1ª Prova de Seleção para as Olimpíadas Internacionais de Física 2013

Sábado, 30 de Junho de 2012

Por favor, leia as instruções antes de iniciar a prova:

1. O tempo disponível para a prova é de 4 horas. O aluno só pode ausentar-se da sala após 90 minutos de prova.
2. Utilizar apenas caneta na solução dos problemas.
3. Utilize apenas o lado da frente das folhas de papel fornecidas para resposta.
4. Iniciar cada questão na folha correspondente de cada questão.
5. Se houver resultados numéricos, estes devem ser escritos com o número de algarismos significativos apropriado, conforme indicado no problema. Não se esqueça de indicar as unidades.
6. Escrever nas folhas de resposta tudo o que considerar relevante para a resolução da questão. Utilize o mínimo de texto possível, devendo exprimir-se, sobretudo com equações, números, figuras e gráficos.
7. Utilize o verso das folhas do caderno de respostas para rascunhos.

Nome:	
e-mail:	
Nº e tipo de Documento de Identificação:	
Nome da Escola:	
Cidade:	Estado:
Assinatura:	Telefone:

1 Movimento de uma partícula sobre uma superficie esférica

Considere uma particula de massa m posta sobre uma superficie esferica, de raio R. Seja θ o ângulo, com respeito à vertical, da posição da partícula num dado instante, conforme a seguinte figura.

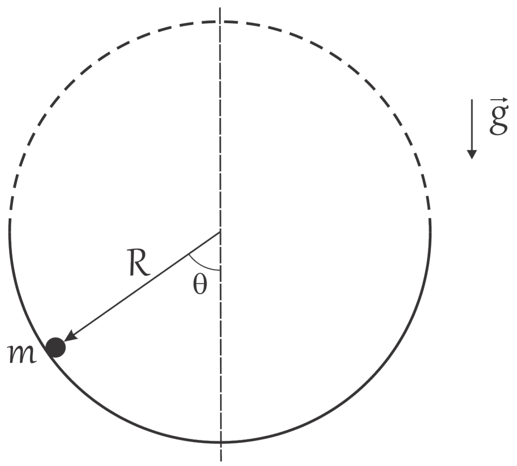

Figura 1: Ilustração da superfície esférica sobre a qual a partícula de massa m está livre para se movimentar. O movimento da partícula é considerado somente no plano do papel.

Suponha que a partícula seja colocada, inicialmente, num ângulo θ_0 e com velocidade angular $\omega_0 = (d\theta/dt)_0$. Além disto, assuma também que o movimento esteja sempre restrito à região $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, de modo que não precisaremos nos preocupar com o caso de a partícula perder o contato com a superfície.

(a) Calcule a velocidade angular ω da partícula quando esta se encontra num dado ângulo θ. Expresse o resultado em termos de ω_0, θ_0, do raio R e da gravidade local g.

(b) A quais intervalos o ângulo e a velocidade angular ficam restritos neste caso?

Agora assumiremos que existe um coeficiente de atrito dinâmico $\mu(\theta)$, que pode depender do ponto, mas é uma função contínua do ângulo.

Suponhamos que a partícula não seja capaz de rolar, ela apenas desliza. Vamos então, nos próximos itens, responder às questões (a) e (b), mas incluindo o efeito do atrito:

(c) Escreva a equação diferencial que relaciona o ângulo θ da posição da partícula com o tempo t. Deixe-a, naturalmente, dependendo apenas de parametros conhecidos (dados no enunciado). Lembre-se que, devido ao fato de a direção da força de atrito depender do sentido da velocidade, deveremos ter *duas* equações, para os casos nos quais a particula está se movendo no sentido horário ou anti-horário.

Depois de solta da posição inicial $\theta_0 > 0$, a partir do repouso, ela começará a descer pela superficie até parar. Há varias possibilidades aí, dependendo do nível de atrito: pode ser que ela pare num ângulo ainda positivo e, se o atrito estático suportar, ela continuará parada; pode ser que ela pare num ângulo negativo (isto é, passe do ponto mais baixo) mas continue parada, se o atrito estático for suficiente; ou ela também pode chegar até um ângulo negativo e descer novamente, no sentido anti-horário, e assim qualquer uma das três situações se repetirá. Vamos, no entanto, nos concentrar aqui apenas na primeira parte do movimento, quando a particula se move no sentido horário (antes da primeira parada).

