

IYPT Brasil 2023  
Deixa de ser Feyn, man

## **Problema 9: Parafuso Oscilante**

Gustavo Lima Affonso Ferreira  
Gustavo Victor Valente Braga e Souza  
Lucas Tavares Vitoriano  
João Henrique Martins de Lima e Silva  
Mychel Lopes Segrini

Líder: Prof. Cícero Arthur

Fortaleza - CE  
Colégio Farias Brito  
2022

# Sumário

<b>1</b>	<b>Enunciado do problema e descrição</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Fundamentação teórica</b>	<b>4</b>
2.1	Abordagem do corpo rígido . . . . .	4
2.1.1	Tensor de Inércia . . . . .	4
2.1.2	Eixos principais . . . . .	5
2.2	Heavy Symmetric Top . . . . .	5
2.3	Ângulos de Euler . . . . .	6
2.4	Resolvendo o Heavy Symmetric Top pelo método Lagrangiano. . . . .	6
<b>3</b>	<b>Procedimento Experimental</b>	<b>8</b>
3.1	Materiais e montagem . . . . .	8
3.2	Montagem Experimental . . . . .	8
3.3	Métodos . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>10</b>
4.1	Estudo dos ângulos limites . . . . .	10
4.2	Estudo dos Deslocamentos e Oscilações. . . . .	14
4.2.1	Deslocamento no eixo vertical . . . . .	14
4.2.2	Deslocamento no eixo horizontal . . . . .	15
4.3	Estudo do aumento das oscilações. . . . .	16
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>17</b>
5.1	Pontos positivos. . . . .	17
5.2	Pontos negativos. . . . .	17
5.3	Expectativas futuras . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>18</b>

# 1 Enunciado do problema e descrição

*Quando colocado de lado em uma rampa e solto, um parafuso pode experimentar oscilações crescentes à medida que desce a rampa. Investigue como o movimento do parafuso, bem como o crescimento dessas oscilações dependem dos parâmetros relevantes.*

Enunciado IYPT - Brasil

A descrição do problema indica um parafuso sendo abandonado do repouso em um plano inclinado e começando a rolar. Durante esse movimento, o parafuso rota em torno de seu próprio eixo enquanto translada no plano. Nesse relatório usaremos a aproximação de um parafuso para um "Heavy Symmetric Top". A equiparação é sugerida, pois ambos possuem dois de seus eixos principais iguais, tomando como referência um mesmo referencial. (uma abordagem teórica mais aprofundada sobre os tops será feita nas sessões seguintes.)

Os resultados apresentados nesse relatório buscam estudar experimentalmente a aproximação teórica, e explicar com base nos parâmetros relevantes fenômenos peculiares desse experimento. Para tal estudo, vamos analisar o movimento do parafuso como um todo, eixos de rotação, condições de deslizamento e outros parâmetros variáveis interessantes para a análise experimental.

Uma vez estudada a aproximação teórica, nós buscamos então investigar o fenômeno do aumento das oscilações em torno do próprio eixo à medida que o movimento avança. Estudamos mais especificamente variações de comprimento e de raio da cabeça do parafuso, como o movimento se comporta nos eixos horizontais e verticais, e como a oscilação pode depender de parâmetros potenciais e energéticos do sistema como um todo.

Os resultados encontrados estão apresentados nas sessões seguintes deste relatório, no qual usamos para aquisição dos dados experimentais: medidas de comprimento utilizando um paquímetro, medidas de massa utilizando uma balança, análise do movimento por meio de software digitais, aplicativo para medir o ângulo de inclinação do plano, e um cronômetro. Analisaremos ainda, com base nos mesmos parâmetros, como o movimento do parafuso pode variar conforme com o ângulo do plano inclinado.

## 2 Fundamentação teórica

No modelo teórico apresentado neste relatório, será feita a abordagem de um corpo rígido descendo em um plano inclinado rotando nas três dimensões do espaço. Serão feitas aproximações teóricas que virão a ser confirmadas experimentalmente nas sessões a seguir. Abaixo, em 1, temos uma representação da aproximação teórica geral que será usada para este modelamento.

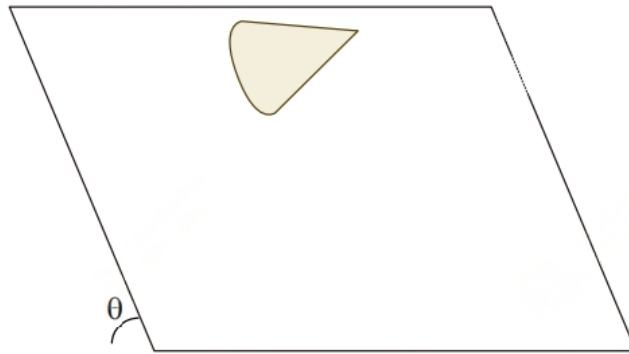


Figura 1: Representação da aproximação teórica que será realizada.

