Gabarito da 1ª Prova Seletiva

1- Pelo diagrama de forças abaixo, temos

$$\vec{F} + M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F_{atr}} = M\vec{a}. \tag{1}$$

Temos ainda que, $F_{atr} = \mu N$, logo, decompondo as forças nos eixos x e y,

$$\begin{aligned} F\cos\alpha - \mu N &= Ma \\ F\text{sen}\alpha + N - Mg &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

o que nos leva a

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{M}\left[F\cos\alpha - \mu Mg + \mu F\text{sen}\alpha\right] \quad \text{ou} \\ a &= -\mu g + F\frac{\sqrt{1+\mu^2}}{M}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\cos\alpha + \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\text{sen}\alpha\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

Denotando:

$$\beta = \text{arcsen}\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}, \quad \cos\beta = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}, \tag{4}$$

temos,

$$a = -\mu g + \frac{F}{M}\sqrt{1+\mu^2}\text{sen}(\alpha+\beta). \tag{5}$$

a) a é máxima quando $\text{sen}(\alpha+\beta)$ é máximo, ou seja, quando $\alpha_M + \beta = \pi/2$. Assim, $\alpha_M = \arccos(1/\sqrt{1+\mu^2})$.
b) A caixa permanece parada se $a \leq 0$. $a = 0 \Rightarrow \text{sen}(\alpha_C+\beta) = \frac{gM}{F}.\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$, ou seja, $\alpha_C + \beta = \text{arcsen}\left(g\mu M/(F\sqrt{1+\mu^2})\right)$. Assim, temos $\alpha_C = \text{arcsen}\left(\frac{gM}{F}.\mu\sqrt{1+\mu^2}\right) - \text{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\right)$.
OBS: Para $\alpha > \alpha_C$, mas $\alpha < \pi/2$, a caixa fica parada, mas neste caso $|\vec{F}_{atr}| < \mu N$. Para $\alpha > \pi/2$, existe uma simetria de forma que o resultado pode ser obtido pela substituição $\alpha \to \gamma = \pi - \alpha < \pi/2$.

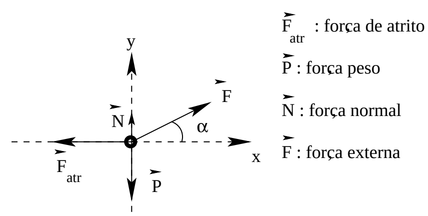

Figura 1:

2- A 1ª lei da termodinâmica para o quarto com a geladeira é dada por $\Delta U = A$, onde A é o trabalho feito pelo motor da geladeira e U é a energia interna. Naturalmente, $\Delta U = \Delta U_q + \Delta U_g$, com $\Delta U_g = A - Q$ e $\Delta U_q = Q$, sendo Q a quantidade de calor transferida da geladeira para o quarto.
a) i)Quando a geladeira é ligada, a temperatura no quarto vai aumentar porque $A > 0$ e $\Delta U_g \geq 0$ e porque pela 2ª lei da termodinâmica $\Delta U_g < A$. ii) Quando a temperatura dentro da geladeira atinge um certo valor T_1, ela é desligada automaticamente, $Q < 0$, $A = 0$ e assim a temperatura dentro do quarto vai diminuir, até atingir um valor $T_2 > 0$ (senão, a geladeira não desliga nunca). A situação vai se repetir, mas cada vez com intervalos de tempo, devidos a ii) mais curtos, porque a transferência de calor pelas paredes da geladeira é maior para temperaturas do quarto mais altas, até que finalmente os intervalos de tempos devidos a ii) desaparecem e a temperatura do quarto vai crescer até que a geladeira se quebre (curva a do gráfico).
b) Para o caso da geladeira cheia e fechada, o processo segue as mesmas etapas descritas em i) e ii) de a), mas a capacidade térmica da geladeira+comida aumentou em relação a do item a), então o processo é, no início, mais lento. Além disso,

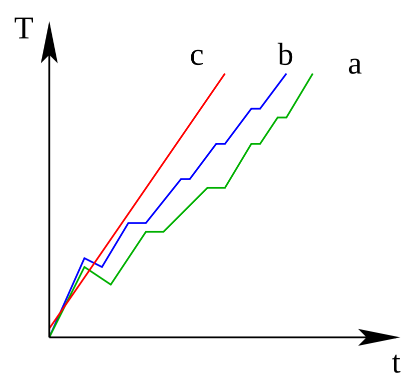

Figura 2:

$Q_{b)} > Q_{a)}$ (por unidade de tempo), no início, porque parte do calor a geladeira transfere também para a comida (linha b no gráfico).
c) Neste caso, a geladeira não se desliga nunca e a temperatura cresce monotonicamente e mais rapidamente (linha c no gráfico). No início, o crescimento é mais lento, porque a geladeria tem capacidade térmica menor.

