1ª Prova de Seleção para as Olimpíadas Internacionais de Física 2012

Segunda-Feira, 26 de Março de 2012

Por favor, leia as instruções antes de iniciar a prova:

1. O tempo disponível para a prova é de 5 horas. A prova tem 3 questões.
2. Utilizar apenas caneta.
3. Utilize apenas o lado da frente das folhas de papel fornecidas para resposta.
4. Iniciar cada questão numa folha de resposta em branco, colocando seu nome, o número da questão e o número da folha correspondente. Inicie uma nova numeração para cada questão.
5. Se houver resultados numéricos, estes devem ser escritos com o número de algarismos significativos apropriado, conforme indicado no problema. Não se esqueça de indicar as unidades.
6. Escrever nas folhas de resposta tudo o que considerar relevante para a resolução da questão. Utilize o mínimo de texto possível, devendo exprimir-se, sobretudo com equações, números, figuras e gráficos.
7. Nas folhas de rascunho e nas folhas que você não quiser levar em consideração na correção, faça um grande X na sua face.
8. Ao final da prova, organize todas as folhas de resposta de cada problema na seguinte ordem:
   - Folhas de resolução utilizadas em ordem;
   - As folhas que você não quer utilizar e marcadas com um X;
   - Caderno de questões.

Nome:	
e-mail:	
Nº e tipo de Documento de Identificação:	
Nome da Escola:	
Cidade:	Estado:
Assinatura:	Telefone:

1 Precessão de Periélio (10 Pontos)

Um planeta orbitando em torno de uma estrela, supostamente com uma massa muito maior que a dele, pode realizar uma órbita fechada, como uma elipse, para uma vasta variedade de condições iniciais distintas, com diferentes momentos angulares e energias. Entretanto, isto se mostra como uma propriedade bastante peculiar possuida pela força gravitacional (e compartilhada, com ressalvas, apenas com a uma força do tipo lei de Hooke). Assim, se um planeta move-se sobre uma órbita limitada mas não fechada podemos ter certeza que a força sobre ele não varia exatamente com o inverso do quadrado da distancia.

Se a força que age sobre o planeta for apenas levemente diferente de uma que varia com o inverso do quadrado da distância então espera-se que sua órbita seja uma elipse ligeiramente deformada e o seu *periélio* não é um ponto fixo, como no caso de uma órbita fechada, mas realiza um vagaroso movimento.

O próprio Newton já observara que se tal fenomeno fosse verificado, então isto serviria como um valioso teste para contestar a validade da sua fórmula para a gravitação universal.

É claro que um dado planeta no nosso sistema solar, por exemplo, não esta sujeito a uma força que varia exatamente com $1/r^2$, devido às forças provocadas pelos outros planetas, ao efeito da poeira cósmica que permeia nosso sistema e, além disto, devido às correções relativísticas.

As perturbações geradas pelas atrações dos outros planetas, embora até possam ser maiores que os outros dois efeitos citados, foram provados (por Laplace, 1773) ser de caráter periodico (mesmo que o periodo possa ser extremamente grande) e não serão tratadas neste problema. Já os outros dois efeitos provocam pertubações *seculares*, isto é, que sempre crescem com o tempo.

Parte A - Equação da Órbita

Considere um planeta de massa m movendo-se em torno do Sol de massa M. Usemos coordenadas polares para descrever o movimento (raio r do Sol ao planeta e ângulo θ com relação a alguma linha de referência).

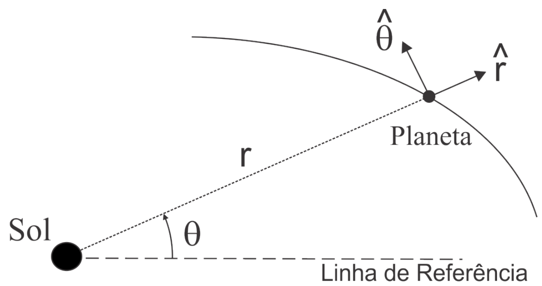

Figura 1: Órbita de um Planeta ao redor do Sol

(a) Escreva as equações de Newton para o movimento do planeta, para cada uma das duas direções radial $\hat{r}$ e angular $\hat{\theta}$, dado que sobre ele atua uma força $F(r)$ na direção radial. (0,5 pontos)

(b) Deduza *diretamente* das equações acima que as quantidades momento angular L e energia E são invariantes. (0,5 pontos)

(c) Mostre que a equação que relaciona o raio r com o ângulo θ é

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2}\frac{1}{u^2}F(1/u)$$

onde $u = 1/r$.

