Olimpíada IBEROAMERICANA DE FÍSICA

XVI Olimpiada Iberoamericana de Física
Ecuador - 2011
26 Septiembre - 01 Octubre

Prova de Seleção - XVI Olimpíada Iberoamericana de Física

Sábado, 30 de Julho de 2011

Por favor, leia as instruções antes de iniciar a prova:

1. O tempo disponível para a prova é de 5 horas. A prova tem 04 questões.

2. Utilizar apenas caneta.

3. Utilize apenas o lado da frente das folhas de papel fornecidas para resposta.

4. Iniciar cada questão numa folha de resposta em branco, colocando seu nome, o número da questão e o número da folha correspondente. Inicie uma nova numeração para cada questão.

5. Se houver resultados numéricos, estes devem ser escritos com o número de algarismos significativos apropriado, conforme indicado no problema. Não se esqueça de indicar as unidades.

6. Escrever nas folhas de resposta tudo o que considerar relevante para a resolução da questão. Utilize o mínimo de texto possível, devendo exprimir-se, sobretudo com equações, números, figuras e gráficos.

7. Nas folhas de rascunho e nas folhas que você não quiser levar em consideração na correção, faça um grande X na sua face.

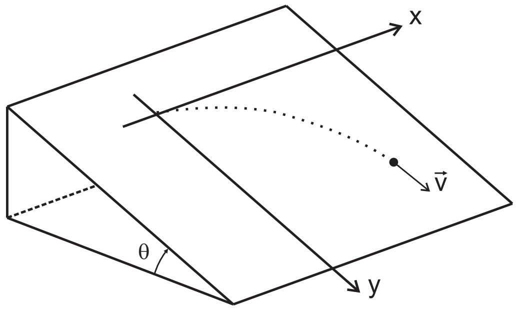
8. Ao final da prova, organize todas as folhas de resposta de cada problema na seguinte ordem:

    - Folhas de resolução utilizadas em ordem;
    - As folhas que você não quer utilizar e marcadas com um X;
    - Caderno de questões.

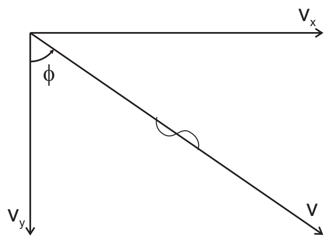
Nome:	
e-mail:	
N^{O} e tipo de Documento de Identificação:	
Nome da Escola:	
Cidade:	Estado:
Assinatura:	Telefone:

1 Plano Inclinado com atrito

Vamos analisar o movimento de uma partícula se movendo sobre a superfície de um plano inclinado com atrito, lançada da origem (do nosso sistema de coordenadas) e sob ação da gravidade. Considere o seguinte desenho do plano inclinado.



O ângulo de inclinação do plano é θ, a gravidade é g e o coeficiente de atrito da partícula com o plano vale μ. Uma alternativa para se modelar este problema é trabalhar em função de um parâmetro ϕ, que é o ângulo de inclinação da trajetória com respeito ao eixo y.



(a) Escreva dv_x/dt e dv_y/dt em função das constantes básicas (μ, g, θ) e de ϕ.

(b) Vamos definir $\sigma = \dfrac{tg\theta}{\mu}$, outra constante básica do problema. Obtenha dv_y/dv_x em função de ϕ (e constantes).

(c) Calcule a velocidade total $v(\phi)$ em função de ϕ. Assuma que v_0 é a velocidade inicial da partícula e que ϕ_0 é o ângulo de lançamento, com respeito ao eixo y.

As seguintes integrais podem ser úteis:

$$\begin{gathered}\int \frac{d\phi}{sen\phi} = ln\left(tg\left(\frac{\phi}{2}\right)\right) = -ln\left(\frac{1+cos\phi}{sen\phi}\right) \\ \int \frac{d\phi}{tg\phi} = ln(sen\phi)\end{gathered} \tag{1}$$

(d) Discuta o que acontece depois de passado um tempo suficientemente grande, dependendo do valor de σ.

(e) Assuma, a partir de agora, que $\sigma = 1$ e que a partícula tenha sido lançada horizontalmente, isto é, $\phi_0 = \pi/2$. Nestas condições, quanto valem $v_x(\phi)$ e $v_y(\phi)$, em função de ϕ e v_0?

