2ª Prova de Seleção - XLII Olimpíada Internacional de Física

Quarta-Feira, 20 de Abril de 2011

Por favor, leia as instruções antes de iniciar a prova:

1. O tempo disponível para a prova é de 5 horas. A prova tem 3 questões.
2. Utilizar apenas caneta.
3. Utilize apenas o lado da frente das folhas de papel fornecidas para resposta.
4. Iniciar cada questão numa folha de resposta em branco, colocando seu nome, o número da questão e o número da folha correspondente. Inicie uma nova numeração para cada questão.
5. Se houver resultados numéricos, estes devem ser escritos com o número de algarismos significativos apropriado, conforme indicado no problema. Não se esqueça de indicar as unidades.
6. Escrever nas folhas de resposta tudo o que considerar relevante para a resolução da questão. Utilize o mínimo de texto possível, devendo exprimir-se, sobretudo com equações, números, figuras e gráficos.
7. Nas folhas de rascunho e nas folhas que você não quiser levar em consideração na correção, faça um grande X na sua face.
8. Ao final da prova, organize todas as folhas de resposta de cada problema na seguinte ordem:
   - Folhas de resolução utilizadas em ordem;
   - As folhas que você não quer utilizar e marcadas com um X;
   - Caderno de questões.

Nome:	
e-mail:	
Nº e tipo de Documento de Identificação:	
Nome da Escola:	
Cidade:	Estado:
Assinatura:	Telefone:

1 Condensação de Bose-Einstein

Um fato decorrente da mecânica quântica é que a matéria apresenta características ondulatórias, sob certas condições. Uma descrição correta da matéria está associada a uma função de onda que indica a densidade de probabilidade de uma partícula estar numa determinada região do espaço. O comprimento de onda desta função densidade de probabilidade está associado ao momento linear carregado pela partícula.

A baixíssimas temperaturas os átomos apresentam, de acordo com a teoria cinética dos gases ideais, baixas energias cinéticas e, portanto, baixos momentos lineares. Neste regime, as características ondulatórias da matéria se tornam mais pronunciadas e as partículas passam a formar o que é denominado de Condensado de Bose-Einstein.

O fenômeno da condensação de Bose-Einstein foi previsto em 1924 para um gás ideal de partículas obedecendo à estatística de Bose-Einstein, que é análoga à estatística de fótons só que para a matéria. O primeiro condensado de Bose-Einstein foi produzido setenta anos mais tarde, em 1995 por Eric Cornell e Carl Wieman, utilizando um gás de átomos de rubídio arrefecido a 170nK. O objetivo deste exercício é determinar a que temperatura um gás ideal de bósons passa ao regime de condensação descrito, onde um grande número de partículas do sistema passa a ocupar o estado fundamental de energia.

Parte A) Distribuição Estatística de Fótons

É dado um sistema de fótons que podem ocupar estados de energia com valores ε_k. A probabilidade relativa de que um desses fótons esteja nesse estado de energia é dada pela distribuição de Boltzmann $p(\varepsilon_k) = e^{-\varepsilon_k/(k_b T)} = e^{-\beta\varepsilon_k}$
com $\beta = 1/k_b T$, onde k_b é a constante de Boltzmann e T a temperatura do sistema.

(a) Determine a probabilidade $p_{n_k}(\varepsilon_k)$ de que n_k fótons estejam no estado de energia ε_k. (1,5 pontos)

(b) O número médio de fótons num estado k é dado pela media ponderada

$$\bar{n}_k = \frac{\sum\limits_{n_i=0}^{+\infty} n_i p_{n_i}(\varepsilon_k)}{\sum\limits_{n_i=0}^{+\infty} p_{n_i}(\varepsilon_k)} \tag{1}$$

Determine o valor de $\bar{n}_k$. (1,5 pontos)

Se achar conveniente utilize as seguintes identidades:

$$\sum_i f_i'(x) = \frac{d}{dx}\sum_i f_i(x) \tag{2}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx}\left[lnf(x)\right] \tag{3}$$

Onde $f'(x) = df(x)/dx$.

