1ª Prova de Seleção para a Olimpíada Internacional de Física 2013

Segunda-Feira, 25 de Março de 2013

Por favor, leia as instruções antes de iniciar a prova:

1. O tempo disponível para a prova é de 5 horas. O aluno só pode ausentar-se da sala após 90 minutos de prova.

2. Utilizar apenas caneta na solução dos problemas.

3. Apenas o lado da frente das folhas de papel fornecidas para resposta será considerado na solução. O verso poderá ser utilizado como rascunho.

4. Iniciar cada questão numa folha de resposta correspondente.

5. Se houver resultados numéricos, estes devem ser escritos com o número de algarismos significativos apropriado, conforme indicado no problema. Não se esqueça de indicar as unidades.

6. Escrever nas folhas de resposta **tudo** o que considerar relevante para a resolução da questão. Utilize o mínimo de texto possível, devendo exprimir-se, sobretudo com equações, números, figuras e gráficos.

7. Nas folhas de rascunho e nas folhas que você não quiser levar em consideração na correção, faça um grande X na sua face.

Nome:	
e-mail:	
Nº e tipo de Documento de Identificação:	
Nome da Escola:	
Cidade:	Estado:
Assinatura:	Telefone:

1 Colisão Elástica entre duas Partículas (10 pontos)

Quando duas partículas interagem, então os seus movimentos serão determinados pela lei de força que descreve sua interação. Tal interação pode ser local, como forças de contato entre duas partículas que se chocam, ou pode ser através de algum campo, e.g. a força coulombiana entre duas partículas carregadas.

Entretanto, mesmo sem saber os detalhes dessa interação, conseguimos ainda estudar alguns aspectos da colisão. Assumindo que a interação seja significativa apenas quando as partículas estão suficientemente próximas, podemos investigar o que ocorre a grandes distâncias da região de colisão[1]. Afinal, independentemente de qual interação esteja envolvida, ela deve ser tal que o momento linear total do sistema se conserva.

Além disto, vamos supor que nenhuma partícula seja criada desta maneira e também que a colisão seja elástica, no sentido de que não há mudança de estados internos das partículas neste processo, ou seja, a massa de repouso de cada partícula é conservada.

Por simplicidade, considere que, no *referencial do laboratório*, no qual as coisas serão medidas, uma das partículas esteja inicialmente em repouso (esta será chamada de partícula 2). A outra partícula (número 1) viaja em direção a ela, até que se colidem e são eventualmente espalhadas.

Veja o esquema abaixo, ilustrando a situação, bem como os parâmetros básicos que a descreve.

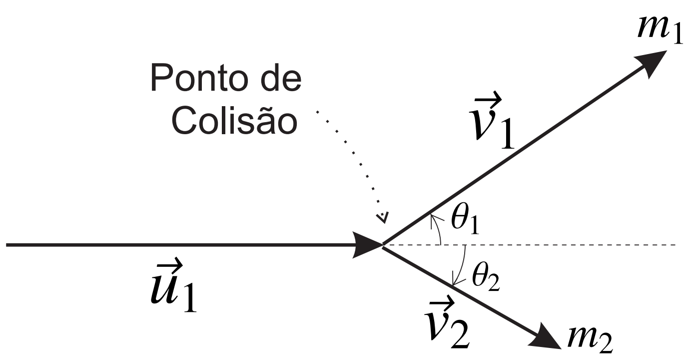

Figura 1: Uma particula da massa m_1 com velocidade u_1 atinge outra, de massa m_2, que está parada no referencial do laboratório ($u_2 = 0$). Elas saem com velocidades v_1 e v_2, formando ângulos θ_1 e θ_2 com a direção de u_1. Repare na orientação dos ângulos.

Conforme indicado na Fig. 1, a partícula 1 possui massa de repouso m_1 e tem inicialmente velocidade u_1. Ela colide com a partícula 2, que possui massa de repouso m_2 e se encontra inicialmente parada ($u_2 = 0$). As duas emergem da colisão com velocidades v_i e fazendo ângulos θ_i com a direção de u_1, sendo que os índices $i = 1, 2$ se referem a cada partícula. Observe na figura a convenção

[1] Note que, neste contexto, colisão se refere a qualquer interação entre as partículas, e não somente a choques.

escolhida para o sentido dos ângulos. Todos estes parâmetros são medidos por um observador no referencial do laboratório.

