IPhO
Estonia 2012

2ª Prova de Seleção para as Olimpíadas Internacionais de Física 2012

Quarta-Feira, 27 de Março de 2012

Por favor, leia as instruções antes de iniciar a prova:

1. O tempo disponível para a prova é de 5 horas. A prova tem 3 questões.
2. Utilizar apenas caneta.
3. Utilize apenas o lado da frente das folhas de papel fornecidas para resposta.
4. Iniciar cada questão numa folha de resposta em branco, colocando seu nome, o número da questão e o número da folha correspondente. Inicie uma nova numeração para cada questão.
5. Se houver resultados numéricos, estes devem ser escritos com o número de algarismos significativos apropriado, conforme indicado no problema. Não se esqueça de indicar as unidades.
6. Escrever nas folhas de resposta tudo o que considerar relevante para a resolução da questão. Utilize o mínimo de texto possível, devendo exprimir-se, sobretudo com equações, números, figuras e gráficos.
7. Nas folhas de rascunho e nas folhas que você não quiser levar em consideração na correção, faça um grande X na sua face.
8. Ao final da prova, organize todas as folhas de resposta de cada problema na seguinte ordem:
   - Folhas de resolução utilizadas em ordem;
   - As folhas que você não quer utilizar e marcadas com um X;
   - Caderno de questões.

Nome:	
e-mail:	
Nº e tipo de Documento de Identificação:	
Nome da Escola:	
Cidade:	Estado:
Assinatura:	Telefone:

1 Precessão de Thomas e Interação Spin-Órbita

A *Precessão de Thomas* é um efeito cinemático descoberto por Llewelyn Thomas em 1926. É um efeito muito sutil que possui grande importância em Física Atômica em conexão com a interação spin-órbita. Sem incluir a Precessão de Thomas, a taxa de precessão de um spin de um elétron num átomo está incorreta por um fator 2.

Este efeito está relacionado com o fato de que duas transformações de Lorentz sucessivas em *diferentes direções* são equivalentes a uma trasnformação de Lorentz mais uma rotação tridimensional. Esta rotação no sistema de referência em repouso do elétron é o efeito cinemático que causa a Precessão de Thomas.

Neste problema será obtida a taxa de precessão do sistema de referência do elétron e será mostrado como a mesma inclui um fator 2 na expressão correta da interação spin-órbita.

Parte A - Precessão de Thomas

A Fig. 1 abaixo representa três sistemas de referência S, S' e S''. Nela estão indicadas as velocidades de S' com relação a S, que é igual a v na direção x, e de S'' com relação a S', que é v' na direção y'. Considere, por simplicidade, que no instante inicial $t = 0$ as origens dos três sistemas coincidem.

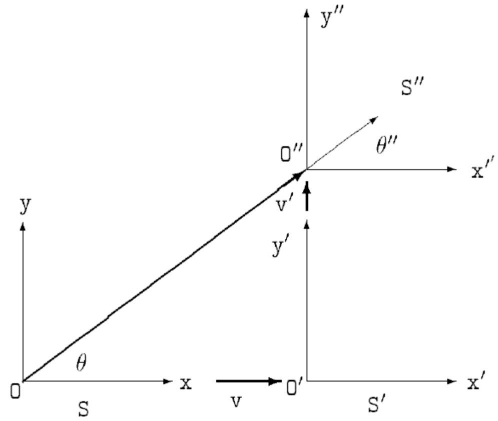

Figura 1: Movimento Relativo entre três referenciais inerciais

(a) Escreva as transformações de Lorentz que relacionam as coordenadas de S com as de S', e as de S'' com as de S'. Com estas expressões, escreva a transformação de Lorentz que relaciona as coordenadas de S com as de S''. Use: (1,0 ponto)

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}, \qquad \gamma' = 1/\sqrt{1 - v'^2/c^2} \tag{1}$$