Notamos que a solução da equação acima, quando consideramos apenas a força gravitacional do Sol, $F(r) = -GMm/r^2$, é a seguinte equação (de uma cônica)

$$u(\theta) = \frac{1}{\alpha}(1 + \varepsilon\cos\theta)$$

onde $\alpha = Gm^2M/L^2$ e uma escolha conveniente da referência $\theta = 0$ foi estabeleciada. (1,0 ponto)

Parte B - Poeira Cósmica

Considere que em todo o sistema solar exista uma distribuição uniforme e simétrica, em relação ao Sol, de uma certa poeira de densidade ρ.

(d) Qual a força que age sobre o planeta quando este se encontra a uma distância r do Sol? Deixe sua resposta em termos da constante gravitacional G, massa do Sol M e do planeta m e da densidade de poeira ρ. (1,0 ponto)

(e) Quanto deve ser a velocidade angular ω_θ do planeta para que este realize uma órbita circular de raio r_0 com respeito ao Sol? (0,5 pontos)

Vamos agora analisar órbitas quase-circulares do planeta e, para isto, considere que uma pequena perturbação *radial* seja dada ao planeta, de modo que ele passe a realizar um sutil movimento oscilatório em relação ao raio de equilibrio r_0.

(f) Calcule a frequência angular ω_r dessas pequenas oscilações radiais. (1,0 ponto)

(g) Calcule o ângulo varrido pelo raio-vetor (que parte do Sol e chega no planeta) entre dois momentos de periélio sucessivos. (1,0 ponto)

(h) Obtenha a velocidade angular ω_p do perielio (em relação ao Sol). O periélio se move na mesma direção ou na direção oposta ao sentido de translação do planeta? (0,5 pontos)

Parte C - Efeito Relativístico

Vamos agora deixar de considerar a poeira cósmica e analisar os efeitos relativísticos envolvidos. Uma série destes contribuem para modificar a dinâmica do problema: tanto fenômenos da relatividade especial, como a dilatação do tempo e o efeito do momento relativístico; quanto da relatividade geral, como a velocidade finita de propagação das interações gravitacionais.

Se todos estes efeitos forem considerados podemos modificar a lei da gravitação, adicionando um (pequeno) termo no potencial que varia com $1/r^3$, e fingir que a mecânica Newtoniana continua válida:

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} - \frac{G(M+m)L^2}{c^2\mu r^3}$$

No modelamento para a poeira cósmica foi considerado apenas uma órbita quase-circular, mesmo que o resultado continue idêntico para uma orbita qualquer. Vamos, nesta parte, fazer o caso geral, isto é, estudar a *precessão do periélio* de uma órbita genérica. De fato, como este termo adicionado custuma ser bem pequeno, podemos inferir que a órbita será algo bem próximo de uma elipse, ou seja, ainda definiremos, aproximadamente, o semi-lactus retum α e a excentricidade ε desta quase-elipse. Este α e ε são os mesmos que aparecem na equação geral das cônicas apresentada anteriormente.

(i) Determine, em primeira aproximação, a trajetoria $u(\theta)$ do planeta. Expresse a resposta em termos de α e ε da quase-elipse genérica descrita pelo planeta e do parâmetro $\delta = 3GM/c^2$. (1,0 ponto)

(j) Identifique os termos da expressão obtida no item anterior que representam os efeitos periódicos e os termos que representam os efeitos seculares, isto é, aqueles que que sempre crescem no tempo e, de certo modo, devem ser os mais fáceis de se detectar. (1,0 ponto)

(k) Calcule a diferença angular entre dois periélios sucessivos, bem como a frequência angular de sua precessão. (1,0 ponto)