3- Quando um astronauta está a uma distância r do centro do planeta, a força gravitacional é produzida pela esfera de raio r e massa $m_r = M(r/R)^3$, então o valor da força é $F_r = -G(m_r.m_a)/r^2 = -(Gm_a.M/R^3).r$, com m_a sendo a massa do astronauta e M a massa do planeta. Como é sabido, na situação em que a força é proporcional a r e tem sentido oposto ao do deslocamento, o tipo de movimento produzido é conhecido por oscilação harmônica simples, com freqüência $\omega = \sqrt{GM/R^3}$ e período $T = 2\pi/\omega$. Assim, o astronauta que caiu do ponto A vai chegar ao ponto B com velocidade nula depois de um tempo $T/2 = \pi\sqrt{(3\pi/4)(1/(\rho G))}$, onde ρ é a densidade do planeta.
A coordenada deste astronauta, em função do tempo será portando dada por $r(t) = |R\cos(\omega t)|$.
No caso do planeta possuir atmosfera, o astronauta faria oscilações amortecidas e estaria sujeito a pressões muito altas na região central do planeta e a estória poderia ter um final triste...

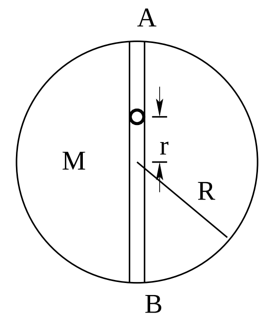

Figura 3:

4- Veja a representação gráfica dos dados ao lado. Para responder aos itens do problema, vamos aproximar cada intervalo por reta e calcular o trabalho e a mudança de temperatura para os intervalos de $40l$ a $80l$ e $140l$ a $180l$. Para obter a temperatura, pode-se fazer uso da equação de estado do gás ideal para $1\,mol$ de gás, $T_i = P_iV_i/R$, $i = 20\,l,\ 40\,l,\ 60\,l,\ ...,\ R = 8,31J/mol.K$.
Então, $T_{40} \cong 170,4K$ e $T_{80} \cong 121,1K$.
No intervalo $40l \to 80l$, a temperatura está abaixando, da mesma forma que a energia interna do gás, pois $U_{40} = (3/2)RT_{40} = 2124J$ e $U_{80} = (3/2)RT_{80} = 1509,6J$. Procedendo da mesma forma, pode-se obter que $T_{140} = 117,1K$, $U_{140} = 1459,5J; T_{180} = 124,5K$ e $U_{180} = 1552,5J$.

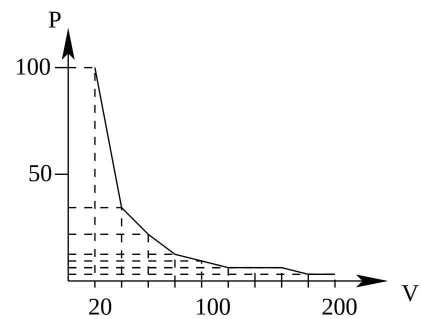

Figura 4:

Pode-se agora calcular o trabalho feito pelo sistema para os processos solicitados.

$$\begin{aligned} A_{40-60} &= \frac{1}{2}(P_{40}+P_{60}).(V_{60}-V_{40}) = 10(35,4+19,2) \\ A_{60-80} &= \frac{1}{2}(P_{60}+P_{80}).(V_{80}-V_{60}) = 10(19,2+12,58),\ \text{portanto} \\ A_{40-80} &= 10(35,4+38,4+12,58) = 863,8J\ \text{e} \quad (6) \\ A_{140-180} &= 10(6,95+2.6,3+5,75) = 253J. \quad (7) \end{aligned}$$