Esta questão será dividida em duas partes. Primeiramente, este problema será resolvido classicamente (1.1) e, a seguir, relativisticamente (1.2). É claro que a parte 1.1 poderia ser recuperada pelo limite $c \to \infty$ das expressões relativísticas, por isso, para evitar certa redundância, apenas alguns aspectos mais fundamentais serão explorados na parte 1.2, bem como a situação na qual uma nova partícula é produzida através da colisão.

1.1 Espalhamento Clássico

(a)[0,5] Mostre que, no contexto clássico, a definição de colisão elástica mencionada acima se traduz em conservação de energia cinética do sistema.

(b)[0,3] Não é dificil ver que este problema pode ser resolvido de maneira muito mais simples no referencial do centro de massa. Faça um diagrama, como o mostrado acima, para a colisão vista nesse referencial. Evidencie como as leis de conservação foram utilizadas para fazer este diagrama. Se você achar conveniente, resolva os items (c) e (d) antes desse.

(c)[0,4] Calcule as velocidades u_1' e u_2' das partículas antes da colisão, bem como as velocidades v_1' e v_2' depois da colisão, no referencial do centro de massa.

(d)[0,3] Suponha que a partícula 1 seja espalhada formando um ângulo ϕ, com relação a sua velocidade inicial, no referencial do centro de massa. Há alguma restrição sobre este ângulo? Em qual ângulo a partícula 2 será espalhada neste referencial?

(e)[1,0] Relacione o ângulo ϕ com os ângulos de espalhamento no referencial do laboratório, isto é, θ_1 e θ_2. Na sua resposta deve aparecer apenas ϕ, m_1 e m_2.

(f)[0,5] Se a partícula 1 for espalhada num dado ângulo θ_1, no referencial do laboratório, então quantas soluções para ϕ existem? Observe que não há necessidade de resolver a equação para ϕ, mas simplesmente dizer quantas soluções são possíveis.

(g)[0,5] Qual o maior ângulo de espalhamento $\theta_1^{(max)}$ possível para a partícula 1 no referencial do laboratório, caso $m_1 > m_2$. A resposta deve depender apenas das massas.

(h)[0,2] Discuta brevemente os limites $m_1 \gg m_2$ e $m_1 \ll m_2$.

(i)[0,3] Mostre que se $m_1 = m_2$, então as partículas *sempre* serão espalhadas formando um ângulo reto entre si, no referencial do laboratório, isto é, $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$.

1.2 Espalhamento Relativístico

(j)[1,5] Considere um sistema de partículas de massa (de repouso) m_i se movendo arbitrariamente com velocidades $\vec{u}_i$, com momento linear total $\vec{p} = \sum_i \gamma_i m_i \vec{u}_i$, com $\gamma_i = 1/\sqrt{1 - v_i^2/c^2}$, e energia total $E = \sum_i \gamma_i m_i c^2$, para um dado referencial. Mostre que sempre existe um referencial (*centro de momento*) para o qual o momento linear total do sistema é nulo e que a velocidade $\vec{u}_{CM}$ deste referencial, com relação ao referencial original, deve ser dada por

$$\frac{\vec{u}_{CM}}{c} = \frac{\vec{p}c}{E}$$

Veja que isto é análogo a velocidade do centro de massa clássico, mas com as massas de repouso substituídas pelas massas relativísticas (isto é, $m \to \gamma m$).

Por simplicidade, assuma que as partículas interagem apenas localmente (embora isto continue válido no caso geral, desde que o momento associado ao campo de força seja levado em conta).

(k)[1,0] Uma partícula se move retilineamente com velocidade $\vec{u}$ formando um ângulo α com o eixo x de um referencial S. Um segundo observador S', que se move com velocidade $v\hat{x}$ em relação a S, vê a partícula formando um ângulo α' com o eixo x. Mostre que,

$$\tan\alpha' = \frac{\sin\alpha}{\gamma(v)(\cos\alpha - v/u)}$$

(l)[0,5] Considere os itens (b), (c) e (d) da parte 1.1, mas com "centro de massa" substituido por "centro de momento". Que correções devem ser feitas nas respostas?

(m)[0,7] Refaça o item (e) da parte 1.1, para o centro de momento. Não se preocupe com o formato da resposta, apenas certifique-se que tudo o que aparece nela dependa apenas dos parâmetros dados no problema, tal como as velocidades no referencial do laboratório e as massas de repouso (e, naturalmente, o ângulo ϕ).

