1ª Prova de Seleção - XLII Olimpíada Internacional de Física

Segunda-Feira, 18 de Abril de 2011

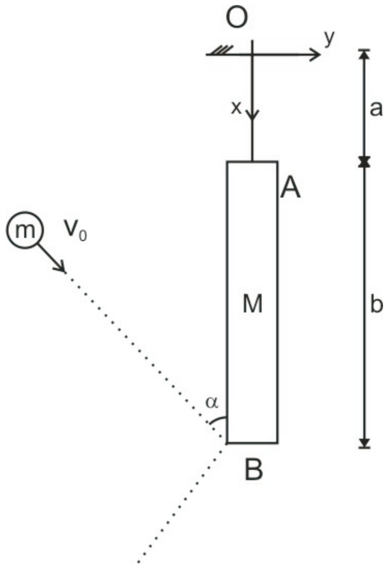
Por favor, leia as instruções antes de iniciar a prova:

1. O tempo disponível para a prova é de 5 horas. A prova tem 3 questões.
2. Utilizar apenas caneta.
3. Utilize apenas o lado da frente das folhas de papel fornecidas para resposta.
4. Iniciar cada questão numa folha de resposta em branco, colocando seu nome, o número da questão e o número da folha correspondente. Inicie uma nova numeração para cada questão.
5. Se houver resultados numéricos, estes devem ser escritos com o número de algarismos significativos apropriado, conforme indicado no problema. Não se esqueça de indicar as unidades.
6. Escrever nas folhas de resposta tudo o que considerar relevante para a resolução da questão. Utilize o mínimo de texto possível, devendo exprimir-se, sobretudo com equações, números, figuras e gráficos.
7. Nas folhas de rascunho e nas folhas que você não quiser levar em consideração na correção, faça um grande X na sua face.
8. Ao final da prova, organize todas as folhas de resposta de cada problema na seguinte ordem:
   - Folhas de resolução utilizadas em ordem;
   - As folhas que você não quer utilizar e marcadas com um X;
   - Caderno de questões.

Nome:	
e-mail:	
Nº e tipo de Documento de Identificação:	
Nome da Escola:	
Cidade:	Estado:
Assinatura:	Telefone:

1 Colisão de Corpos Rígidos

Uma pequena esfera de massa m e raio r colide na extremidade B de uma longa barra homogênea de massa $M = 4m$ e comprimento $b = 9a$, como mostra a figura.



Considere que a colisão é elástica, que o coeficiente de atrito entre a esfera e a barra é $\mu = 0,6$ e que o ângulo entre a velocidade inicial v_0 da esfera e o eixo da barra é α, de acordo a figura.

(a) Determine, em função de m, v_0 e α, o valor dos impulsos J e K da esfera sobre a barra, nas direções y e x, respectivamente. Qual o ângulo formado entre o eixo da barra e a velocidade da esfera imediatamente após a colisão? Qual a condição sobre α para que a esfera seja jogada para cima após a colisão? (3 pontos)

(b) Determine a velocidade angular ω_e da esfera após a colisão em função de v_0, r e α. (1,5 pontos)

(c) Determine a velocidade angular ω e a velocidade do centro de massa v_{cm} da barra logo após a colisão. Expresse o resultado em função de v_0, b e α. (2 pontos)

(d) Determine a tração T na corda (de comprimento a) que segura a barra um instantâneo logo após a colisão com a esfera. Considere a aceleração da gravidade local igual a g. Expresse o resultado em função de m, g, v_0, a e α. (3,5 pontos)

2 Analogia Eletrostática

As equações para muitas situações físicas diferentes têm exatamente a mesma aparência. Obviamente os símbolos podem ser diferentes (uma letra substituída por outra) mas a forma matemática das equações é a mesma. E as mesmas equações têm as mesmas soluções! As equações da eletrostática, por exemplo, aparecem em várias outras partes da física, e deste modo, é possível resolver problemas de outras áreas com a mesma facilidade (ou com a mesma dificuldade) da eletrostática.

As equações da eletrostática† são:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \tag{2}$$

Onde ρ é a densidade volumétrica de carga num dado ponto ponto do espaço.

Neste problema tentaremos resolver uma situação da fluidodinâmica com uma analogia eletrostática. Deve-se ressaltar que este exemplo não é o melhor, porque para que isto seja possível devemos considerar um caso quase hipotético, fazendo aproximações e suposições que raramente são válidas quando se trata fluidos reais. O matemático John Von Neumann chegou a dizer, inclusive, que quem estuda as equações propostas a seguir estão estudando "água seca".