(b) Determine o ângulo θ, indicado na Fig. 1, medido no referencial S e o ângulo θ'' medido em S'' (observe que este é o ângulo formado entre o raio vetor que liga a origem dos dois referenciais e o eixo x). Qual a diferença entre estes ângulos e aqueles calculados utilizando as transformações Galileanas. (1,5 pontos)

Considere agora uma partícula se movendo numa trajetória curva, como mostra a Fig. 2. Num certo instante de tempo, a partícula está na origem O do sistema S, que tem o eixo x paralelo à trajetória e o eixo y apontado para o centro de curvatura. Em $t = 0$, o sistema S' está se movendo na direção x com velocidade v. Num instantantâneo logo depois, o sistema S'' está se movendo perpendicular a x', na direção y com velocidade $v' = \delta v$.

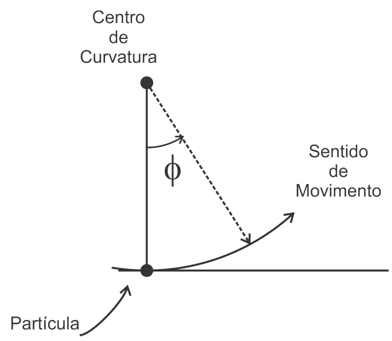

Figura 2: Movimento de uma partícula numa trajetória curva

(c) Identifique os referenciais S, S' e S'' na Fig. 2 e mostre que o ângulo ϕ mostrado na figura é dado por

$$\tan\phi = \frac{v'}{v} \tag{2}$$

Escreva $\delta\theta = \theta'' - \theta$, e as velocidades v_x e δv dos referenciais S' e S'', respectivamente, como função do ângulo ϕ. (1,0 ponto)

(d) Considerando o deslocamento da partícula num pequeno intervalo de tempo δt, determine a expressão para a velocidade angular de rotação de Thomas $\omega_T = \delta\theta/\delta t$ como função da velocidade v da partícula, da aceleração a da mesma nessa trajetória aproximadamente circular, e da velocidade da luz c. Em que sentido é (horário ou anti-horário) essa velocidade angular? Use a última resposta para escrever a expressão vetorial de ω_T. (1,5 pontos)

Parte B - Interação Spin-Órbita

A estrutura fina de átomos hidrogenóides (e.g. Sódio e Potássio) está ligada diretamente à interação entre o momento angular $\vec{L}$ do elétron de valência e seu spin $\vec{S}$. A interação spin-órbita é responsável por um termo proporcional a $\vec{L}\cdot\vec{S}$ na energia do elétron.

(e) Dada uma partícula com momento magnético $\vec{\mu}$ imersa num campo magnético aproximadamente constante $\vec{B}$, determine a energia potencial de interação da partícula com o campo magnético. (1,0 ponto)

O spin do elétron está relacionado com seu momento magnético através da relação

$$\vec{\mu} = g\vec{S}, \qquad g = \frac{e}{m_e c} \tag{3}$$

onde g é chamada de *razão giromagnética*, m_e é a massa do elétron, e sua carga e c a velocidade da luz.

(f) Para determinar a energia de interação spin-órbita U_{LS}, podemos considerar que o elétron, cuja velocidade em torno do núcleo é $v_e \ll c$, está em repouso enquanto o núcleo gira ao seu redor. Neste caso o elétron sente um campo magnético efetivo $\vec{B}_{ef}$ gerado pelo núcleo. Expresse esse campo magnético efetivo como função de $\vec{v}_e$, de c e do campo elétrico $\vec{E}$ sentido pelo elétron devido ao núcleo carregado. (Dica: Por simplicidade, obtenha a expressão levando em consideração o átomo de hidrogênio). (1,0 ponto)

(g) Considerando que o elétron gira em torno do núcleo a uma distância r, determine a expressão para a energia do acoplamento spin-órbita U_{LS} como função do momento angular $\vec{L}$ do elétron, do seu spin $\vec{S}$, da energia potencial de interação $V(r)$ entre o elétron e o núcleo e de constantes fundamentais. (2,0 pontos)

