2ª Prova de Seleção para as Olimpíadas Internacionais de Física 2013

Sábado, 15 de Dezembro de 2012

Por favor, leia as instruções antes de iniciar a prova:

1. O tempo disponível para a prova é de 4 horas. O aluno só pode ausentar-se da sala após 90 minutos de prova.

2. Utilizar apenas caneta na solução dos problemas.

3. Apenas o lado da frente das folhas de papel fornecidas para resposta será considerado na solução. O verso poderá ser utilizado como rascunho.

4. Iniciar cada questão numa folha de resposta correspondente.

5. Se houver resultados numéricos, estes devem ser escritos com o número de algarismos significativos apropriado, conforme indicado no problema. Não se esqueça de indicar as unidades.

6. Escrever nas folhas de resposta **tudo** o que considerar relevante para a resolução da questão. Utilize o mínimo de texto possível, devendo exprimir-se, sobretudo com equações, números, figuras e gráficos.

7. Nas folhas de rascunho e nas folhas que você não quiser levar em consideração na correção, faça um grande X na sua face.

Nome:	
e-mail:	
Nº e tipo de Documento de Identificação:	
Nome da Escola:	
Cidade:	Estado:
Assinatura:	Telefone:

1 Relógio Eletrostático (30 Pontos)

Neste problema iremos estudar o período de oscilações de um relógio baseado nas pequenas oscilações de um anel circular colocado na presença de um campo elétrico produzido por uma linha infinita de cargas uniformemente distribuídas.

Considere o sistema mostrado na Fig. 1, onde uma disribuição linear uniforme de carga λ num fio passa pelo centro de um anel de raio a.

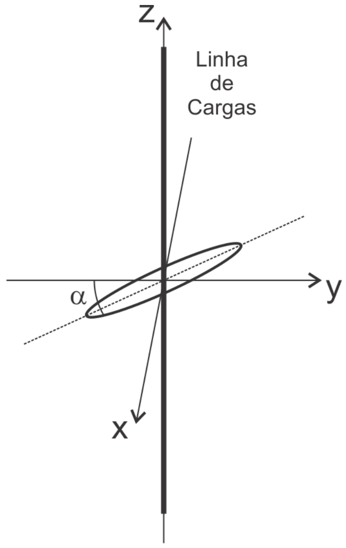

Figura 1: Anel envolvendo uma linha infinita de cargas como modelo para um relógio eletrostático.

(a) Considere que a distribuição de cargas está sobre o eixo z de um sistema de coordenadas. Determine o vetor campo elétrico desta distribuição como função de λ, da permissividade elétrica do vácuo ε_0 e do vetor posição $\vec{d}$ do ponto onde se deseja determinar o campo com relação à linha de cargas.

A Fig. 2 a seguir indica um sistema de coordenadas (x_1, y_1, z_1) fixo no anel e um ponto arbitrário P de coordenadas

$$\begin{cases} x_1 = a\cos\theta \\ y_1 = a\text{sen}\theta \\ z_1 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

(b) Considere agora que o plano do anel gira de um ângulo α com relação ao eixo x como mostra a Fig. 1. Os eixos fixos no anel inicialmente coincidiam com aqueles mostrados na Fig. 1 e o centro do anel está localizado na origem de (x, y, z). Determine as coordenadas do mesmo ponto P mostrado na Fig. 2

Considere a partir daqui que o anel possua uma carga total Q distribuída uniformemente.

(c) Determine a carga total dq sobre um elemento do anel de comprimento $|d\vec{r}|$, localizado na posição $\vec{r}$. Utilize os mesmos ângulos e posições mostrados nas figuras anteriores e simplifique o seu resultado o máximo possivel.

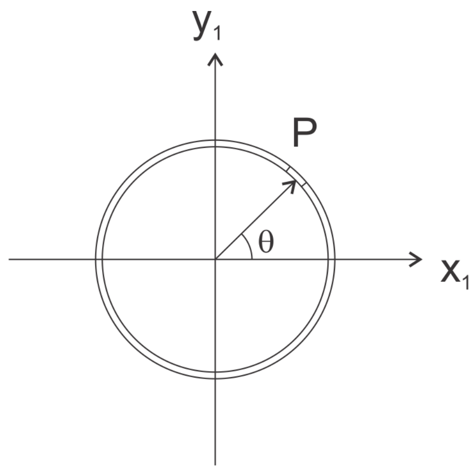

Figura 2: Sistema de referência fixo no anel.

(d) Determine o elemento de força sobre o elemento de carga do item anterior devido à distribuuição linear de carga.

(e) Com o resultado obtido nos itens (a), (c) e (d), determine a força total (vetor) do campo elétrico gerado pela distribuição linear de cargas sobre o anel.