### 2.1 Abordagem do corpo rígido

#### 2.1.1 Tensor de Inércia

Um tensor de inércia tem como definição, a grandeza que define o grau de dificuldade em se alterar o estado de movimento de um corpo em rotação. Tal definição também pode ser utilizada para o momento de inércia, porém, no caso do tensor de inércia, tomamos a rotação em relação aos três eixos  $(x, y, z)$

O tensor de inércia de um corpo rígido em relação a um determinado referencial, é dado por:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

### 2.1.2 Eixos principais

Os eixos principais de um corpo são definidos como o conjunto de três eixos ortonormais,  $\vec{\omega}_1$ ,  $\vec{\omega}_2$ , e  $\vec{\omega}_3$ , que obedecem à propriedade:

$$I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

Ou seja, eixos principais são direções onde o vetor  $\omega$  aponta para a mesma direção do vetor de momento angular. Utilizar os eixos principais é uma ferramenta que facilita muito os cálculos envolvendo tensores de inércia, pois transformam matrizes de 9 entradas em uma de 3, fato esse que será de suma importância ao decorrer deste modelamento teórico.

## 2.2 Heavy Symmetric Top

Um "Heavy Symmetric Top" (HST) pode ser definido como um modelo de corpo rígido que, sob a influência da gravidade, possui dois de seus eixos principais iguais, tomando o centro de massa do objeto como referência. O HST será o modelo de aproximação que será usado para descrever um parafuso nessa situação. A equiparação pode ser confirmada, porque dois de seus eixos principais são iguais. A aproximação para um HST pode facilitar o manuseio teórico por conta da ampla gama de fenômenos que ocorrem com este modelo, facilitando assim a explicação de alguns pontos peculiares deste problema. Um HST pode ser representado pela figura 2. Observa-se, também, que por sua geometria, seu momento de inércia pode ser aproximado ao de um cone, fato esse que usaremos nas próximas sessões

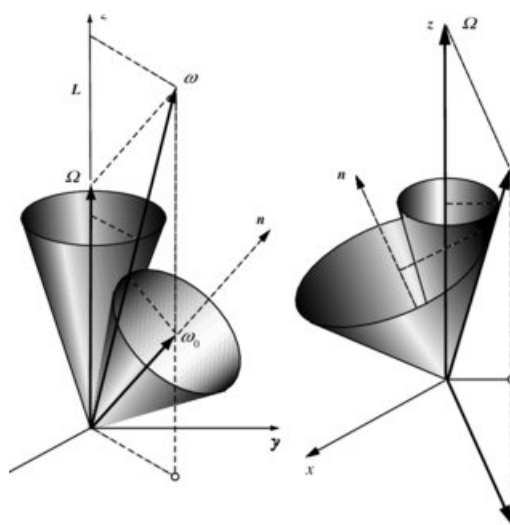


Figura 2: Representação de um HST no plano tridimensional

## 2.3 Ângulos de Euler

Para resolver as equações de movimento deste modelo, é conveniente recorrer aos ângulos de Euler. Os ângulos de Euler podem ser descritos pela figura 3

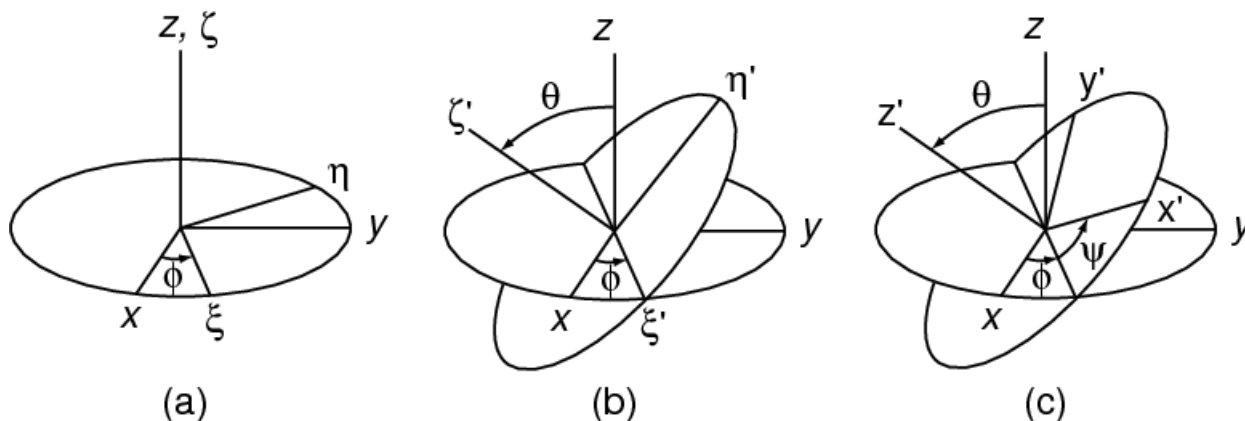


Figura 3: Representações dos Ângulos de Euler em diferentes notações

Tomando como base a notação (b), podemos definir os ângulos:

$\theta$  : Sendo  $\zeta'$  o eixo de simetria do HST,  $\theta$  é o ângulo que  $\zeta'$  faz com a vertical

$\Phi$ : Ângulo do deslocamento azimutal do HST

$\psi$ : Ângulo de rotação do corpo ao redor de  $\zeta'$

Temos também que a velocidade angular em relação ao referencial fixo é igual à velocidade angular em relação ao referencial S somada à velocidade do referencial S em relação ao referencial fixo. Então:

$$\omega = \dot{\psi} \cdot \vec{z}' + (\dot{\Phi} \cdot \vec{z} + \dot{\theta} \cdot \vec{\xi}')$$

Os ângulos de Euler tem importância nesse tópico por conta da capacidade de descrição do deslocamento angular tridimensional do High Symmetric Top. Fazer substituições de coordenadas cartesianas para este sistema de coordenadas também pode ajudar na hora de poupar contas e facilitar o entendimento.

