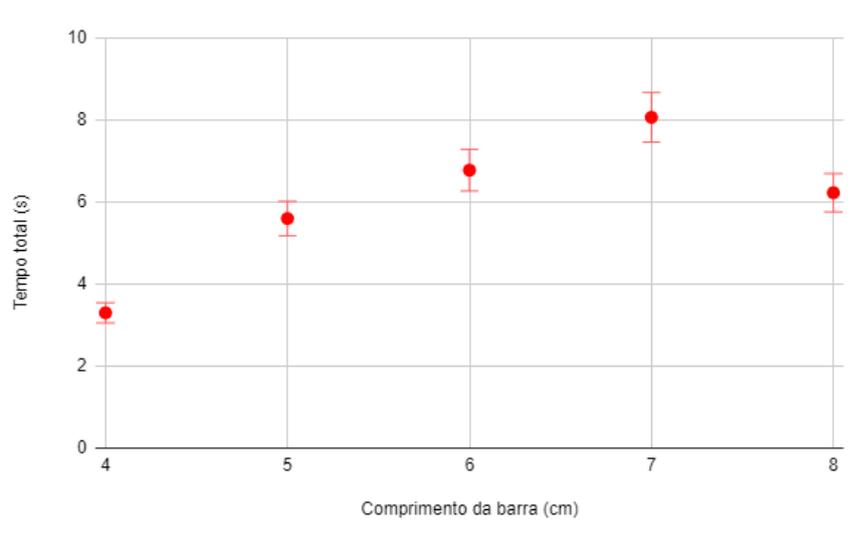


Figura 13: Gráfico do tempo de duração do experimento em função de l

Agora, as figuras 14 e 15 mostram o tempo de duração do fenômeno de acordo com os diâmetros dos ímãs utilizado. Veja que, quanto mais forte o ímã for, menor é o tempo de

duração do fenômeno.

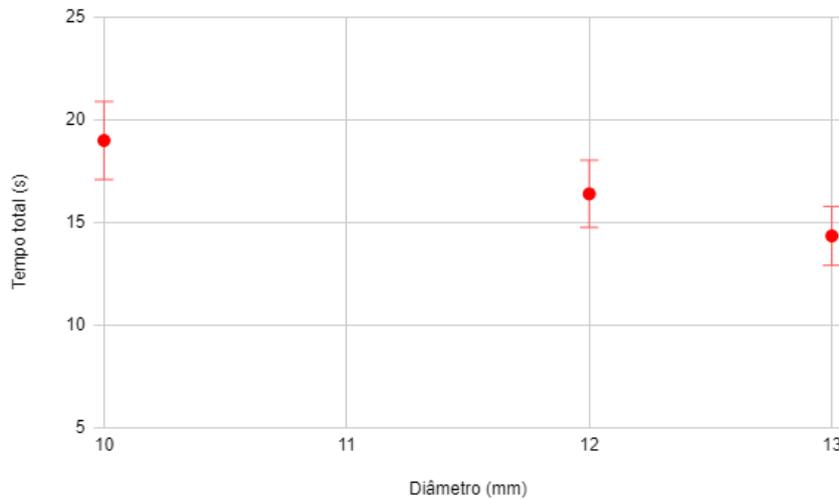


Figura 14: Gráfico do tempo de duração do experimento em função do diâmetro de m_1

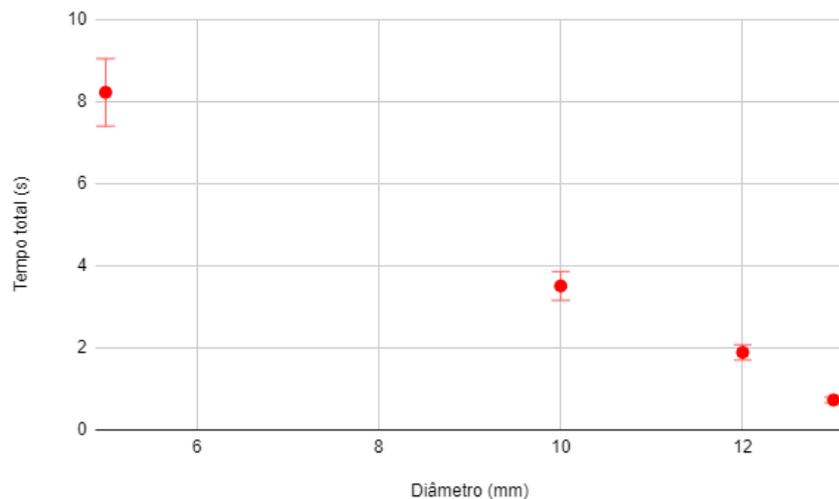


Figura 15: Gráfico do tempo de duração do experimento em função do diâmetro de m_2

Ao analisar todos esses dados experimentais e a forma em que ocorre cada oscilação, chega-se a conclusão que a dissipação ocorre por causa de dois principais fatores: a resistência do ar e a força magnética entre os ímãs!