(f) Determine o elemento de torque sobre a carga calculada no item (c).

(g) Qual a direção do torque resultante determinado no item anterior? Determine o vetor torque total sobre o anel.

(h) Esboçe um gráfico do torque resultante como função do ângulo α, no intervalo $-\pi \leq \alpha \leq \pi$.

A partir de agora, vamos determinar o período de oscilação do anel em torno do eixo x. Para isso considere que o mesmo tenha uma massa M uniformemente distribuída e que sua espessura seja desprezível.

(i) Determine o momento de inércia do anel com relação ao eixo x.

(j) Escreva a equação de movimento do anel submetido à ação do torque externo.

(k) A partir do resultado obtido no item anterior e considerando que o anel oscile com pequenos ângulos α em torno de $\alpha = 0$, detemine o período de oscilação do mesmo.

(l) Qual o valor do períodon das oscilações caso $M = 100$g, $a = 10$cm, $Q = 1\mu$C e $\lambda = 1\mu$C/10m. Dado: $\varepsilon_0 = 8,85.10^{-12}$F/m.

Se necessário, utilize na resolução deste problema o seguinte resultado:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}^2 x dx}{\cos^2 x + \cos^2 y \cdot \text{sen}^2 x} = \frac{2\pi}{|\cos y| + \cos^2 y} \tag{2}$$

2 O Paradoxo dos Golfistas (30 Pontos)

O porquê do nome deste problema é um mistério que não será desvendado com sua solução. Contudo, é assim que é conhecido o estranho movimento de uma bola dentro de uma superfície cilíndrica vertical. Este movimento "estranho" consiste basicamente de um movimento oscilatório na direção vertical composto de um movimento circular em torno do cilindro. O objetivo deste problema é investigar este movimento.

A Fig. 3 mostra uma vista em perspectiva e uma superior do sistema consistindo de uma bola (casca esférica) de raio r_b e massa m e uma superfície cilíndrica de raio r_c, onde $r_c \gg r_b$. A bola se move sem deslizar sobre a suerfície interna do cilindro.

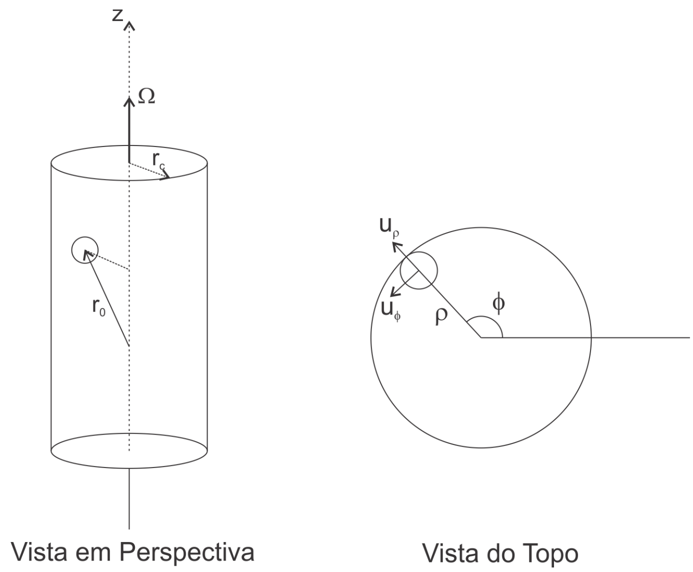

Figura 3: Bola girando sem deslizar dentro de um cilindro vertical.

Logicamente, se a bola for lançada verticalmente ela irá simplesmente cair. No entanto, vamos supor aqui que as condições iniciais sejam tais que a velocidade horizontal inicial seja não-nula. O que acontece é que, ao invés de descer em uma espiral com o passo crescente ou atingir assintoticamente um movimento horizontal, o centro da bola se move para baixo e depois para cima!

Seja $\vec{\omega}$ a velocidade angular da bola, com ω_z, ω_ϕ e ω_ρ suas componentes na direção vertical, azimutal e radial, respectivamente, em coordenadas cilíndircas conforme a Fig. 3.

(a) Qual o sinal de ω_ϕ quando a bola está se movendo para baixo? E para cima?

O mecanismo capaz de mudar o sinal de ω_ϕ quando a bola está descendo, e responsável por fazê-la subir, é conhecido como *Torque de Coriolis*.

Considere um sistem de referência girando com velocidade angular $\vec{\Omega}$ em torno do eixo do cilindro de forma que o ponto de contato entre a bola e o cilindro parece se mover somente na vertical. A expressão para o torque de Coriolis é

$$\vec{\tau} = \int \vec{r} \times \left[-2\vec{\Omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\right] dm \tag{3}$$

onde $\vec{r}$ é o vetor posição do elemento de massa dm medido com relação ao centro da bola.