## 2.4 Resolvendo o Heavy Symmetric Top pelo método Lagrangiano.

Para resolver este modelo pelo método lagrangiano, teremos que ter que a energia cinética de um corpo rígido rotando e transladando tridimensionalmente, é dada por  $T = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot L$ , sendo L o momento angular. Reescrevendo em termo dos ângulos de Euler temos que:

$$T = \frac{1}{2}.I_3(\dot{\psi} + \dot{\Phi} \cdot \cos \theta)^2 + \frac{1}{2}.I.((\dot{\Phi})^2 \cdot \sin^2 \theta) + \dot{\theta}^2)$$

E também temos que a energia potencial gravitacional do Top quando está prestes a ser abandonado no sistema, é dada por

$$U = Mgd \sin \theta$$

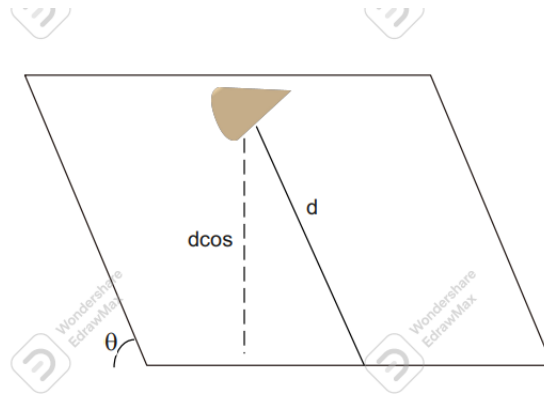


Figura 4: Representação das medidas utilizadas

, sendo  $d$  a distância total que o top percorrerá no plano, e  $\theta$  o ângulo de inclinação do plano, podemos ver a situação representada na figura 4. Pelo método de LaGrange, temos que a equação de forças desse sistema, em função dos parâmetros fornecidos, será:

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial \frac{1}{2}.I_3.(\dot{\psi} + \cos \dot{\Phi})^2 + \frac{1}{2}.I(\dot{\Phi}^2 \cdot \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) - mgd \sin \theta}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \frac{1}{2}.I_3.(\dot{\psi} + \cos \dot{\Phi})^2 + \frac{1}{2}.I(\dot{\Phi}^2 \cdot \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) - mgd \sin \theta}{\partial \theta}$$

Podemos notar  $\dot{\Phi}$  como a frequência de precessão do HST. No caso do problema analisado, será a frequência com que o parafuso faz o movimento pendular enquanto se desloca na vertical com seu eixo vertical deslocado por conta de condições de atrito e deslizamento causadas pela superfície. Nas condições do problema, também podemos ver que a coordenada  $\psi$  não varia, porque o parafuso estará sobre o plano, logo não conseguirá fazer rotações, então o deslocamento do ângulo de rotação será nulo. Nas condições do problema, estarão assim os ângulos de Euler sob o parafuso:

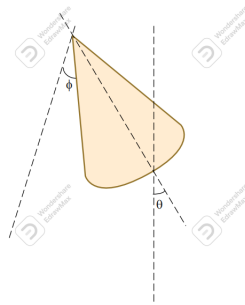


Figura 5: Representação dos ângulos de Euler durante a descida do parafuso.

### 3 Procedimento Experimental

#### 3.1 Materiais e montagem

Para a realização dos experimentos utilizamos 4 tipos diferentes de parafusos, um paquímetro e uma fita métrica para medidas de comprimento, e uma tábua de madeira MDF. A seguir temos a lista detalhada dos materiais utilizados:

- Parafuso 1 (*Auto Atarraxante*)
- Parafuso 2 (*Auto Atarraxante*)
- Parafuso 3 (*Auto Atarraxante*)
- Parafuso 4 (*Plastciser*)
- Paquímetro (*0.05mm de erro*)
- Placa quadrada de madeira MDF *90x90cm*
- Trena (*0.5mm de erro*)
- Balança digital (*0,005g de erro*)

#### 3.2 Montagem Experimental

Foi colocada a placa de madeira inclinada em um apoio, em que era possível se ajustar o ângulo de inclinação do plano, ângulo esse verificado por um nível, no aplicativo "Medida", da Apple.

Abandonou-se, então, o parafuso na metade do comprimento horizontal da placa [(45 ± 0.05)cm, medida essa obtida com a trena.]





Figura 6: Materiais utilizados durante a execução do experimento.