Parte B) Densidade de estados num gás de bósons

A estatística dos bósons é análoga à dos fótons, com a única diferença que a energia ε_k dos estados é agora substituída por $\varepsilon_k - \mu$, onde μ é o potencial químico do gás. Nosso problema agora consiste em contar o número de partículas do gás.

Como o gás é formado por bósons (i.e. partículas que não estão sujeitas ao princípio da exclusão de Pauli) é possível que mais de uma partícula esteja na configuração referente ao mesmo estado de energia ε_k. Além disso, há estados de energia degenerados, ou seja, diferentes configurações do sistema conduzem à mesma energia.

Como o comportamento das partículas é ondulatório, cada uma pode ser descrita pelo seu vetor de onda $\vec{k}$, assim, o número total de partículas está associado a

$$\sum_{\vec{k}} f(\vec{k}) \to \int dk g(k) f(\vec{k}) \tag{4}$$

Onde $g(k)$ é a densidade de estados com vetor de onda entre k e $k + dk$, ou, de maneira análoga, $g(k)dk$ é o número de partículas com vetor de onda cujo módulo está entre k e $k + dk$. Vamos agora determinar a expressão para $g(k)$.

(a) Considere um gás ideal em um cubo de lado L. Mostre que os possíveis vetores de onda, definidos por $k = 2\pi/\lambda$, onde λ é o comprimento de onda, são dados por: (Dica: Este problema é análogo ao sistema de uma corda com suas extremidades fixas, mas em três dimensões.)

$$\vec{k} = \frac{\pi}{L}(n_x \hat{x} + n_y \hat{y} + n_z \hat{z}) \tag{5}$$

Onde $n_{x,y,z}$ são inteiros positivos. (2 pontos)

(b) Com $n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$, mostre que o número de estados com vetores de onda dados por $k \leq n\pi/L \leq k + dk$ é dado por

$$g(k)dk = \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk \tag{6}$$

onde $V = L^3$ é o volume do sistema. (2 pontos)

A partir de agora, vamos adotar um sistema de unidades onde $\hbar = k_b = 1$, para simplificação dos cálculos subseqüentes.

(c) Mostre que para um gás de partículas não relativísticas (que é o caso em questão) com massa m, o número de estados com energia entre ε e $\varepsilon + d\varepsilon$ é dado por (1,5 pontos)

$$g(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{V}{\sqrt{2}\pi^2} m^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon \tag{7}$$

Parte C) Determinação da Temperatura Crítica

A temperatura crítica para a condensação de Bose-Einstein é obtida exigindo-se que, para densidade fixa, o potencial químico se anule, neste caso a expressão para $\bar{n}_\varepsilon$ é a mesma obtida no item (b) da parte A. Como o número total de partículas é dado por

$$N = \int_0^{+\infty} d\varepsilon \bar{n}(\varepsilon) g(\varepsilon) \tag{8}$$

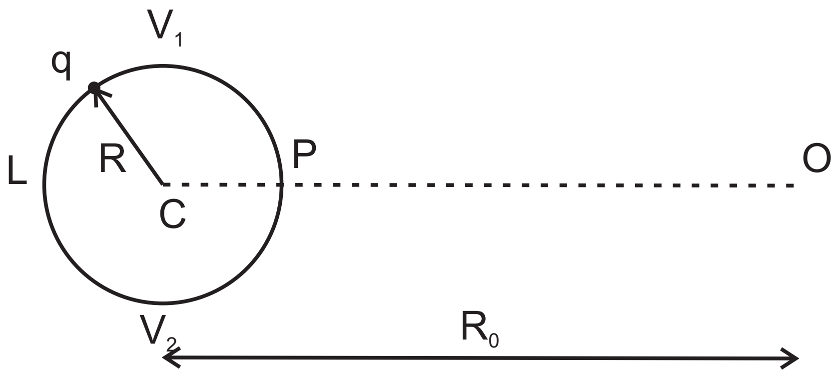
(a) Determine a temperatura crítica em termos da massa m, da densidade de partículas $\rho = N/V$ e da integral (1,5 pontos)

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{1/2} dx}{e^x - 1} = \zeta\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 2,612\frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{9}$$

Onde $\zeta(x)$ é a função zeta de Riemann e $\Gamma(x)$ é a função gama.