(l) Faça um esboço da órbita deste planeta, indicando também o sentido de sua translação. (0,5 pontos)

(m) Em que planeta do sistema solar você espera ser mais visível este fenômeno? Justifique sua resposta. (0,5 pontos)

2 Válvula eletrônica de dois elementos (diodo)

(10 Pontos)

Diodos são componentes eletrônicos de dois polos que possuem a propriedade de permitir a passagem de corrente elétrica em apenas uma direção, ou seja, apresentam uma resistência *dependente* da direção da corrente, sendo muito maior para um sentido do que para o outro. Devido a esta característica eles costumam ser usados como retificadores sendo, de certa forma, o elemento principal na transformação de correntes alternadas para contínuas.

Dois exemplos de diodo são o *diodo semicondutor*, que é o mais comum atualmente, é formado por um pedaço de cristal semicondutor conectado entre dois terminais elétricos; e a *válvula eletrônica de dois elementos* (conhecida por *vacuum tube diode*, em inglês) que, embora mais rara hoje em dia, ainda é usada em algumas tecnologias de alta-potência.

Vamos estudar este último, que é baseado no efeito termoiônico.

Um diodo desta espécie pode ser entendido simplificadamente como dois eletrodos imersos num vácuo feito dentro de um bulbo de vidro (de fato, os primeiros diodos eram bem semelhantes às lâmpadas incandescentes). Consideremos que estes dois eletrodos sejam placas metálicas paralelas separadas por uma distância x_1, formando um sistema parecido com um capacitor, como na seguinte figura:

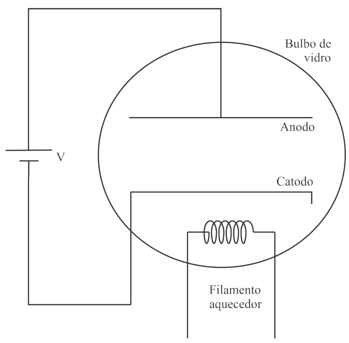

Figura 2: Diagrama esquemático de uma válvula eletrônica (diodo).

O eletrodo inferior, chamado de *catodo*, é revestido por um material adequado, que em geral é uma mistura de bário com óxidos de estroncio (óxidos de metais alcalinos terrosos), encolhidos por possuirem uma baixa *função trabalho* e, assim, consiguirem emitir eletrons mais facilmente, pelo *efeito termoiônico*, quando aquecidos. De fato, usa-se algum dispositivo para aquecê-lo, que pode até mesmo ser um fio que carrega corrente.

Ao se conectar uma bateria sobre o diodo, mantendo a placa superior, chamada de *anodo*, positivamente carregada, então os elétrons emitidos pelo catodo serão atraidos, formando-se uma corrente através do vácuo de uma placa para a outra. Ao se inverter a polariadade teríamos apenas uma corrente desprezível passando, já que além de o anodo estar frio ele não é tratado com nenhum material de baixa função trabalho.

Considere que a bateria seja ligada no sentido direto do diodo (o qual permite a passagem da corrente), covencionando que o catodo esteja a um potencial nulo enquanto o anodo esteja a $V_1 > 0$.

(a) Compare a curva de potencial entre as placas desse sistema com aquela de um capacitor nas mesmas condições, a menos pela ausencia de cargas no espaço entre as placas deste último. (1,0 ponto)

Assumiremos um sistema ideal no qual nenhuma limitação de corrente advenha da emissão de elétrons pelo catodo, isto é, este poderia em princípio emitir uma quantidade ilimitada de carga. Mesmo assim é inevitavel que a própria carga espacial, entre os dois eletrodos, se limite devido a repulsão entre os elétrons que ocupam esta região. Suponhamos adicionalmente que, devido a esta limitação, os eletrons emitidos pelo catodo sejam tão repelidos pelos outros elétrons (que já ocupam a região) que mal podem escapar e, portanto, saem com velocidade praticamente nula.

(b) Explique como podemos concluir que, na situação de limitação pela carga espacial, a derivada do potencial nas proximidades do catodo $(dV/dx)_{x=0}$ deve ser *nula*. Considerando x a distância a partir do catodo. (2,0 pontos)

(c) Mostre pela lei de Gauss que, no espaço entre os eletrodos, o potencial V obedece

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

onde $\rho = \rho(x)$ é a densidade (volumétrica) de carga em cada ponto x.