Nas análises a seguir, o experimento foi feito em três ângulos de inclinação diferentes para ter maior abrangência da análise do impacto do ângulo de inclinação no movimento do parafuso. É importante também salientar que em todas as repetições os parafusos foram abandonados de forma com que fosse transferida a menor quantidade possível de energia mecânica no ato de abandonar o mesmo.

Todos os parafusos foram lixados antes do experimento para minimizar possíveis contratempos devidos à ferrugem no decorrer do experimento.

Tomou-se, também, o cuidado para se abandonar o parafuso no mesmo ponto na horizontal e vertical em todas as execuções. Foram feitas marcações na placa, indicando sua medida na vertical em relação ao topo da placa, para ser subtraída da distância total percorrida. Nas figuras abaixo, vêem-se a montagem experimental, e suas medidas sendo verificadas por instrumentos de medida.



Figura 7: Comprimento da placa quadrada inclinada no apoio sendo medido por uma trena

### 3.3 Métodos

Para a análise de dados, foi utilizado o software *Tracker*, que permite analisar um vídeo frame a frame, de tal forma que é possível analisar com maior precisão a evolução dos parâmetros do problema. Como se pode observar em *Tracker* permite a escolha de um eixo de coordenadas, uma análise detalhada do movimento do parafuso, além de plotar uma tabela e um gráfico com os dados obtidos.

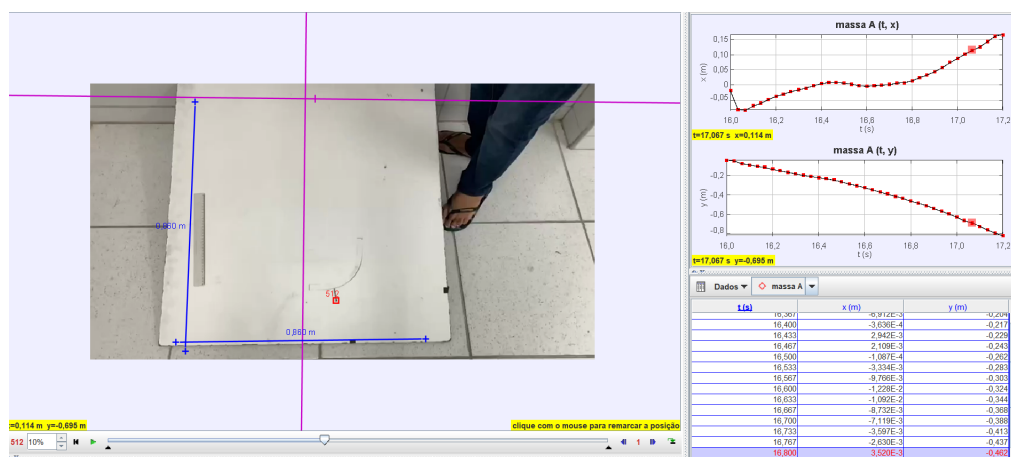


Figura 8: Exemplo da realização de uma análise experimental através do Tracker

## 4 Resultados

### 4.1 Estudo dos ângulos limites

Durante a realização do experimento observou-se uma situação interessante que merece ter um tópico tratado neste relatório.

Quando um parafuso é colocado para rolar, ele pode apresentar dois comportamentos simétricos. Dependendo do ângulo de inclinação do plano, ele pode simplesmente não vencer a força de atrito exercida nele, não sendo capaz de realizar as oscilações.

Na situação simétrica, existe outro ângulo limite em que o parafuso experiencia um deslizamento, e pequenos "saltos" ao longo do movimento, impossibilitando a correta procedência das oscilações e das medições. Para estudar melhor este fenômeno, faremos algumas tabelas e gráficos abaixo.

Na tabela abaixo, é notável que os ângulos limites variam pouco de acordo com cada parafuso. Vamos investigar mais a fundo este fenômeno.

Tabela 1: Tabela relacionando os tipos de parafuso com seus respectivos ângulos limites.

Parafuso	Ângulo limite(Atrito)	Ângulo limite(Deslizamento)
1	$(9^\circ \pm 1^\circ)$	$(23^\circ \pm 1^\circ)$
2	$(10^\circ \pm 1^\circ)$	$(20^\circ \pm 1^\circ)$
3	$(8^\circ \pm 1^\circ)$	$(23^\circ \pm 1^\circ)$
4	$(9^\circ \pm 1^\circ)$	$(28^\circ \pm 1^\circ)$

Para fazer uma análise mais completa, foram coletados, experimentalmente, dados sobre cada um dos parafusos. Dados esses que serão representados na tabela abaixo.

Tabela 2: Dados experimentais de cada parafuso.

Parafuso	Comprimento	Comprimento do Raio	Massa
1	$(3.51 \pm 0.005)\text{cm}$	$(0.40 \pm 0.005)\text{cm}$	$(2.82 \pm 0.01)\text{g}$
2	$(1.80 \pm 0.005)\text{cm}$	$(0.40 \pm 0.005)\text{cm}$	$(1.32 \pm 0.01)\text{g}$
3	$(2.7 \pm 0.005)\text{cm}$	$(0.39 \pm 0.005)\text{cm}$	$(1.53 \pm 0.01)\text{g}$
4	$(4.07 \pm 0.005)\text{cm}$	$(0.4 \pm 0.005)\text{cm}$	$(1.93 \pm 0.01)\text{g}$

Com esses dados em mãos, podemos fazer uma análise e investigação mais precisa sobre o fenômeno por meio de gráficos e observar como os ângulos limites variam conforme com os dados coletados acima.