Deve ser possível perceber que deve ser um tanto complicado resolver a equação do item (c) diretamente, no entanto, veremos que será muito mais simples resolver a velocidade angular como função do ponto ($\omega = \omega(\theta)$) e assim, pelo menos em princípio, será permitido determinar $\theta(t)$, ou melhor, $t(\theta)$, através da integral

$$t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\omega(\theta)}$$

(d) Mostre que é possivel relacionar a velocidade angular com o ângulo pela seguinte equação diferencial

$$\frac{d\omega^2}{d\theta} - 2\mu\omega^2 = -\frac{2g}{R}(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

Tal equação já é muito mais simples de ser resolvida (ela é conhecida como *equação diferecial linear de primeira ordem*). A idéia para se resolver algo assim é tentar usar a regra da cadeia para juntar a sua função incógnita (no caso ω^2) numa só derivada, para depois podermos integrar a equação trivialmente. Veja uma equação semelhante na qual se observa uma aplicação direta da idéia acima:

$$f(x)\frac{dy}{dx} + f'(x)y = J(x) \Longrightarrow \frac{d[y(x)f(x)]}{dx} = J(x)$$

sendo $y = y(x)$ a função incognita, x a variavel independente e f, J funções conhecidas.

(e) Resolva a equação diferencial do item anterior. Não se esqueça que μ não é constante.

Dica: Tente multiplicar a equação por uma função $\lambda(\theta)$ para poder agrupar conforme proposto.

(f) Que alterações devem ser feitas na solução obtida acima para tratar do caso no qual a partícula se move no sentido anti-horário?

Vamos agora fazer uma simplificação, suficientemente justificável, de considerar o coeficiente de atrito μ constante sobre toda a superfície.

(g) Adicione esta simplificação à solução encontrada no item anterior, obtendo o quadrado da velocidade angular ω^2 em função do ângulo θ. Esta expressão se reduz ao resultado do item **a** quando se faz $\mu = 0$?

Dica: Você pode querer usar o resultado da seguinte integral

$$\int e^{-2\mu\theta}(\sin\theta - \mu\cos\theta)d\theta = -\frac{e^{-2\mu\theta}}{1+4\mu^2}\left[\left(1-2\mu^2\right)\cos\theta + 3\mu\sin\theta\right]$$

Visando tirar algumas conclusões rápidas, sem ter que recorrer a métodos numéricos, e que nos ajudem a entender o efeito do atrito no movimento da partícula, mesmo que já tenhamos uma ideia muito clara sobre isto, suponhamos que o atrito seja muito baixo, ou seja, a superficie é praticamente lisa.

(h) Mostre que para todo ponto a velocidade angular é menor em relação ao caso sem nenhum atrito.

(i) Após soltar a particula de θ_0, e do repouso, ela deslizará até parar pela primeira vez, num angulo θ_1. Já que um pouco de sua energia foi tirada pelo atrito ela não deve ser capaz de ir tão longe quanto iria se não houvesse atrito. Calcule então o ângulo $\delta\theta$ que ela deixa de atingir, em relação ao caso sem atrito.

(j) Consideremos agora que a superfície pela qual a partícula desce seja convexa, ao invés de côncava, tal como um iglu. Que alterações devem ser feitas nas fórmulas para adaptá-las a este caso?

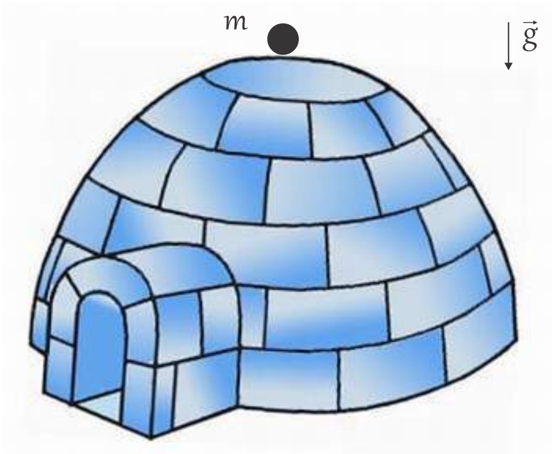

Figura 2: Partícula de massa m deslizando sobre a superfície de um Iglu, suposta esférica de raio R.