O resultado obtido no item anterior está em discrepância com valores experimentais por um fator 2. A explicação para esse fato reside na precessão do spin do elétron, precessão de Thomas. Devido à precessão de Thomas, a energia de interação spin-órbita é dada por

$$U'_{LS} = U_{LS} - \vec{S} \cdot \vec{\omega}_T \tag{4}$$

(h) Com ajuda da expressão anterior, reescreva o termo adicional como função de U_{LS} e explique o fator 2 que concorda com os resultados experimentais. (1,0 ponto)

2 Precessão dos Equinócios (10 pontos)

O fenômeno da precessão dos equinócios está associado à uma lenta precessão da Terra, que se comporta como um giroscópio sob os torques devidos à atração gravitacional do Sol e da Lua.

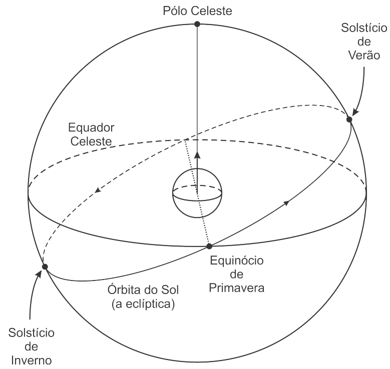

Figura 3: Movimento da Eclíptica em torno da Esfera Celeste.

Desde a antiguidade, os astrônomos observaram que a esfera celeste de estrelas "fixas" parecia estar girando de oeste para leste com relação a uma linha de referência definida pela interseção do equador celeste com a eclíptica, como mostra a Fig. 3.

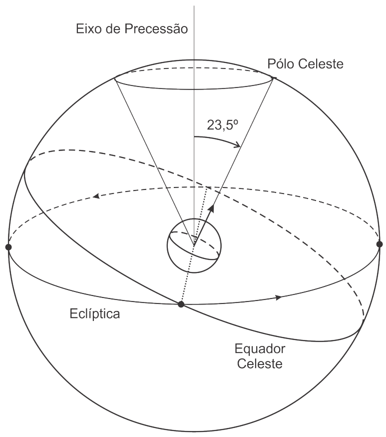

Figura 4: Precessão do Eixo Terrestre.

O astrônomo grego Hiparco, foi quem primeiro fez a observação da precessão dos equinócios e obteve uma taxa de precessão de $36''$ de arco por ano (36 segundos de arco por ano). Ele acreditava que se tratava somente de um fato empírico. Medidas mais cuidadosas feitas por Copérnico concluíram que a taxa média de precessão é de $52''$ por ano, e que o eixo da Terra, embora mantenha praticmente sempre a mesma inclinação com o plano de sua órbita em torno do Sol, forma um cone (Fig. 4) com relação à normal a este plano.

(a) Determine o período (em anos) de uma rotação completa da Terra em torno do eixo de precessão obtido por Copérnico. (0,5 pontos)

O ângulo de inclinação entre o eixo de precessão e o eixo da Terra é cerca de $\theta = 23,5°$. Este ângulo é mostrado na Fig. 5 que representa um modelo grosseiro (que será utilizado neste problema) para explicar a precessão dos equinócios.