Primeiramente, analisemos se o comprimento total de cada parafuso tem alguma consequência direta nos limites angulares do sistema.

Plotaremos abaixo dois gráficos. Um relacionando a condição de ângulo limite para que o parafuso não seja capaz de vencer o atrito do plano com seu comprimento total, e outro relacionando a condição de ângulo limite para que o parafuso experiencie deslizamentos e saltos que impossibilitem as oscilações de ocorrerem com seu comprimento total.

Ao relacionar esses dois parâmetros, é importante notar que o parâmetro dos comprimentos é o mesmo nos dois gráficos plotados, sendo variado apenas os ângulos que serão colocados no eixo.

A partir de agora, iremos então, investigar esse fenômeno utilizando gráficos comparando parâmetros, ferramenta essa que pode ser de grande ajuda quando se deseja estudar o comportamento e as tendências de comportamento de um certo sistema analisado.

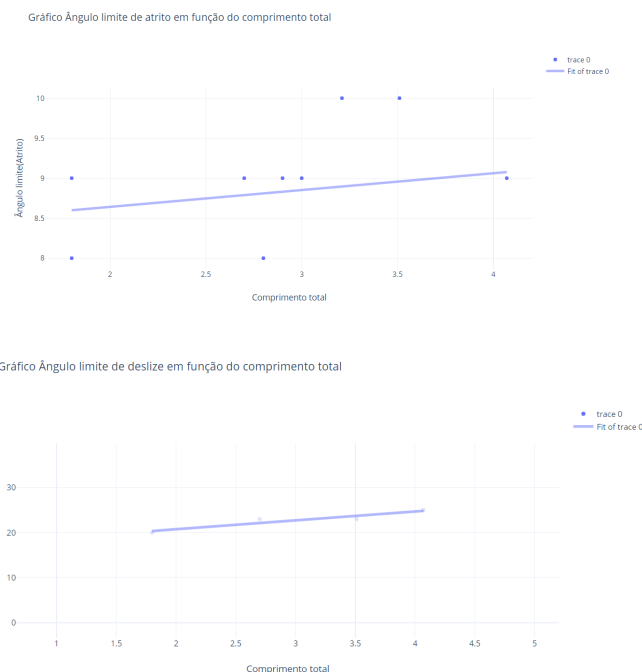


Figura 9: Gráficos comparando os ângulos de atrito e de deslize com o comprimento total de cada parafuso.

Observando os gráficos acima, podemos notar um comportamento quase constante, tomando em conta as escalas utilizadas, para os ângulos a medida que o comprimento varia. Quando feita a regressão linear no gráfico acima, surge uma reta com suas configurações já definidas(a reta citada é a já plotada no gráfico), e analisando essa reta proveniente da regressão linear nos pontos coletados experimentalmente, podemos observar que por mais que o comportamento tenha uma tendência quase invariável conforme a mudança dos parâmetros, ainda assim acontecem pequenas variações, o que indica que de alguma forma o fenômeno dos ângulos limites nesse caso, tem alguma parcela de influência do comprimento total do parafuso analisado.

A seguir, iremos trabalhar com a variação do parâmetro da massa de cada um dos parafusos para observar se a variação da massa tem alguma influência, ou parcela de influência no fenômeno estudado. Assim como nos gráficos anteriores, o único parâmetro variado será o ângulo limite(de atrito e de deslizamento), sendo mantidas as massas as mesmas nos dois gráficos.

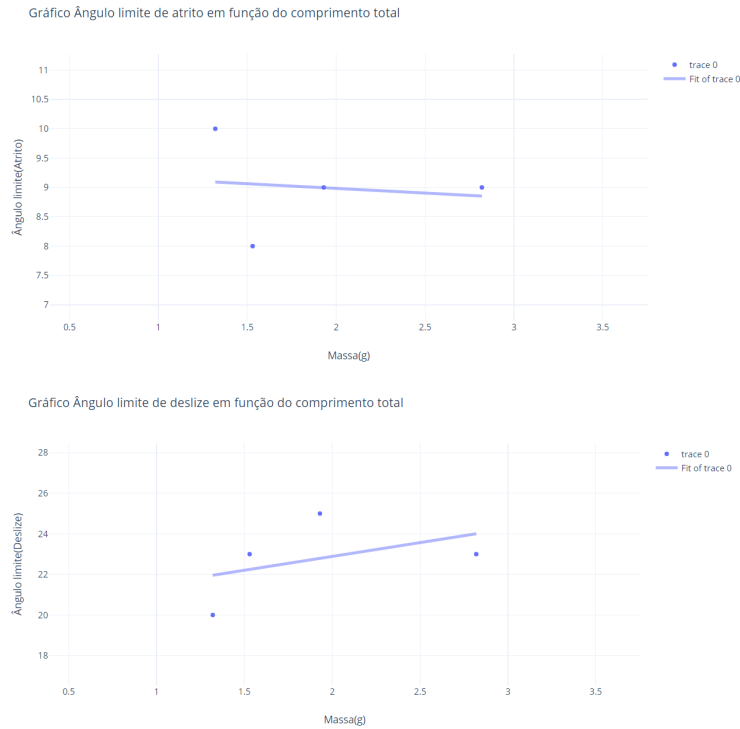


Figura 10: Gráficos comparando os ângulos de atrito e de deslize com a massa de cada parafuso.