(b) Antes determinar o valor do torque de Coriolis, escreva o momento de inércia I da bola como função da integral

$$\int dmr^2 \tag{4}$$

com r medido do centro e não a partir de um eixo da bola.

(c) Utilizando a identidade

$$\vec{a} \times \left[\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a})\right] = a^2\vec{c} \times \vec{b} - [\vec{a} \times (\vec{c} \times \vec{a})] \times \vec{b} + \vec{a} \times \left[\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \times \vec{a}\right] \tag{5}$$

escreva o torque de Coriolis como função de I e do produto $\vec{\omega} \times \vec{\Omega}$.

(d) Determine o torque $\vec{\tau}_E$ da Força de Euler $\vec{F}_E = -m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r_0}$ com relação ao ponto de contato entre a bola e o cilindro.

(e) Qual a relação entre r_b, r_c, Ω e ω_z para que o cilindro gire sem deslizar sobre o cilindro?

(f) Utilizando a expressão $\vec{\tau}_E = \dot{\vec{L}}$, onde $\vec{L}$ é o momento angular em torno do ponto de contato, determine qual deve ser o valor de $\vec{\tau}_E$ para que o movimento seja possível.

(g) Observe $\vec{\tau}_E$ é o único torque vertical que pode influenciar $\dot{\vec{\Omega}}$. Sendo assim, utilize as expressões obtidas em (e) e (f) para mostrar que a única possibilidade é que $\dot{\vec{\Omega}} = 0$, ou seja, $\vec{\Omega}$ é constante e o movimento na horizontal é um movimento circular uniforme.

Digamos que $I = Kmr_b^2$, onde K é uma constante adimensional que abarca a geometria da densidade de massa da bola.

(h) Escreva o momento angular $\vec{L}$ da bola em torno de um ponto fixo sobre a linha de contato com o cilindro (o ponto de contato no instante em questão). Sua resposta deve ser como função de I, mr_b^2 e das componentes de $\vec{\omega}$.

(i) Inverta a equação anterior para obter $\vec{\omega}$ como função de $\vec{L}$ para escrever o torque $\vec{\tau}$ como função de K, $\vec{L}$ e $\vec{\Omega}$.

(j) Adicionando o torque $\vec{\tau}_g$ do peso obtenha, através da equação $\dot{\vec{L}} = \vec{\tau} + \vec{\tau}_g$, as equações de evolução das componentes de $\vec{\omega}$.

(k) Para que a bola não deslize é necessário que $\dot{z} = \pm r_b\omega_\phi$. A partir desse resultado, escreva a equação de movimento da posição z do centro de massa da bola.

(l) Mostre, utilizando o resultado do item anterior, que a bola oscila na vertical com velocidade angular $\Omega_V = \Omega/\sqrt{1 + 1/K}$.

3 Caixa preta Magnética (40 Pontos)

Neste problema vamos simular a realização de um experimento que consiste em descobrir o momento magnético μ de dois dipolos idênticos, um dos quais está escondido dentro de uma caixa preta. Além de descobrir o momento magnético é possivel determinar a posição em que o dipolo se encontra e o campo magético terrestre.

A Fig. 4 indica o momento magnético que forma um ângulo θ com a direção vertical e um ângulo φ com o campo magnético terrestre.

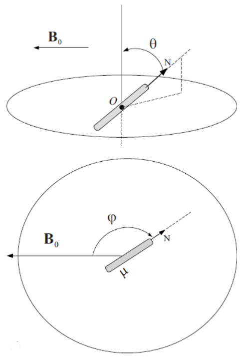

Figura 4: Geometria do sistema composto por uma caixa preta

A seguir estão dois modelos teóricos para a determinação do que é proposto.

Parte A - Modelo Teórico

A.1) Oscilações horizontais

Aqui, vamos estudar as oscilações horizontais de um dipolo de prova colocado fora da caixa devido à presença do campo magnético do outro dipolo, conforme indicado pela Fig. 5.

O campo magnético B gerado por um dipolo magnético $\vec{\mu}$ é dado por

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mu}{r^3}(2\cos\theta\hat{r} + \text{sen}\theta\hat{\theta}) \tag{6}$$

onde $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ são os vetores unitários na direção do dipolo e na direção perpendicular.

(a) Qual o valor da componente horizontal B_{dip} do campo magnético acima (na mesma vertical) do dipolo?

(b) Qual o valor do campo magnético $\vec{B}$ total levando em consideração o campo magnético terrestre?

(c) Escreva a expressão para o torque sobre o dipolo de prova como função de $\vec{\mu}$ e $\vec{B}$.