2 Efeitos Relativísticos na Radiação

Considere uma carga q realizando um movimento circular uniforme, de raio R e velocidade angular ω. Há um observador (em O) situado no plano do movimento, a uma distância R_0 muito longe do centro C da circunferência ($R_0 \gg R$). A carga está se movendo no sentido anti-horário, ou seja, no sentido PV_1LV_2P.



Parte A) Supondo-se que $\omega R \ll c$, de modo que se espere um comportamento clássico para emissão de radiação, pede-se:

(a) Esboce o gráfico do movimento $y(t)$, em função do tempo t, a partir de $t = 0$ até que um período se complete. y é a posição vertical da carga, a partir do ponto C, medida pelo observador. Assuma que em $t = 0$ o observador veja a carga no ponto P. (0,3 pontos)

(b) Onde se observa a maior radiação emitida, isto é, quando q está em que ponto da circunferência ela emite a maior radiação na direção de O? (0,3 pontos)

(c) O campo elétrico na direção y, gerado por uma carga q se movendo muito afastada do observador (distância R_0), é dado por

$$E_y = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R_0}\frac{d^2y'}{dt^2} \tag{10}$$

Onde y' é a posição $y'(t)$ em que a carga estava no momento que emitiu a radiação. Calcule o campo elétrico E_y visto pelo observador, em função do tempo t. (0,4 pontos)

Parte B) Caso ωR seja comparável a c, efeitos relativísticos, devido à velocidade finita da luz, serão percebidos. Mesmo no caso anterior, o tempo τ que alguém em C faz as medições das posições $y(\tau)$ e $x(\tau)$ da carga não é o mesmo tempo t, para o observador em O, que mede as posições aparentes (retardadas) $y'(t)$ e $x'(t)$. No entanto, para o caso relativístico, será também importante a diferença do tempo de propagação de radiações que partem de pontos distintos da circunferência. Assuma que para $\tau = 0$, a carga esteja em P.

(a) Calcule t em função de τ, sendo t o tempo em que o observador em O recebe a radiação emitida no instante τ, do observador em C. Considere, dessa forma, que os relógios dos dois obeservadores estejam sincronizados. (2,0 pontos)

(b) Calcule $y'(t)$, em função de τ. (1,5 pontos)

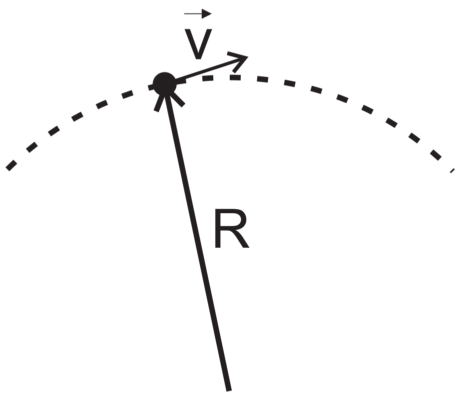
Assuma, a partir de agora, que se mude origem do tempo t, retirando-se os termos constantes que deslocam t em relação a τ.