Vamos considerar um líquido incompressível, não-viscoso e num regime de escoamento não-turbulento. Para um fluido incompressível podemos escrever que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \tag{3}$$

E para um fluido não-turbulento, ou seja, em escoamento laminar (também chamado de *irrotacional*) temos que:

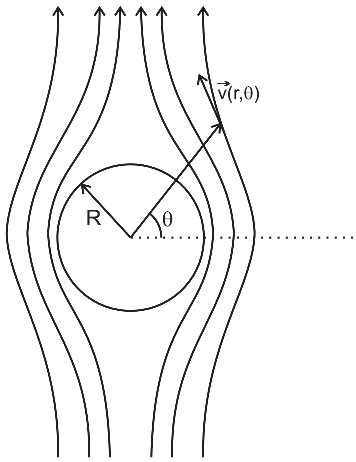
$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0} \tag{4}$$

Note que essas são as mesmas equações que regem a eletrostática para o espaço livre (sem cargas, ou seja, onde $\rho = 0$). Para verificar isto veja a tabela abaixo:

Eletrostática (Espaço Livre)	**Fluidodinâmica (conforme suposto)**
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$	$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0}$

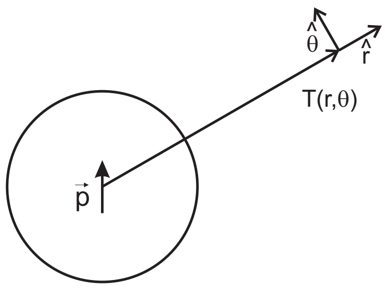
Vamos ao problema: Considere uma bola de raio R caindo com uma velocidade constante v_0 (terminal) num líquido, suposto incompressível e não viscoso, de forma não turbulenta. Se a esfera descer muito lentamente, as forças viscosas, que estão sendo desprezadas, serão importantes. Se, no entanto, ela descer com grande velocidade, redemoinhos aparecerão (fenômeno de turbulência) e haverá o que se denomina por *circulação* do líquido, onde $\vec{\nabla} \times \vec{v} \neq 0$. Então, devemos nos focar num regime onde a bola assume uma velocidade intermediária entre essas duas situações extremas, de forma que nossas suposições sejam aceitáveis.

Coloque-se no referencial da bola, de modo que se veja água escoando (para cima) por ela. Utilizemos a analogia eletrostática para determinar qual a velocidade do líquido $\vec{v}(r,\theta)$ em cada ponto do espaço!



(a) Podemos considerar como análogo eletrostático um sistema onde uma esfera de raio R é mergulhada numa região que possui um campo elétrico uniforme. Neste caso, qual seria, teoricamente a constante dielétrica κ, ou a permissividade relativa ε_r, do material da esfera? (2,0 pontos)

(b) Assuma que o campo elétrico gerado por essa esfera, para $r \geq R$, seja equivalente ao campo elétrico produzido por um dipolo elétrico pontual localizado no centro da esfera. Determine o campo elétrico $\vec{E}_e$ gerado pela esfera, em coordenadas polares, num ponto $T(r,\theta)$ em função do momento de dipolo elétrico $\vec{p}$ (que aponta na direção vertical para cima). Considere que o meio em que a esfera se encontra possua permissividade elétrica $\varepsilon = \varepsilon_0$. (2,0 pontos)



Obs: $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ indicam os versores unitários ns direções radial e angular, respectivamente.

(c) Calcule o valor do campo total $\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_0$, onde $\vec{E}_0$ é o campo elétrico uniforme ao qual a esfera está imersa, e tem direção vertical apontado para cima (no mesmo sentido do vetor $\vec{p}$ indicado pela figura). (1,0 ponto)

(d) Determine o valor de $|\vec{p}|$. (2,5 pontos)

(e) Calcule $\vec{v}(r,\theta)$ em coordenadas polares (ou seja, utilizando os versores $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ e as quantidades r e θ) para $r \geq R$, em termos do módulo da velocidade de descida v_0 e do seu raio R. (2,5 pontos)

† Observação: Seja um campo vetorial escrito no sistema cartesiano como:

$$\vec{E} = E_x(x,y,z)\hat{x} + E_y(x,y,z)\hat{y} + E_z(x,y,z)\hat{z} \tag{5}$$

- Operador Divergente de um Campo Vetorial

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{6}$$

- Operador Rotacional de um Campo Vetorial

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{z} \tag{7}$$

3 Foguete Relativístico

(a) (Caso Clássico) Seja dado um foguete livre de forças externas. Ele possui velocidade inicial v_i, massa inicial m_i. Suponha que ele ejete combustível a uma velocidade constante u, com relação ao foguete, na mesma direção da velociade inicial (e sentido oposto). Calcule a velocidade do foguete como função de sua massa. (2,0 pontos)

(b) Agora, considere que o foguete pode atingir limite de velocidades relativísticas. Suponha, como no item anterior, que não hajam forças externas sobre o mesmo. Suponha que a massa própria inicial do foguete seja m_{0i}, que o combustível seja ejetado com a velocidade constante u (com relação ao foguete) e que ele parta do repouso.

Calcule a velocidade do foguete, visto por um observador em repouso, externo ao foguete, como função da massa prórpia do foguete. (4,0 pontos)

(c) Considere agora que o foguete é movido a fótons, ou seja, que ao invés de ejetar combustível, ejeta fótons a uma freqüência f_0 (com relação a um observador no foguete). Seja m_{0i} a massa inicial do foguete. Calcule dv/dn, onde v é a velocidade do foguete e n é o número de fótons emitidos pelo foguete, como função de v, n, m_{0i} e das constantes físicas necessárias (indicando-as). (4,0 pontos)

Se necessário use:

$$\int_0^x \frac{dx'}{1-\frac{x'^2}{a^2}} = \frac{a}{2}\left[ln\left(\frac{1+\frac{x}{a}}{1-\frac{x}{a}}\right)\right] \tag{8}$$