(n)[0,5] Suponha agora que $m_1 = m_2$. Mostre que o ângulo formado entre as partículas espalhadas, no referencial do laboratório, é *sempre* menor que $\pi/2$. Veja que ele tende a $\pi/2$ no limite de baixas velocidades, recaindo no resultado mostrado no item (i), da parte 1.1.

(o)[1,5] Vamos agora supor que uma partícula seja criada na colisão. Como exemplo, considere um próton (de massa de repouso M) atingindo um outro próton, em repouso. Da colisão emergem estes dois prótons e também um píon, de massa de repouso m. Tal reação pode ser escrita como $p + p \to p + p + \pi^0$. Assuma que a interação elétrica entre estes prótons possa ser desconsiderada, uma vez que ela está predominantemente restrita a uma pequena região em torno da colisão. Qual a menor velocidade v_0 que o próton incidente deve ter para que esta colisão seja possível?

(p)[0,3] Como você poderia definir a eficiência de uma reação como esta? Com sua definição, calcule a eficiência do processo acima. Observe que este item é aberto, sendo, pois, necessário que você justifique sua definição.

2 Motor de Buraco Negro (10 pontos)

É possível que dois buracos negros se unam para formar outro buraco negro maior ainda, desta maneira aumentando a entropia do universo. Da mesma maneira, eles podem ser utilizados como dois reservatórios térmicos dos quais se pode extrair trabalho. Neste problema, vamos investigar um processo isentrópico (a entropia constante) no qual dois buracos negros se unem formando outro e do qual pode ser extraída uma determinada quantidade de trabalho.

2.1 Reservatório Térmico

A função entropia proposta por Bekenstein para um buraco negro é uma função que depende do quadrado da massa do buraco

$$S_{BN} = 4\pi k \left(\frac{M}{m_p}\right)^2, \tag{1}$$

onde m_p é uma constante básica da natureza chamada de *massa de Planck*, e que pode ser obtida como função **somente** das constantes básicas $\hbar$ (constante de Planck reduzida), c (velocidade da luz no vácuo) e G (constante de Newton da Gravitação), e de nenhuma constante adimensional.

(a)[1,0] Determine m_p e seu valor numérico.

Admita um modelo no qual um buraco negro está situado dentro de uma caixa preenchida por radiação eletromagnética. As paredes da caixa são perfeitamente refletoras, isolando o mundo externo do interno, conservando assim a energia dentro da mesma. Considere que o buraco negro esteja em equilíbrio com esta radiação.

A energia total do sistema é

$$E_{tot} = Mc^2 + aVT^4, \tag{2}$$

onde o primeiro termo representa a energia do buraco negro e o segundo é a energia devida à radiação, com

$$a = \frac{\pi^2 k^4}{15 c^3 \hbar^3}. \tag{3}$$

V é o volume da caixa e T é a temperatura da radiação. Na eq. 3, k é a constante de Boltzmann.

(b)[0,8] Determine a temperatura T_{BN} do buraco negro e o raio de Schwarzschild $R_S = 2GM/c^2$ do mesmo, expresse R_S como função de T_{BN}.

A entropia total do sistema pode ser escrita como $S_{tot} = S_{BN} + S_{rad}$, onde S_{BN} é a entropia do buraco negro e S_{rad} é a entropia do campo de radiação. Esta última pode ser escrita como

$$S_{rad} = \frac{4}{3} aVT^3 \tag{4}$$

(c)[0,7] Escreva a entropia total do sistema campo de radiação + buraco negro como função da sua massa M e da massa total do sistema $M_{tot} = E_{tot}/c^2$, além de constantes básicas.

A condição de equilíbrio para a existência do Buraco Negro neste sistema é

$$\left(\frac{\partial S_{tot}}{\partial M}\right)_{V,E_{tot}} = 0 \tag{5}$$

(d)[1,5] Determine a equação que relaciona a massa M com o volume V na condição de equilíbrio. Qual deve ser a condição sobre o volume V para que esta condição possa ser satisfeita, i.e., a caixa pode ser muito grande (pequena)?

2.2 Processo de Carnot

Consideremos o ciclo de Carnot realizado por um sistema ilustrado pela Fig. 2, onde a substância de trabalho utilizada é a radiação. O sistema é constituído por dois buracos negros, um grande e um pequeno, imersos num campo de radiação frio e quente, respectivamente, de acordo com a Fig. 2.