A quantidade de calor, transferida ao sistema, ΔQ, é dada por

$$\Delta Q_{i,j} = \Delta U_{i,j} + A_{i-j} \quad (8)$$

com $\Delta U_{i,j} = U_j - U_i$, e $i, j = 40,\ 80,\ ....$ Desta forma, tem-se

$$\begin{aligned} a)\Delta Q_{40,80} &= (1509-2124)+863,8 = 248,8J, \quad (9) \\ b)\Delta Q_{140,180} &= (1552,5-1459,5)+253 = 346J. \quad (10) \end{aligned}$$

c) A capacidade térmica, $C_{i,j} = \Delta Q_{i,j}/\Delta T_{i,j}$ é dada por

$$C_{40,80} = \frac{248,8}{121,1-170,4} \cong -5,05J/K,$$

$$\begin{aligned} C_{140,180} &= \frac{346}{124,5-117,1} \cong 46,7J/K, \rightarrow & (11) \\ Cr &= \frac{C_{140,180}}{C_{40,80}} \cong -9. & (12) \end{aligned}$$

5- Na figura ao lado, vamos supor que a resistência entre os pontos A e B seja x. Neste caso, a resistência à direita do circuito, entre A' e B', também é x. Assim, chega-se a equação: $x = R_1 + (xR_2)/(x+R_2)$, donde obtém-se que $x = R_1/2 \pm \left[R_1R_2 + R_1^2/4\right]^{1/2}$. Obviamente, $x < 0$ não tem sentido, e portanto, tomando a solução positiva para x, temos que $x = 4\Omega$.

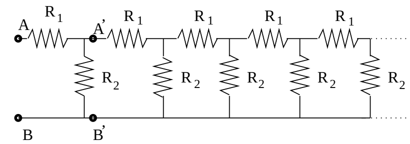

Figura 5:

6- Supondo que a diferença entre as distâncias do Sol à Terra e do Sol à Lua seja desprezível, temos que chegam a mesma quantidade de fótons na superfície da Lua e da Terra. Se n for o número de fótons que chegam na superfície da Terra e da Lua, então a Lua reflete $n/10$ fótons, que são distribuídos em uma semi-esfera com raio D_{TL}. Como o raio da Lua é R_L, pode-se calcular a luminosidade relativa da Lua em relação à do Sol, como:

$$\frac{L_{Lua}}{L_{Sol}} = \frac{1}{2}\frac{1}{10}\left(\frac{R_L}{D_{TL}}\right)^2 = \frac{1}{800.000}. \tag{13}$$

Vemos assim que a iluminação devida a Lua é 800.000 vezes menor que a devida ao Sol.
OBS: O fator $1/2$ na fórmula acima é devido ao fato da luz chegar na Lua num círculo de área πR_L^2, e estar distribuída numa semi-esfera de área $2\pi R_L^2$.

7- Utilizando a lei de conservação do momento linear, temos que

$$mv = (m+M)u \Rightarrow u = \frac{m}{M+m}v \tag{14}$$

com u sendo a componente horizontal da velocidade da partícula no instante imediatamente antes de entrar no cubo.

Pode-se calcular agora o valor da componente vertical (u_v) da velocidade da partícula quando a mesma deixa o bloco. Como a energia cinética da mesma é dada por $T_m = (m/2)\vec{u}_m^2 = (m/2)(u^2 + u_v^2)$ e aplicando a lei de conservação de energia mecânica ao sistema como um todo, no momento em que a partícula encontra-se no limiar de deixar o bloco, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= \frac{mu^2}{2} + \frac{mu_v^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} + mgL \Rightarrow \\ u_v^2 &= \left(\frac{M}{M+m}\right)v^2 - 2gL. & (15) \end{aligned}$$

Finalmente, ao sair do cubo, devido a conservação de energia, temos,

$$\frac{mu_v^2}{2} = mgh. \tag{16}$$

Fazendo uso da equação acima, juntamente com o resultado anterior, conclui-se que

$$v = \sqrt{\frac{2(m+M)g(L+h)}{M}} \tag{17}$$

8- Podemos aplicar a lei de Snell para cada uma das camadas, iniciando pela inicial, ou seja, $n_0\text{sen}\theta_0 = n_1\text{sen}\theta_1$, $n_1\text{sen}\theta_1 = n_2\text{sen}\theta_2, ...,$ tal que ao final de N camadas, temos $n_0\text{sen}\theta_0 = (0,99)^N n_0\text{sen}\theta_N$. Para que ocorra a reflexão total, devemos ter $\text{sen}\theta_N = 1$, logo $N = \log\text{sen}\theta_0/\log 0,99$. Dessa forma, a espessura da camada deve ser Nd.