Este é o caso particular (unidimensional) da *equação de Poisson*, escrita mais genericamente por $\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$, sendo ∇^2 o *operador laplaciano*. (1,0 ponto)

Poderíamos incluir no nosso modelamento os choques entre os elétrons que configuram a corrente espacial, considerando que os elétrons se *difundem* uns através dos outros, sendo forçados pelo campo elétrico que os atraem para o anodo. No entanto, por simplicidade, suponhamos que os elétrons fluem praticamente sem colidirem entre si.

(d) Calcule o potencial V, na região entre as placas, em função da distância x a partir do catodo, da densidade de corrente J que passa entre as placas e de parâmetros conhecidos como ε_0, m e e. *Dica:* Na resolução da equação diferencial envolvida pode ser interessante multiplicá-la por $2\frac{dV}{dx}$. (2,5 pontos)

(e) Expresse o resultado do item anterior (isto é, o potencial V) em função da diferença de potencial V_1 aplicada nos terminais do diodo e da separação x_1 entre as placas. (1,0 ponto)

(f) Calcule também a densidade de cargas $\rho(x)$ e o campo elétrico $E(x)$ em termos de x e de outras quantidades dadas no problema. (1,0 ponto)

(g) Num sistema como este a resistência não se comporta de forma ôhmica, ou seja, é dependente da corrente. Calcule a resistência R deste diodo de válvula em função da corrente I atravessando-o e de parâmetros geométricos, como a separação x_1 e a area S das placas, bem como constantes fundamentais (carga, massa do eletron e permissividade elétrica do vácuo). Discuta (brevemente) o resultado. (1,5 pontos)

3 Aberração da Luz (10 Pontos)

Quando observamos uma estrela distante por, digamos, um telescópio e a vemos numa dada posição, ela, provavelmente, não estará mais neste ponto.

Isto se deve a várias razões. Uma delas é se o telescópio estiver sobre a superfície da Terra e, a luz proveniente da estrela deverá atravessar toda a atmosfera até atingí-lo e, assim, acabará se refratando neste caminho, mudando de direção. Entretanto, isto poderá ser talvez corrijido ao se usar um telescópio fora da atmosfera, num satélite, por exemplo.

Mesmo assim, restarão ainda efeitos de ordem relativística, por exemplo, da contração do espaço e dilatação do tempo. De fato, ainda poder-se-ia considerar resultados da relatividade geral, levando em conta o potencial gravitacional da Terra e dos outros corpos pelos quais a luz passa, mas isto será desprezado neste problema.

Em relatividade é costume fazer uso do *Espaço de Minkowsky*, este é um espaço introduzido pelo matemático alemão Hermann Minkowsky, e consiste basicamente em considerar o espaço e o tempo como entidades correlatas. Neste espaço, os vetores possuem 4 coordenadas, uma correspondente ao tempo e outras três correspondendo a quantidades espaciais. Estes vetores, agora com quatro componentes, são chamados de quadrivetores. Um exemplo é o quadrivetor posição s que pode ser escrito como

$$s = (ict, x, y, z), \qquad ou \qquad s = \begin{pmatrix} ict \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1}$$

i.e., pode ser representado tanto por um vetor linha como por um vetor coluna. A letra i que aparece na coordenada temporal corresponde a $\sqrt{-1}$.

É possível expressar as *Transformações de Lorentz* entre dois referenciais S e S' que se movem um com relação ao outro através de uma equação matricial que envolve s e s', os quadrivetores posição nos referenciais S e S', respectivamente. A equação pode ser escrita como

$$s' = \Lambda s \tag{2}$$

onde Λ é a matriz que reproduz a Transformação e Lorentz.

(a) Escreva as Transformações de Lorentz quando S' se move com velocidade $v = \beta c$ na direção x com relação ao referencial S. A partir daí, determine a matriz de transformação Λ. (0,5 pontos)

Considere que no referencial S da estrela os seus raios de luz atingem a Terra num ângulo θ com o eixo x, no plano xy.