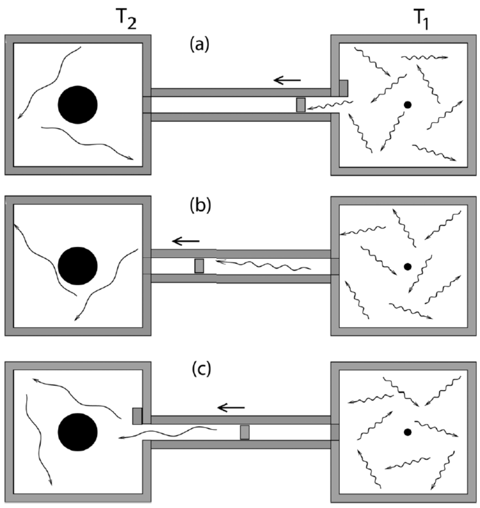

Figura 2: Ciclo de Carnot realizado por dois buracos negros em diferentes caixas ligadas por um pistão móvel. Os elementos no sistema são considerados ideais.

O processo consiste em quatro etapas:

1. O pistão é aberto no reservatório quente e se move para aumentar o volume da substância de trabalho até V_a.

2. O cilindro é isolado e a radiação se expande adiabaticamente.

3. O cilindro é aberto no reservatório frio e a radiação é trocada.

4. O pistão é carregado através do cilindro vazio até sua posição inicial.

(e)[1,0] Considerando que o cilindro que liga as duas caixas tem volume desprezível e que a pressão de radiação térmica é dada por

$$P_{rad} = \frac{1}{3}aT^4, \tag{6}$$

desenhe o gráfico do processo de Carnot descrito pela substância de trabalho num diagrama PV (pressão contra volume) e num diagrama ST (entropia contra temperatura).

(f)[0,8] Determine o trabalho total realizado em cada etapa do ciclo e o calor trocado.

(g)[0,5] Determine a eficiência do processo.

2.3 Extração de Energia

Na parte anterior foi considerado somente um ciclo, onde as propriedades de cada reservatório praticamente não mudam. No entanto, como a cada ciclo há uma mudança na energia em cada reservatório, suas propriedades mudam com o tempo.

(h)[0,5] Determine a relação entre o calor trocado e a perda, ou ganho, de massa nos processos 1 e 3 do ciclo descrito na seção anterior.

(i)[0,7] Determine a relação entre as massas obtidas no item anterior e as temperaturas de cada reservatório.

(j)[0,8] Mostre que as massas M_1 e M_2 dos reservatórios estão relacionadas com suas massas iniciais M_{10} e M_{20} através da relação

$$M_1^2 + M_2^2 = M_{10}^2 + M_{20}^2 \tag{7}$$

(k)[0,7] Mostre que, durante o processo, o reservatório quente perde massa e se torna mais quente enquanto o reservatório frio ganha massa e se torna mais frio, apesar de isso ser contra intuitivo.

(l)[1,0] Ao fim do processo, quando um dos buracos negros desaparecer, qual a quantidade total de trabalho extraída do sistema.

3 Anã Branca (10 pontos)

O Princípio da Exclusão de Pauli é responsável por inúmeras propriedades da matéria, tanto pelas que somos mais familiares, e.g. a dureza dos materiais sólidos, como por coisas um pouco mais estranhas, como o comportamento de anãs brancas, que são estrelas bastante densas. Neste problema você é desafiado a obter alguns resultados importantes no estudo dessas estrelas.

A matéria em anãs brancas consiste basicamente de elétrons e dos núcleos atômicos, cujos quais são basicamente carbono e oxigênio. Pelo fato de serem neutras a quantidade de prótons e elétrons é a mesma, além disso o número de prótons e nêutrons também é o mesmo devido à composição das estrelas.

Neste problema vamos investigar o equilíbrio das anãs brancas que se deve ao resultado tanto da interação gravitacional como da *repulsão estatística* sofrida pelos *férmions* (elétrons, prótons e nêutrons) que compõem a estrela.

3.1 Energia Cinética da Estrela

Neste problema vamos considerar que as partículas que compõe a estrela são não-relativísticas.

(a)[0,7] Para uma dada partícula de massa m (nêutron, próton ou elétron), escreva sua energia cinética ε como função de sua massa e do seu número de onda $k = 2\pi/\lambda$, além de constantes físicas fundamentais, se necessário.