(k) Imagine alguém escorregando pela superfície deste iglu, de coeficiente de atrito $\mu << 1$, que parte do seu topo e quase sem velocidade. Calcule o ângulo θ^*, em primeira aproximação, para que haja perda do contato.

2 Efeito Schottky

Vamos considerar um modelo simplificado de um gás ideal constituído por N partículas que podem ser encontradas em dois estados, com energias 0 ou $\varepsilon > 0$. Para especificar o estado microscópico desse sistema é necessário o conhecimento do número de partículas em cada um dos estados energéticos. Considere o caso em que N_1 partículas estão no estado de energia nula e $N_2 = N - N_1$ partículas estão no estado de energia $\varepsilon > 0$.

(a) Considerando que todas as partículas são idênticas e que a única forma de diferenciar cada uma é através de sua energia, determine o número de maneiras W pelas quais é possível obter um estado como aquele descrito no texto, como função de N, N_1 e N_2.

(b) Exprima o resultado obtido no item anterior como função da energia total $E = \varepsilon(N - N_1)$ do sistema, da energia ε e do número total de partículas N da amostra.

A entropia do sistema é dada pela fórmula de Boltzmann, expressa em sua lápide como mostra a figura a seguir.

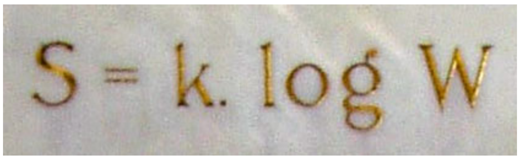

Figura 3: Foto da lápide de Ludwig Boltzmann, que indica sua fórmula proposta para a entropia de um sistema. Na figura log representa o logaritmo natural na base de Euler.

Na fórmula indicada o logaritmo deve ser interpretado como o logaritmo neperiano (expresso na base natural e de Euler). A constante k é reconhecida como a *constante de Boltzmann*

(c) Utilizando a fórmula dada escreva a entropia S do sistema constituído pelo gás de dois níveis.

Em geral, ao se tratar sistemas termodinâmicos, estamos interessados nas propriedades para grandes populações, i. e. quando N, N_1 e N_2 são números grandes, da ordem de 1 mol. Neste caso, podemos lançar mão de aproximações que possibilitam um tratamento analítico do problema sem perder as características básicas do mesmo. Estas aproximações são parte do que se costuma chamar de *limite termodinâmico*.

Entre as principais aproximações utilizadas está a famosa expansão de Stirling, que é dada por

$$\log(x!) = x\log x - x + \mathcal{O}(\log x)$$

onde os termos de ordens $\log x$ podem ser desprezados no limite termodinâmico.

(d) Utilize a expansão de Stirling para escrever a densidade de entropia do sistema $s = S/N$, como função da constante de Boltzmann, da energia ε e da densidade de energia $u = E/N$ do sistema.

(e) Obtenha a temperatura T do sistema como função de k, u e ε. Se necessário utilize:

$$\frac{d}{dx}\log f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

(f) A partir dos resultados obtidos nos itens (d) e (e), faça um esboço do gráfico de s como função de u.

(g) O que se espera para a temperatura quando $u > \varepsilon/2$. Discuta o resultado.

(h) Determine a densidade de energia u como função de ε e do fator de Boltzmann $\beta = 1/kT$. Para isso, utilize a propriedade do logaritmo neperiano

$$y = \log x \qquad \Rightarrow \qquad x = e^y$$

(i) O mesmo resultado poderia ter sido obtido utilizando os fatores de Boltzmann $P(0)$ e $P(\varepsilon)$, e uma média poderada, ou seja, $u = 0 \cdot P(0) + \varepsilon \cdot P(\varepsilon)$. Determine quais são os fatores de Boltzmann em questão.

(j) Faça um esboço do gráfico de u contra a temperatura T.

(k) Determine o calor específico c do sistema como função de β, ε e k.