(d) Determine o período T_h para pequenas oscilações do dipolo de prova como função dos resultados anteriores e de seu momento de inércia I.

A.2) Oscilações verticais

A Fig. 6 indica o sistema experimental montado para estudar as oscilações verticais do dipolo de prova preso a um fio de comprimento l. Aqui, o dipolo de prova de massa M é submetido a pequenas oscilações com relação à posição de equilíbrio, onde $\delta = 0$.

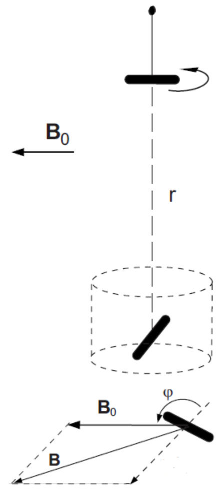

Figura 5: Dipolo de prova colocado a uma distância r sobre a caixa preta.

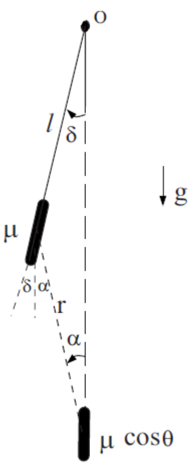

Figura 6: Oscilações do dipolo de prova no plano do papel.

(e) Para pequenas oscilações do dipolo de prova, qual a relação entre r, l, α e δ como mostrados na Fig. 6?

A força atuando sobre um dipolo magnético pode ser escrita como

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \tag{7}$$

(f) Escreva a equação de movimento para δ para o dipolo de prova? Aqui não é preciso incluir a força graviacional.

(g) Mostre que o período para pequenas oscilações do dipolo de prova é dado por

$$\frac{1}{T^2} = \frac{g}{4\pi^2 l} + \frac{\mu_0 \mu^2 |\cos\theta|}{8\pi^2 M}\left[\frac{3 + (3r/l) + (r/l)^2}{r^5}\right] \tag{8}$$

Aqui você deve incluir a contribuição gravitacional.

Parte B - Dados Experimentais

Nesta parte você é levado a utilizar os resultados obtidos anteriormente para determinar o momento magnético dos dipolos, a sua orientação e o campo magnético terrestre. Se necessário utilize $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$H/m.

B.1) Oscilações horizontais

A Fig. 7 indica um gráfico de $1/T^4$ contra $1/r^3$ para as oscilações horizontais do dipolo de prova. No experimento realizado $M = 4,7$g, $d = 2,70$cm e $I = Md^2/12$.

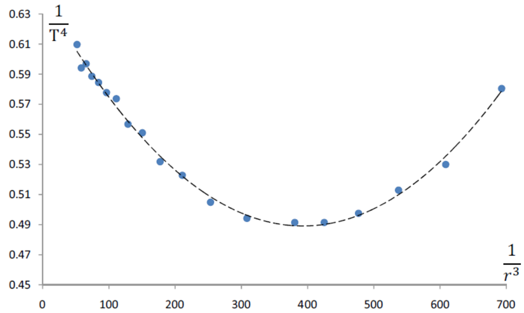

Figura 7: Gráfico dos dados obtidos para as oscilações horizontais do dipolo de prova.

(h) Quais deveriam ser as escalas da Fig. 7?

(i) Determine ϕ, μB_0 e $\mu^2 \text{sen}\theta$. Não esqueça das unidades.

B.2) Oscilações verticais

Utilizando o mesmo equipamento da parte B.1 obteve-se o gráfico indicado na Fig. 8 de γ contra η, onde

$$\gamma = \frac{1}{T^2} - \frac{g}{4\pi^2 l}, \qquad \eta = \frac{3 + (3r/l) + (r/l)^2}{r^5} \tag{9}$$

Neste experimento, o comprimento da corda é $l \approx 1$m e a distância r varia de 15 a 30cm e $r + l = 1.3$m é fixo.

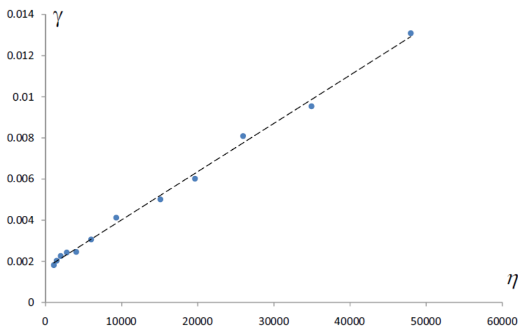

Figura 8: Gráfico dos dados obtidos para as oscilações horizontais do dipolo de prova.

(j) Quais as escalas da Fig. 8?

(k) Determine θ, B_0 e μ.