Defina o *quadri-vetor de onda* $\mathbb{K}$ de uma onda eletromagnética como o vetor do *espaço de Minkowsky* que guarda em sua primeira componente a quantidade $i\omega/c$, sendo ω a frequência angular da onda; e em suas três últimas componentes o *vetor de onda* $\vec{k}$, ou seja,

$$\mathbb{K} = (i\omega/c, k_x, k_y, k_z)$$

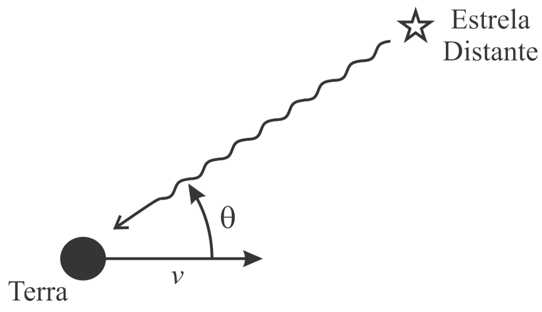

Figura 3: Terra se movendo com relação à Estrela com velocidade v

(b) Mostre que o quadri-vetor de onda é de fato um quadri-vetor, isto é, ele transforma-se do mesmo modo que o *quadrivetor posição* segundo uma troca entre referenciais inerciais. Quer-se dizer que quando outro observador S' inercial observa a mesma onda vista por alguem em S, então se $\mathbb{K}$ é o quadrivetor no referencial de S e $\mathbb{K}'$ é o quadrivetor no referencial de S', tem-se

$$\mathbb{K}' = \Lambda \mathbb{K}$$

sendo Λ a matriz da transformação de Lorentz. (1,5 ponto)

(c) Expresse a onda que atinge a Terra, no referencial S, através de seu quadri-vetor de onda $\mathbb{K}$, em termos da sua frequência angular ω e do ângulo θ. (1,0 ponto)

(d) Calcule assim o quadri-vetor $\mathbb{K}'$, para a luz proveniente da estrela, visto por um observador sobre a Terra, dado que esta se move com velocidade v na direção $+x$ com respeito à estrela. (1,0 ponto)

(e) Qual o angulo θ', com relação ao eixo x, da posição aparente da estrela para este observador na Terra? Com qual frequência a estrela parece emitir? (1,0 ponto)

Esta diferença na direção de propagação de uma onda eletromagnética, quando vista por observadores distintos, é chamada de aberração da luz. Vamos agora estudar algumas consequências deste fenômeno na óptica.

Embora isto pudesse ser bastante explorado, vamos nos limitar aos espelhos planos, numa análise simplificada.

Considere um espelho plano, paralelo ao plano yz de um sistema de referência, que se move com velocidade $v\hat{x}$.

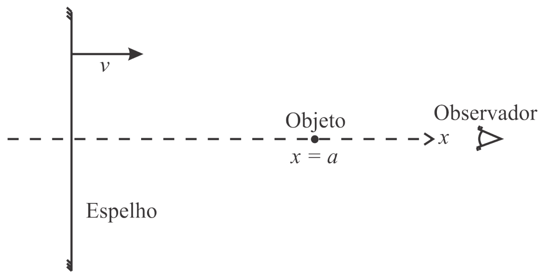

Figura 4: Espelho Plano Relativístico

(f) Se um raio de luz incide com ângulo θ sobre o espelho, calcule o ângulo de reflexão θ' deste raio. (1,5 ponto)

(g) Um objeto é posto sobre o eixo x, numa posição $x = a > 0$. Quando o espelho passa pela origem ($x = 0$), qual a posição da imagem desse objeto? (1,0 ponto)

(h) Quando uma pessoa olha sobre o eixo x em direção ao espelho, e ela vê que ele se encontra na origem como no item anterior, em qual posição ela verá a imagem? Se o objeto tem determinada cor, caracterizada pelo comprimento de onda λ, qual o comprimento de onda λ' da cor observada de sua imagem? (1,5 pontos)

(i) A imagem formada de um objeto potual é um ponto? Justifique sua resposta utilizando cálculos que a suportem. (1,0 ponto)