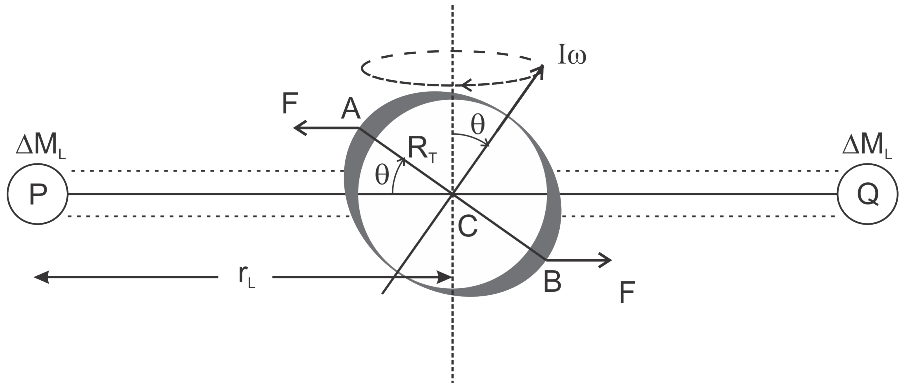

Figura 5: Modelo Grosseiro para determinar o período de precessão dos equinócios da Terra.

O modelo consiste em considerar que o plano equatorial da Terra, que tem uma barriga onde $\Delta R/R \approx 1/300$, não está orientado simetricamente, como é mostrado na Fig. 5. O período de precessão, como foi determinado no item (a), é muito maior que o período de rotação da Lua em torno da Terra, e da Terra em torno do Sol. Neste caso, pode-se considerar que tanto o Sol como a Lua estão distribuídos em anéis ao redor da Terra, aquele representando a Lua está mostrado na Fig. 5 pelos pontos P e Q.

(b) Considerando que um elemento de massa da Terra ΔM_E próximo ao ponto A está submetido à atração gravitacional de dois elementos de massa iguais da Lua ΔM_L nos pontos P e Q. Determine força resultante F_L sobre o mesmo. O raio da órbita da Lua é r_L e o raio da Terra é R_T. (1,5 pontos)

(c) Faça uma estimativa das massas ΔM_T e ΔM_L como função das massas da Terra M_T e da Lua M_L, respectivamente. Faça as aproximações necessárias para que os valores obtidos concordem com o modelo do item (b), de duas massas ΔM_L em posições diametralmente opostas com relação à Terra. Indique claramente as fontes de suas aproximações. (3,0 pontos)

(d) Inclua agora a contribuição do Sol, de massa M_S e raio da órbita r_S. Escreva a expressão da força total F que produz torque sobre a Terra. (1,0 pontos)

(e) Determine o momento de inércia da Terra, num eixo que passa pelo seu centro, na aproximação de que ela é uma esfera perfeita. (1,0 pontos)

(f) Escreva a equação que relaciona o torque produzido pela força F com a velocidade angular de precessão Ω do eixo da Terra. Escreva sua resposta como função de R_T, F, θ, M_T e da velocidade angular ω da Terra em torno de seu próprio eixo. (2,0 pontos)

(g) Utilizando $M_L = 7.10^{22}$kg, $M_S = 2.10^{30}$kg, $r_L = 3,9.10^8$m, $r_S = 1,5.10^{11}$m como dados para o problema e sabendo que a constante da gravitação universal vale $G = 6,67.10^{-11}$kg.m/s^2, determine o valor da velocidade de precessão da Terra. O resultado está de acordo com os experimentais. Indique algumas possíveis melhorias para o modelo utilizado. (1,0 pontos)

3 Oscilador Harmônico Quântico e Níveis de Landau (10 pontos)

A *quantização de Landau* é um fenômeno peculiar que ocorre em mecânicia quântica. Ele está relacionado à quantização das órbitas de ciclotron de partículas carregadas imersas num meio onde existe um campo magnético. Sendo assim, a energia das partículas carregadas (e.g. elétrons) são quantizadas em múltiplos da constante de planck h.