(c) Esboce o formato do gráfico $y'(t)$, em função de ct, para quando a velocidade ωR é suficientemente próxima de c ($v \approx c$). (1,5 pontos)

(d) Calcule a radiação emitida E_y em função de τ, quando ωR é comparável a c. (2,0 pontos)

(e) Onde se espera receber a maior radiação, isto é, quando q está em que ponto da circunferência ela emite a maior radiação na direção de O? Para $v \approx c$, o que se espera para essa máxima radiação emitida? (1,0 ponto)

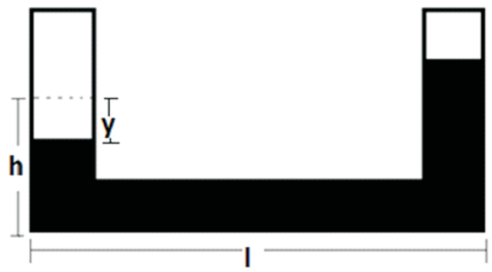
(f) Considere uma partícula com carga q se movendo com uma velocidade $\vec{v}$, de módulo constante, no vácuo (de acordo com a figura seguinte). Num dado trecho infinitesimal de sua trajetória, podemos aproximar seu deslocamento por um pequeno arco de circunferência, com raio R igual ao raio de curvatura da sua trajetória naquele instante. Para pontos muito distantes, compare qualitativamente a *forma de emissão*† de radiação nos casos clássico e relativístico, isto é, se v é muito pequeno ou se é muito próximo de c. (1,0 ponto)



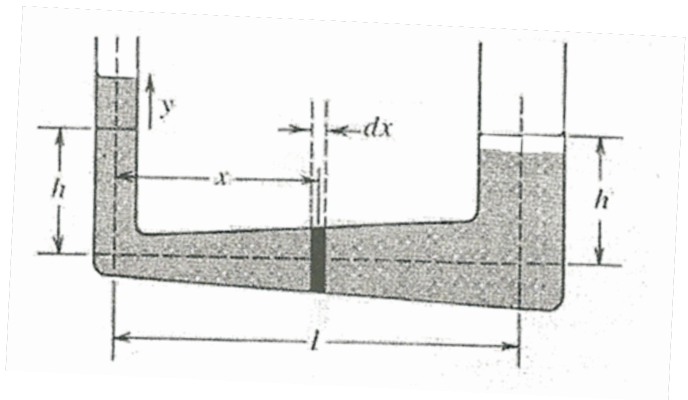
†Observação: A *forma de emissão* é a forma como a carga emite a radiação para diferentes direções, isto é, a distribuição da intensidade em função da direção que a radiação faz com o vetor velocidade $\vec{v}$.

3 Oscilações Clássicas

(a) Seja um tubo em U, com seção transversal A, altura h e comprimento l, como mostra a figura abaixo. Supondo que a densidade do líquido no tubo é ρ e que este apresenta um movimento oscilatório, equacione a equação de movimento do líquido e calcule seu período de oscilação. (1,0 ponto)



(b) Considere agora, um tubo em U onde os ramos verticais com raios r e $2r$ estão ligados por um tubo horizontal com comprimento l, com raio aumentando linearmente de r para $2r$. O tubo em U contém líquido até a altura h em cada ramo. O líquido é posto para oscilar, e, em um dado instante, a quantidade de líquido no ramo mais estreito está a uma distância y acima do nível de equilíbrio, como mostra a figura seguinte.



Qual a condição para que o líquido não acumule em um dos ramos? (1,0 ponto)

(c) Calcule a energia potencial do líquido em função da densidade ρ do líquido, da aceleração da gravidade g, de r e de y. (2,5 pontos)

(d) Calcule a energia cinética de uma pequena porção do líquido no ramo horizontal, em função de x, dx, r, l, ρ e de dy/dt. Não considere as componentes verticais da velocidade do líquido ao longo do ramo horizontal do tubo. (2,5 pontos)

(e) Usando o resultado do item anterior, calcule a energia cinética total do líquido, em função de x, h, l, ρ, y e dy/dt. (1,5 pontos)

(f) A partir dos resultados obtidos nos itens anteriores, calcule o período de oscilação do líquido. Considere que $h \gg y$. (1,5 pontos)