Plotar um gráfico do comprimento do raio de cada em função do ângulo, como feito nos gráficos anteriores, não é necessário porque o raio se torna praticamente invariante na reta do gráfico, mostrando um comportamento praticamente constante.

Com isso, tendo em mente o parâmetro fixo do plano, que não se alterou durante a execução do experimento, temos que os ângulos limites dependem uma parcela de seu comprimento, e a outra parcela do seu centro de massa, ou seja, para termos físicos, isto ocorre devido ao seu tensor de inércia.

Observa-se que mesmo com parafusos com comprimentos e massas diferentes, o ângulo não tende a variar muito, isso ocorre porque a configuração do centro de massa e tensor de inércia de todos são semelhantes, por conta de suas construções. Para tratar de forma teórica, pode-se aproximar o formado do parafuso para um cone, e então determinar numericamente seu tensor de inércia:

$$I_* = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}mh^2 + \frac{3}{20}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5}mh^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}mr^2 \end{bmatrix}$$

Sendo  $h$  seu comprimento total,  $r$  o comprimento de seu raio e  $m$  sua massa.

Em suma, os ângulos não variam muito porque essa configuração não varia muito, mas a explicação do fenômeno dos "saltos" durante o ângulo limite de deslize vem da projeção do centro de massa.

Já que o centro de massa estará perto da cabeça do parafuso, quando se aplica o torque em relação a ele, existem duas forças de contato do parafuso com o plano, a da parte da "cauda", e a da "cabeça". Durante o movimento de descida, quando se aplica o torque em relação ao centro de massa, o qual é da "cabeça" do parafuso, a normal naquele ponto tenderá a 0, ou seja, não existirá força de contato naquele ponto, forçando o parafuso a "quicar" durante o movimento.

## 4.2 Estudo dos Deslocamentos e Oscilações.

Estudando as oscilações desse movimento, apenas na parte teórica podemos definir que a base do parafuso começa a girar em torno de seu eixo principal, e o efeito, em suma, seria como o de um pêndulo rolando num plano em torno desse eixo. Esse eixo, por sua vez, também é puxado para baixo, ocasionando um movimento de zigue-zague, que causa as oscilações que serão estudadas nessa sessão.

Para analisar o movimento com mais precisão, foram plotados gráficos pelo software Tracker. Para fins de análise mais precisa do movimento, foi escolhida uma configuração fixa para executar esta parte. O plano foi mantido num ângulo de  $17^\circ$  em relação à horizontal, e o parafuso utilizado foi o Parafuso 4.

### 4.2.1 Deslocamento no eixo vertical

Como esperado, neste movimento, o deslocamento no eixo vertical será independente do movimento oscilatório do eixo horizontal, ou seja, independe de qualquer influência oscilatória ocasionada pelo movimento no eixo horizontal. O seu movimento translacional ocorre basicamente por influência apenas da componente  $mg \sin \theta$  da força peso o puxando para baixo no plano, e executa seu movimento de forma quase constante, obedecendo o que se espera para um movimento desse tipo, ou seja, um movimento dependendo do quadrado do tempo, de acordo com a função horária do espaço. A curva que descreve o seu movimento se assemelha ao decrescimento de uma parábola, comportamento também esperado devido à natureza do movimento.

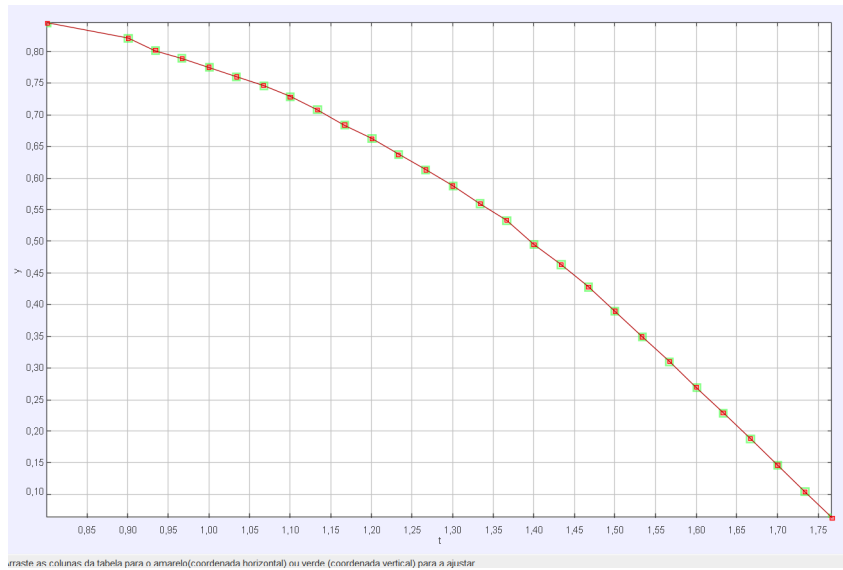


Figura 11: Gráfico relacionando o deslocamento no eixo y com o tempo.