(f) Pode ser interessante sabermos as coisas como função do tempo e não de ϕ, o ângulo de inclinação da trajetória. Para isto podemos encontrar a dependência entre o tempo t e o ângulo ϕ, e teríamos equações paramétricas que relacionam nossas grandezas (tal como velocidade, posição e aceleração da partícula) com o tempo, todas parametrizadas em ϕ. Obtenha então uma expressão para $d\phi/dt$, em função de ϕ, e obtenha também $t(\phi)$.

Você pode querer usar a seguinte integral:

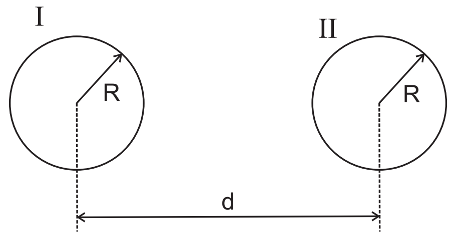
$$\int \frac{d\phi}{sen\phi(1+cos\phi)} = \frac{1}{2(1+cos\phi)} + \frac{1}{2}ln\left(tg\left(\frac{\phi}{2}\right)\right) \tag{2}$$

(g) Qual a maior distância em x que a partícula consegue atingir? *Talvez essa integral seja necessária:*

$$\int \frac{d\phi}{(1+cos\phi)^2} = \frac{1}{2}tg\left(\frac{\phi}{2}\right) + \frac{1}{6}tg^3\left(\frac{\phi}{2}\right) \tag{3}$$

2 Capacitância entre duas esferas

O objetivo deste problema será calcular a capacitância entre duas esferas condutoras, I e II, ambas de mesmo raio R e separadas por uma distância d, conforme a figura abaixo:

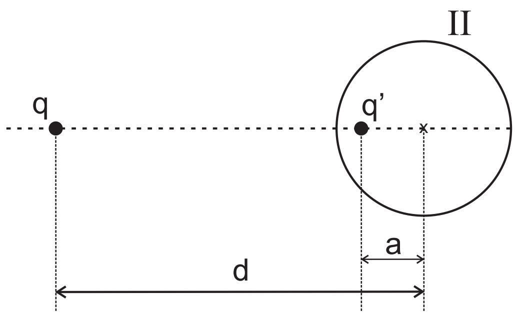


Um jeito para se resolver isso seria injetar cargas $+Q$ em I e $-Q$ em II e calcular a diferença de potencial que apareceria entre elas. Mas isso parece ser um tanto complicado! Uma teoria muito eficiente, chamada *método das imagens*, pode ser mais indicada em muitos casos.

De acordo com essa teoria, dado um objeto condutor carregado com uma carga Q, podemos remover essa carga de sua superfície e deixar de considerar a existência do condutor, redistribuindo tal carga dentro do espaço contido por sua superfície, desde que essa superfície continue equipotencial. Neste caso, o campo elétrico em qualquer ponto externo ao condutor, gerado pela distribuição de cargas na sua superfície é idêntico ao gerado por essa nova distribuição de cargas imagens.

O caminho inverso também é válido, ou seja, tendo uma distribuição de cargas dentro de uma superfície (imaginária) equipotencial, podemos dizer que, se no lugar dessa superfície fosse colocada uma casca condutora (ou mesmo um condutor maciço) e essa carga interna fosse injetada na casca, então os campos externos permaneceriam inalterados.

Considere, a partir de agora, a notação I e II se referindo às superfícies esféricas imaginárias onde antes estavam as esferas metálicas I e II, respectivamente. Assuma, para simplificar, que o potencial de II seja nulo. A ideia será então adicionar cargas imagens nos volumes internos às superfícies esféricas (imaginárias) até que todas as condições de contorno estejam satisfeitas, tais como: potencial da superfície I é V e da superfície II é nulo.



(a) Colocando-se, inicialmente, uma carga imagem q no centro de I, ter-se-á que esta superfície seja equipotencial, mas não que a superfície II seja. Deve-se então encontrar o valor e a posição de uma outra carga imagem q', situada no interior de II, que corrija o potencial de sua superfície, anulando-o. Pela simetria, nota-se que q' deve estar contida na reta que passa pelos centros das esferas, como mostra a figura anterior. Calcule q' (o seu valor) e a distância a, de q' até o centro de II, em função de q, R e d (considere, a partir de agora, essas três constantes os parâmetros básicos deste problema).

(b) Note que a adição de q' destrói a equipotencial sobre I. Adicione q", outra carga imagem, em I, a uma distância a_2 de seu centro, para restabelecer a equipotencial em I. Encontre q" e a_2.