Parte A - Oscilador Harmônico Quântico

Antes de partir para o oscilador harmônico quântico, considere um oscilador harmônico clássico da seguine maneira: uma massa m presa a uma mola ideal de constante elástica k. Faça o que se pede:

(a) Escreva as equações da posição (x) e velocidade (v) da massa m como função da amplitude A do movimento e da frequência angular de vibração $\omega = \sqrt{k/m}$. (1,0 ponto)

(b) Sabendo que a probabilidade total de encontrar a partícula na região $-A \leq x \leq +A$ é 1, determine a probabilidade $P(x)dx$ de encontrar a partícula entre x e $x + dx$. Faça um esboço do gráfico da densidade de probabilidade $P(x)$. Se necessário utilize: (1,0 ponto)

$$\frac{d}{dx} arcsen(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{5}$$

Em mecânica quântica as partículas são descritas por sua função de onda $\Psi(x,t)$ e pela densidade de probabilidade de encontrá-la entre x e $x + dx$, que é dada por $|\Psi(x,t)|^2$, como foi interpretado por Born. Neste caso, a equação que descreve a evolução da partícula (análoga à 2^a Lei de Newton) é a equação de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x,t)}{dt^2} + V(x)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} \tag{6}$$

Essa equação conduz à quantização da energia da partícula, que no caso do potencial estático do oscilador harmônico $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$, a energia é dada pela expressão

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{7}$$

em que n é um número quântico introduzido para explicitar qual a função de onda $\Psi_n(x)$ da partícula.

A Figura 6 ilustra a densidade de probabilidade de encontrar a partícula no caso $n = 0$. A região escura representa a parte abaixo da curva do potencial $V(x)$.

(c) Explique a razão das semelhanças (diferenças) entre o seu resultado obtido no item (b) e o dado na figura 6. O que se espera que aconteça com a densidade de probabilidade associada à partícula quântica (num oscilador harmônico) à medida que sua energia cresce? (1,0 ponto)

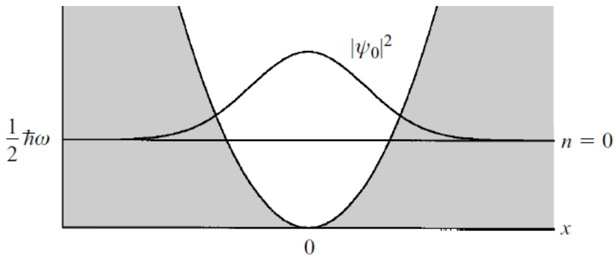

Figura 6: Densidade de Probabilidadade associada ao nível $n = 0$ de um oscilador harmônico quântico

Parte B - Quantização de Landau

Considere um fina folha de largura L_x e comprimento L_y de um material onde partículas quânticas de massa m e carga q estão praticamente livres para se movimentar, mas confinadas sobre a folha (i.e. não escapam da mesma). É aplicado um campo magnético B na direção perpendicular à folha.

É possível mostrar que uma quantidade invariante no tempo para essa partícula é

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2m}\left(p_y - \frac{qB}{c}x\right)^2 \tag{8}$$

(d) Quais os possíveis valores que p_y pode assumir? (2,0 pontos)

(e) Mostre que o sistema se comporta como um oscilador harmônico quântico que oscila em torno de uma posição x_0. Qual a freqüência angular ω_L neste caso? Determine x_0 como função de p_y e ω_L. (1,0 ponto)

(f) Quais os números quânticos que descrevem o sistema neste caso? Determine os níveis de energia do sistema sabendo que os mesmos não dependem de p_y. (1,0 ponto)

(g) Para que temperaturas T e campos magnéticos B se espera observar esse tipo de fenômeno, i.e. para $T/B \gg 1$ ou $T/B \ll 1$? Justifique sua resposta. (1,0 ponto)

(h) Para partículas com carga $q = e$, determine o maior (e/ou menor) valor de $p_y L_y$ em função do fluxo total do campo magnético sobre o sistema, do quanta de fluxo magnético $\Phi_0 = hc/e$ e de constantes fundamentais. (1,0 ponto)

(i) No caso semiclássico, i.e. quando a energia da partícula é muito maior do que a energia do estado fundamental, a energia cinética média é igual à energia potencial média. Mostre, neste caso, que a área na qual uma partícula gira é quantizada, i.e. só há órbitas cujas áreas aumentam sempre da mesma quantidade ΔA. Determine também ΔA. (1,0 ponto)