#### 4.2.2 Deslocamento no eixo horizontal

No eixo horizontal é onde todo o diferencial do experimento ocorre. Durante o deslocamento em x do parafuso, ele experiencia oscilações quase pendulares. Para analisar melhor o movimento, olhemos o gráfico a seguir:

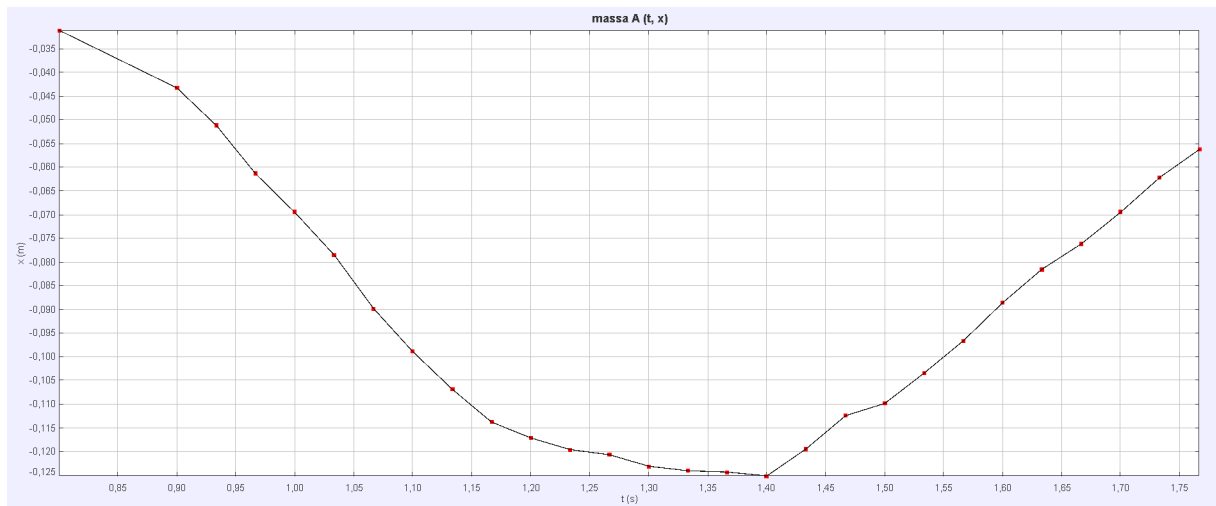


Figura 12: Gráfico relacionando o deslocamento no eixo x com o tempo.

Por conta das oscilações, era esperado que o gráfico não apresentasse o mesmo comportamento que o mesmo no eixo vertical. Para estudar o movimento aqui, é interessante realizar algum tipo de regressão para ajustar uma curva e fazer uma análise teórica mais precisa. Ajustando a curva, então, para um seno amortecido, temos:

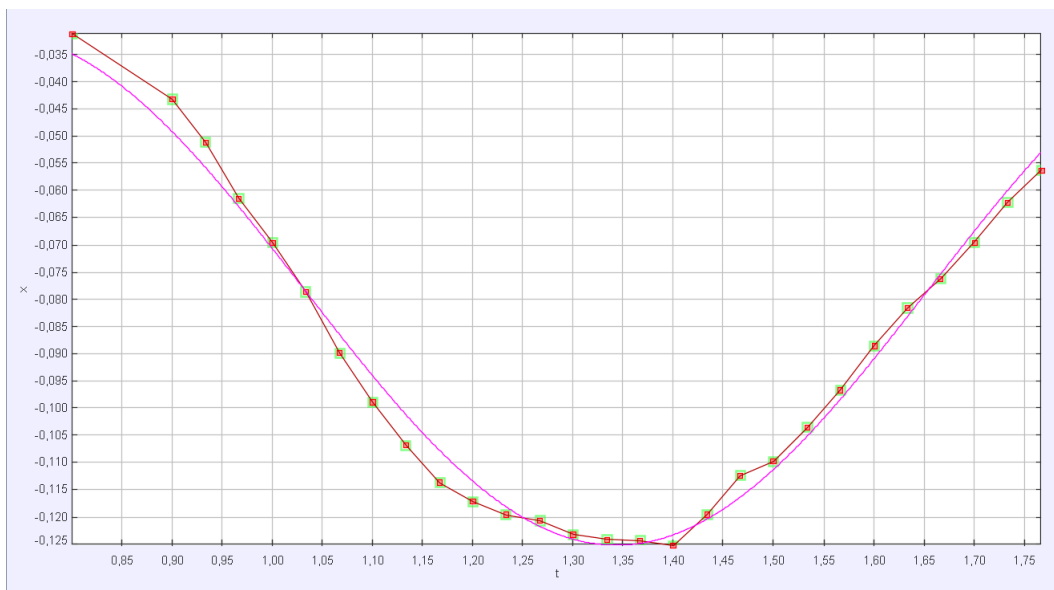


Figura 13: Gráfico do deslocamento em x com o tempo e ajuste de curva.