É possível perceber que nunca se obterá o desejado com um número finito de cargas imagens, afinal, quando se tenta corrigir a equipotencial sobre uma das esferas, destrói-se a da outra. Desta forma:

(c) Deduza uma equação recorrente que calcule $q^{(n)}$ em função de $q^{(n-1)}$ e de a_n, onde $q^{(n)}$ denota q n-linhas e é a carga imagem adicionada para corrigir a equipotencial em sua esfera, que fora destruída pela adição de $q^{(n-1)}$ na outra esfera; e a_n é a distância de $q^{(n)}$ até o centro de sua respectiva esfera.

(d) Podemos escrever $q^{(n)}$ como $q^{(n)} = q\dfrac{(-R)^n}{B_n}$, onde B_n é uma função. Escreva uma equação recorrente que permita obter B_n.

(e) Encontre B_n, lembrando-se que a solução de algo como

$$x_n + b_1 x_{n-1} + b_2 x_{n-2} = 0 \tag{4}$$

é

$$x_n = k_1 r_{1n} - k_2 r_{2n}, \quad \text{se} \quad r_1 \neq r_2 \tag{5}$$

onde r_1 e r_2 são as raízes de $r^2 + b_1 r + b_2 = 0$, e k_1 e k_2 são constantes que podem ser determinadas conhecendo-se x_n para dois (ou mais) valores distintos de n.

(f) Calcule o potencial V de I, depois de as condições de contorno estarem satisfeitas (considere $\varepsilon = \varepsilon_0$).

(g) Calcule a capacitância entre duas esferas de mesmo raio R e cujos centros estão separados por uma distância d.

3 Colisão e Decaimento Relativístico

Parte A) Decaimento Relativístico

Uma partícula de massa de repouso M e quadri-momento $P = (E/c, \vec{p})$ decai em duas partículas de massas de repouso m_1 e m_2.

(a) Obtenha a energia total da primeira e da segunda partícula no referencial em repouso da massa M, em função de M, m_1 e m_2.

(b) Determine a energia cinética T_i da i-ésima partícula ($i = 1, 2$) no mesmo referencial em função de $\Delta M = M - m_1 - m_2$, o excesso de massa da reação.

(c) Um méson pi (π) carregado ($M = 139.3MeV$) decai em um méson mu (μ) ($m_\mu = 105.7MeV$) e um neutrino (ν) ($m_\nu = 0$). Calcule as energias cinéticas das partículas finais no referencial do méson π. A energia cinética característica do múon é uma assinatura de um decaimento em dois corpos. Ela se mostrou importante na descoberta do méson π em emulsões fotográficas por Powell e seus colaboradores em 1947.

Parte B) Colisão Relativística

Em máquinas de colisão de feixes como o Tevatron no Fermilab, feixes de partículas que giram em sentidos contrários são estocadas e proporcionam colisões aproximadamente unidimensionais em uma ou mais regiões de interação. Sejam dadas as massas m_1 e m_2 das partículas dos feixes e seus momenta p_1 e p_2, respectivamente. Suponha que as partículas se intersectam segundo um ângulo θ.

(d) Determine, até a segunda ordem em (m/p) (ou seja, despreze termos de ordem $(m/p)^3$ ou superiores), o quadrado da energia total no referencial do CM.

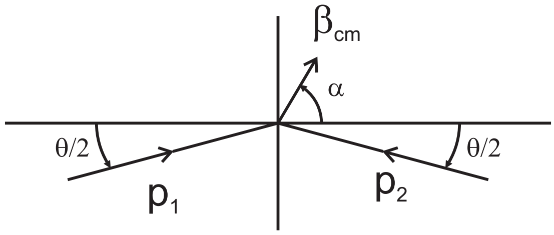
(e) Mostre que o referencial do CM tem uma velocidade no referencial do laboratório dada por:

$$\beta_{cm} = \frac{(p_1 + p_2)c\,sen(\theta/2)}{(E_1 + E_2)sen\alpha} \tag{6}$$

Onde

$$tg\alpha = \left(\frac{p_1 + p_2}{p_1 - p_2}\right) tg\frac{\theta}{2} \tag{7}$$

O ângulo α está definido na figura seguinte.