A resistência do ar não possui contribuições muito relevantes, mas não pode ser desprezível, pois ela aparece em qualquer experimento de pêndulo.

A força magnética entre os ímãs, por sua vez, não dissipa energia de forma direta, e sim de uma forma indireta através de colisões entre o pêndulo e a placa que separa os ímãs. A figura 16 mostra três momentos do pêndulo durante cada meia oscilação. Cada vez que o pêndulo passa pela posição da 16b há uma colisão e, portanto, uma dissipação de energia.

Quanto mais intensa for a interação entre os dipolos, mais intensa será a colisão e maior será essa dissipação.

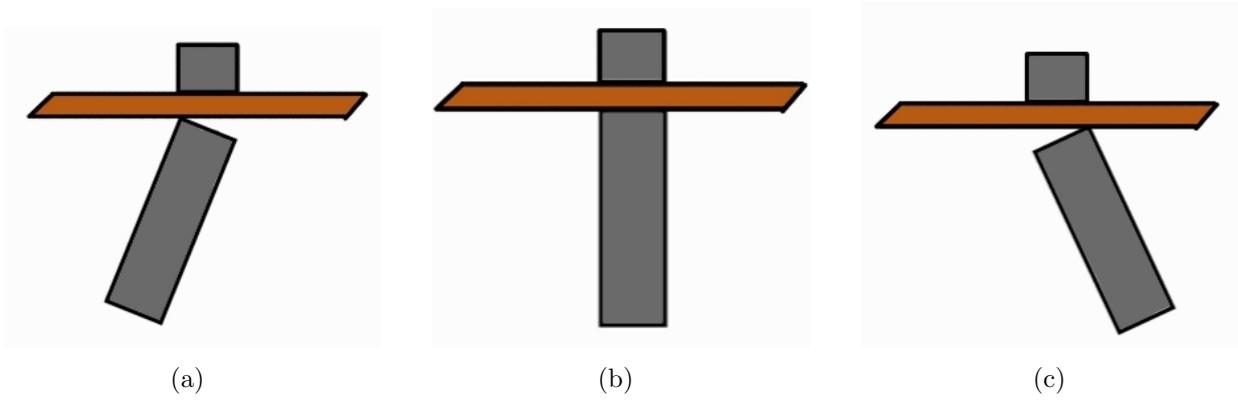


Figura 16: Oscilação do pêndulo

5 Conclusões

Com os resultados obtidos, conclue-se que a interação magnética entre os imãs influenciam significativamente no experimento, assim como previsto no modelo teórico. Ademais, segue os pontos positivos, negativos e as expectativas para futuros experimentos.

5.1 Pontos positivos

- Foi possível criar um modelo teórico para o experimento;
- Foi possível realizar o experimento de maneira simples e reprodutível;
- Foi possível observar e avaliar a influência de parâmetros relevantes;
- Observou-se um fenômeno não previsto pelo modelo teórico (a dissipação de energia), mas foi possível explicar como que ele ocorre.

5.2 Pontos negativos

- Não foi possível prever com exatidão a energia dissipada de acordo com os parâmetros dados (l , h , m_1 e m_2);
- Não foi possível calcular os exatos valores de m_1 e m_2 , apenas as relações entre eles de acordo com o tamanho dos imãs.

5.3 Espectativas futuras

- Realizar o experimento utilizando condições iniciais diversas, como uma velocidade inicial;
- Analisar a influência do material que constitui a placa que separa os imãs;
- Analisar como o sistema se comportaria ao utilizar um pêndulo que não seja formado por imãs de neodímio.

6 Bibliografia

- [1] David J. Morin. Introduction to Classical Mechanics with Problems and Solutions. 1a ed. Cambridge University Press, 2008.
- [2] H. Moysés Nussenzveig. Curso de Física Básica. Fluidos, Oscilações - Volume 2 4a ed. Edgard Blucher, 2002.
- [3] David J. Griffiths. Introduction to Electrodynamics. 4a ed. Cambridge University Press, 2017.
- [4] Edward M. Purcell and David J. Morin. Electricity and Magnetism. 3a ed. Cambridge University Press, 2013.
- [5] Boyer, Timothy H. (1988). "The Force on a Magnetic Dipole". American Journal of Physics. 56 (8): 688–692. doi:10.1119/1.15501
- [6] Cullity, B. D. and Graham, C. D. Introduction to Magnetic Materials (2 ed.). Wiley-IEEE Press, 2008
- [7] **Bar Magnet** hyperphysics. Disponível em:
<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/magnetic/elemag.html>. Acesso em: 2 dez. 2022.