Considere agora como modelo da estrela o modelo de uma caixa infinita, i.e. uma caixa cúbica de lado L da qual as partículas não podem escapar. Este modelo é análogo a uma corda presa nas extremidades.

Neste modelo, cada partícula só pode possuir valores discretos de número de onda k. O número de onda é dito *quantizado*, tanto da direção x, como nas direções y e z.

(b)[0,3] Determine a *condição de quantização* de k_x, k_y e k_z como função de números quânticos n_x, n_y e n_z para cada uma das direções. Explique o que significam estes números.

Como o elétron é a partícula que possui a menor massa, ele é o que mais contribui para a energia cinética total do sistema. Seja m_e a massa do elétron e m_p a massa dos prótons e nêutrons, consideradas idênticas neste problema.

(c)[0,5] Considerando que a massa total da estrela é M e que a massa dos elétrons é muito menor que a dos prótons (e nêutrons), determine o número de elétrons N contidos na estrela.

(d)[0,2] Determine a menor diferença Δk_i entre os possíveis valores de k_i ($i = x, y, z$).

É possível atribuir a cada elétron um cubo de lado Δk_i, calculado no item anterior, no espaço de número de onda. Isso significa que um elétron com número de onda $\vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}$, ocupa um cubo de lados Δk_i na posição $\vec{k}$, conforme a Fig. 3, que ilustra o caso paricular de duas dimensões (2D).

A Fig. 3 indica também o *momento de Fermi* k_F do sistema que é o momento do elétron mais energético.

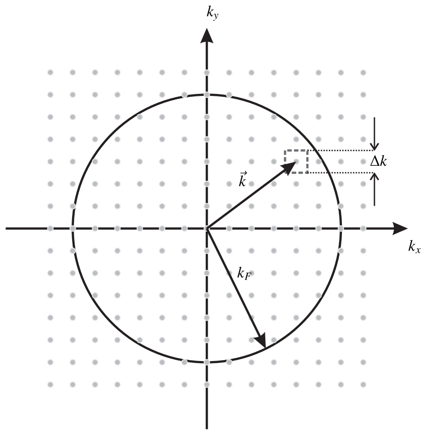

Figura 3: Representação do espaço de número de onda (momento) em duas dimensões. No esquema mostrado o quadrado indica a região que comporta dois elétrons devido ao Princípio da Exclusão de Pauli.

(e)[1,0] Supondo que todos os cubos sejam preenchidos partindo de zero até o momento de Fermi k_F com no máximo dois elétrons por cubo, determine o valor do momento de Fermi k_F do sistema como função da densidade $n = N/L^3 = N/V$ de elétrons no sistema. Considere que o comprimento L é muito grande. Leve em conta que somente valores positivos de k_i $(i = x, y, z)$ são permitidos.

(f)[1,5] Determine a energia cinética total dos elétrons no sistema como função do momento de Fermi e do número de elétrons na estrela.

(g)[1,0] Utilizando o resultado obtido no item anterior, escreva a energia cinética total dos componentes da estrela como função da massa total M e do raio R da mesma. Dica: Utilize o mesmo resultado obtido anteriormente, só que substitua o volume V pelo volume da estrela, agora considerada esférica.

3.2 Energia Potencial

Considere agora que a massa da estrela seja totalmente devida aos prótons e nêutrons. Neste caso, os elétrons não contribuem com o mecanismo de atração gravitacional que mantém a estrela *viva*.

(h)[1,5] Determine a energia potencial gravitacional total da estrela como função de sua massa M e de seu raio R.

(i)[0,8] Esboçe o gráfico da energia total da estrela como função de seu raio R.

(j)[0,5] Discuta qual dos mecanismos (gravidade ou repulsão estatística) é mais importante no caso em que o raio R da estrela é pequeno e quando R é grande.

(k)[0,5] Determine o raio r_0 de equilíbrio estável da estrela.

Suponha agora que de alguma maneira seja possível comprimir ligeiramente toda a massa da estrela e diminuir seu raio para $r_0 - \Delta r$, com $\Delta r/r_0 \ll 1$, mantendo a densidade uniforme.

(l)[1,5] O que irá acontecer com a estrela, ela irá colapsar, i.e. R diminuirá continuamente ou não? O raio apresentará um movimento harmônico? Com que frequência angular? Discuta.