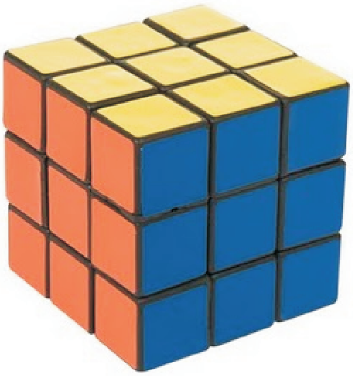


(f) Se o ângulo de colisão é $\theta = 20^{O}$ e dois prótons colidem com momenta $p_1 = p_2 = 100GeV/c$, o referencial do laboratório é uma aproximação razoável para o referencial do CM? Considere, por exemplo, uma colisão inelástica próton-próton envolvendo a produção de píons e examine a colinearidade dos dois píons produzidos com momenta iguais e opostos de $10GeV/c$ no referencial do CM. (A massa de repouso do próton é cerca de $938MeV/c^2$.)

4 Física dos Fractais

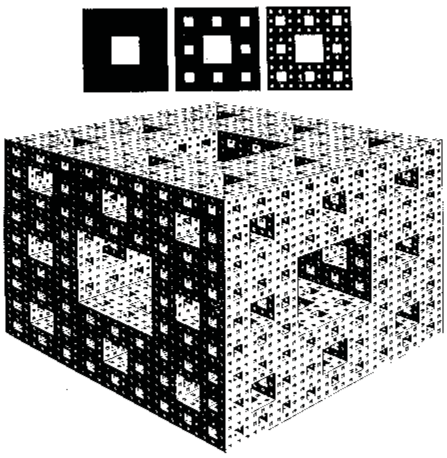
Parte A) O Cubo de Sierpinski

Você provavelmente já está familiarizado com o Cubo de Rubik (ou Cubo Mágico). Ele é um briquedo na forma de um cubo (daí o nome lol), e possui cada uma das seis faces numa cor diferente, feita de 9 cubos menores, como mostra a figura seguinte. Dessa maneira, você tem um total de 27 pequenos cubos (o central não pode ser visto... a menos que você quebre o arranjo).



Agora, remova o cubo central e os seis cubos sobre os centros de cada face. Você ficará então com 20 cubos, e, agora, você pode ver através dos eixos que passam através dos centros de cada face.

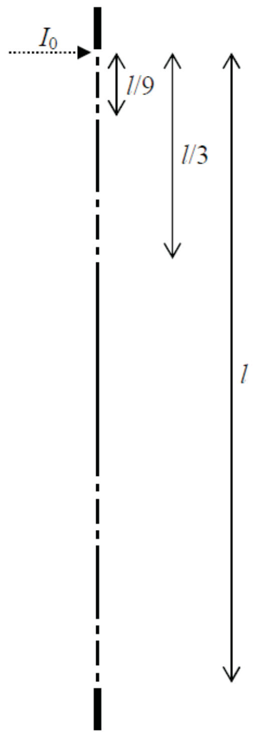
Aplique o mesmo procedimento a cada um desses 20 cubos, e repita o mesmo infinitamente. No fim você obtém um objeto fractal como o da figura seguinte, chamado de “Esponja de Menger” (ou alternativamente, “Cubo de Sierpinski”).



(a) Determine o momento de inércia de um objeto como esse, cuja massa m e aresta é L, com relação a um eixo que passa pelo centro do cubo maior.

Parte B) A rede de Difração de Cantor

Considere uma rede de difração unidimensional na forma do chamado "Padrão de Cantor". De forma a obter uma rede deste tipo, inicie dividindo a abertura, de comprimento l em três partes iguais, e, cobrindo a parte central. Então, repita o mesmo procedimento com as outras duas aberturas, e faça o mesmo procedimento um certo número N de vezes, de forma que o procedimento ainda seja fisicamente aceitável. O resultado será uma figura como aquela mostrada abaixo. Seja I_0 a intensidade da luz monocromática incidente, na direção normal, em cada abertura da rede. Considere a luz difratada segundo um ângulo α e assuma que todas as aberturas são pontuais.



(b) Escreva a diferença de caminho correspondente às duas aberturas superiores, em termos de l, N e α. Calcule a intensidade da luz difratada por essas duas aberturas como função de α, ignorando todas as outras aberturas.

(c) Denote $2\pi l sen\alpha/3^N\lambda$ como x. Esboçe o gráfico de $I(x)$.

(d) Analogamente, calcule $I(\alpha)$ para as quatro aberturas superiores e esboçe o gráfico de $I(x)$.

(Dica: Considere, por simplicidade, que as soluções não triviais da equação $tg(x) - 3tg(3x) = 0$ são $x = n\pi/6$, com $n \in \mathbb{N}$).

(e) Expresse $I(\alpha)$ para toda a rede de difração em termos de I_0, l, N e α, e tente fazer um esboço do padrão de interferência para toda a rede.