(l) Faça um gráfico do calor específico c contra a temperatura para esse tipo de sistema. Deixe claro no seu esboço os limites $\beta\varepsilon \to 0$ e $\beta\varepsilon \to \infty$.

A assinatura deste tipo de sistema é o gráfico do calor específico obtido anteriormente, e é conhecido como *efeito Schottky*.

3 Espelho Elipsoidal

Neste problema vamos investigar as características da imagem formada por um espelho na forma de um elipsóide. Este tipo de espelho tem a característica marcante de que todo raio que parte de um dos focos F ou F', como mostrado na figura a seguir, atinge o outro foco. Neste caso, se diz que os focos F e F' são um par objeto-imagem, ou, pontos conjugados.

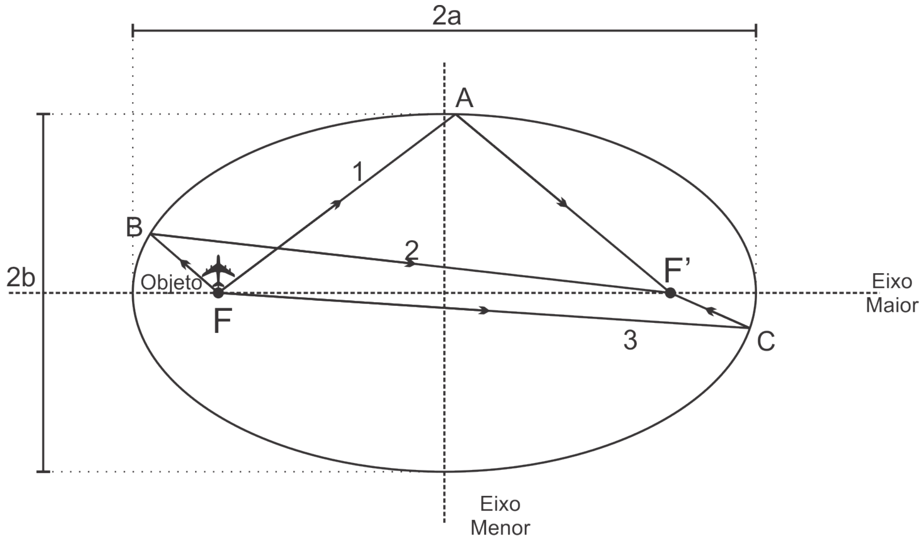

Figura 4: Ilustração de um espelho elipsoidal, com semieixo maior $2a$ e semieixo menor $2b$.

Uma elipse é caracterizada pelos seus focos F e F'. A principal característica de uma elipse é que sobre qualquer ponto P sobre a mesma, e.g. pontos A, B e C na figura, vale a relação $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$, onde $2a$ é uma constante e mede o comprimento do eixo maior da elipse. Dependendo da distância entre os focos da elipse o eixo menor, cujo comprimento é $2b$, pode ser maior ou menor. Dessa maneira, costuma-se definir a excentricidade de uma elipse ϵ como

$$\epsilon \equiv \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Esta é a quantidade que indica o quanto oval é a elipse. Suponha que um objeto seja colocado sobre o foco F do espelho, como mostra a figura. Faça o que se pede.

(a) Qual o aumento transversal do espelho caso se considere somente os raios de luz que atingem o espelho próximos ao ponto A. Faça uma ilustração da imagem formada. Escreva seu resultado como função da excentricidade ϵ da elipse. (Obs.: O aumento transversal é definido como a razão entre o comprimento da imagem e o comprimento do objeto quando o últmo é colocado na direção normal ao eixo óptico do espelho.)

(b) Repita o que se pede no item (a) considerando os raios que atingem o espelho no ponto B.

(c) Repita o que se pede no item (a) considerando os raios que atingem o espelho no ponto C.

(d) Conclua dos itens anteriores qual deve ser o aumento transversal de um espelho na forma de elipse.

(e) O círculo pode ser considerado um caso particular de elipse com excentricidade nula, $\epsilon = 0$. Determine, dessa maneira, o aumento transversal de um espelho esférico, para um objeto colocado sobre o ponto F. Onde está a imagem neste caso?