Observa-se, então, que as oscilações, mesmo aumentando sua frequência, vão perdendo amplitude ao longo do movimento, característica essa, de um seno amortecido, função essa que descreve uma oscilação que contém algum fator de amortecimento no sistema que faz sua amplitude ir diminuindo ao passar do tempo. Essa função, pode ser matematicamente descrita abaixo:

$$x(t) = A.e^{\lambda t} \cdot (\cos(\omega \cdot t + \Phi) + \sin(\omega \cdot t + \Phi))$$

### 4.3 Estudo do aumento das oscilações.

Agora temos, enfim, subsídios suficientes para explicar o questionamento principal do problema.

Quando o parafuso é abandonado no sistema, podemos representar dois omegas, o  $\Omega$  que representa a precessão do momento angular do parafuso, e o  $\omega$  que representa a frequência com que o parafuso oscila em torno do próprio eixo.

A medida que o movimento ocorre, acontecem trocas de condições entre atrito estático e cinético nos pontos de contato, mas ainda assim, podemos equacionar a velocidade angular de oscilação como  $\omega = \frac{v}{r}$ , sendo v a velocidade do parafuso e r o raio de sua cabeça. No início do movimento, como foi visto na sessão de fundamentação teórica, o parafuso experienciará um potencial de  $U = mgd \cos \theta$ , mas, por conservação de energia, a medida que o movimento ocorre, esse potencial é dissipado em atrito e em energia cinética, que se



converte em velocidade. Ou seja, a velocidade aumentará a medida que o movimento avança. Pela fórmula da velocidade angular, temos que o parâmetro  $r$  é fixo durante o movimento, restando apenas o aumento da velocidade para aumentar  $\omega$ .

Então, esse aumento da frequência das oscilações, ocorre por mera questão de conservação de energia, onde o potencial inicial se dissipará parte em atrito, e parte em energia cinética, que causará o aumento das oscilações.

## 5 Conclusões

### 5.1 Pontos positivos.

- Foi possível explicar fenômenos causados por condições limites causadas pelo ângulo de inclinação do plano.
- Observamos como parâmetros práticos e teóricos influenciam no movimento do parafuso.
- Vimos que existe uma função matemática que descreve o amortecimento (diminuição) da amplitude das oscilações pendulares do parafuso.
- Explicamos então, com base na teoria já vista, o aumento das oscilações em torno de seu próprio eixo.

### 5.2 Pontos negativos.

- A dificuldade de obter medidas quantizadas das oscilações em torno de seu próprio eixo.
- O fenômeno de salto, explicado anteriormente, que atrapalha o bom procedimento das oscilações.

### 5.3 Expectativas futuras

- Estudar como o espaçamento das ranhuras do parafuso pode influenciar no seu movimento ou na sua velocidade.
- Variar o material do plano e observar como as oscilações vão mudar com esse parâmetro variado.

- Buscar uma maneira de medir de forma precisa a frequência das oscilações do parafuso em torno de seu próprio eixo.
- Investigar mais a fundo como o atrito, com a condição de mudança entre cinético e estático, influencia no movimento, e aplicar uma função de dissipação no modelo teórico.
- Explicar precisamente o fenômeno do deslocamento horizontal resultante do parafuso.

## 6 Referências Bibliográficas

1. David J. Morin. **Introduction to Classical Mechanics with Problems and Solutions**. 1a ed. Cambridge University Press, 2008.
2. H. Moysés Nussenzveig. **Curso de Física Básica. Fluidos, Oscilações - Volume 2** 4a ed. Edgard Blucher, 2002.
3. Lage, E. (2020) **Ângulos de Euler em: Rev. Ciência Elem., V8(3):043**. URL: <http://doi.org/10.24927/rce2020.043>
4. C.M. Braams **The influence of friction on the motion of a top, em: Physica, volume 18, Issues 8-9**. 1952. URL: [https://doi.org/10.1016/S0031-8914\(52\)80051-5](https://doi.org/10.1016/S0031-8914(52)80051-5)
5. K. Schönhammer **Elementary theoretical description of the heavy symmetric top, em: American Journal of Physics 66, 1003**. 1998. URL: <https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.18999>
6. Nivaldo A. Lemos **Mecânica Analítica**. 1a ed. Livraria da Física, 2008.
7. Goldstein H. **Classical Mechanics 2**. 2nd. Addison-Wesley. 1980
8. Goldstein H, Poole Ch P and Safko J L **Classical Mechanics**. 3rd ed. Adisson-Wesley, 2002
9. Eugene Butikov. **Inertial rotation of a rigid bodie em: Eur. J. Phys. 27 913**. 2006
10. J. Peraire, S. Widnall **Lecture L26 - 3D Rigid Body Dynamics: The Inertia Tensor em: Massachusetts Institute of Technology**
11. Foi utilizado o software "Edrawmax" da Wondershare para alguns desenhos utilizados nesse relatório.