2ª Prova de Seleção para a Olimpíada Internacional de Física 2013

Quarta-Feira, 27 de Março de 2013

Por favor, leia as instruções antes de iniciar a prova:

1. O tempo disponível para a prova é de 5 horas. O aluno só pode ausentar-se da sala após 90 minutos de prova.
2. Utilizar apenas caneta na solução dos problemas.
3. Apenas o lado da frente das folhas de papel fornecidas para resposta será considerado na solução. O verso poderá ser utilizado como rascunho.
4. Iniciar cada questão numa folha de resposta correspondente.
5. Se houver resultados numéricos, estes devem ser escritos com o número de algarismos significativos apropriado, conforme indicado no problema. Não se esqueça de indicar as unidades.
6. Escrever nas folhas de resposta **tudo** o que considerar relevante para a resolução da questão. Utilize o mínimo de texto possível, devendo exprimir-se, sobretudo com equações, números, figuras e gráficos.
7. Nas folhas de rascunho e nas folhas que você não quiser levar em consideração na correção, faça um grande X na sua face.

Nome:	
e-mail:	
Nº e tipo de Documento de Identificação:	
Nome da Escola:	
Cidade:	Estado:
Assinatura:	Telefone:

1 O Movimento de um Pião (10 pontos)

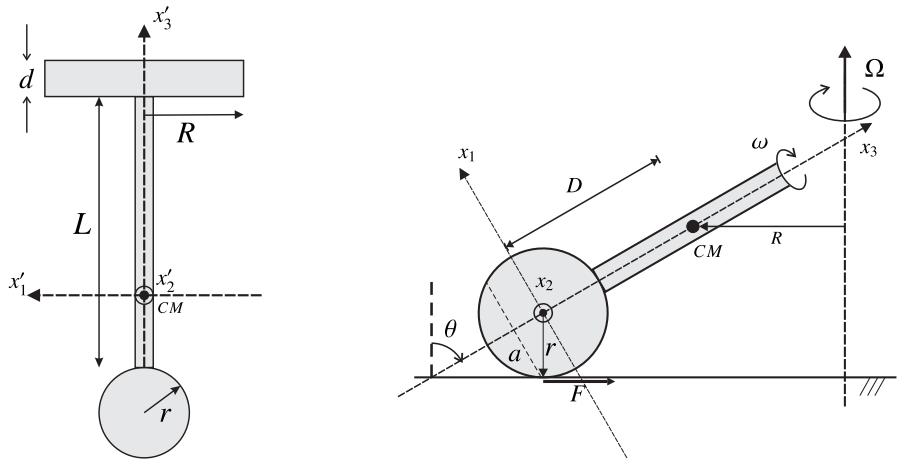
O aspecto mais fascinante dos piões é o fato de que eles podem *desafiar* temporariamente a gravidade movendo-se de um lado para o outro, e subindo e descendo até, eventualmente, cair. Além disso, se ele girar rápido o suficiente ele pode permanecer numa posição estacionária onde seu eixo de rotação fica na vertical.

Neste problema vamos investigar o modelo de um pião cuja ponta é arredondada e que apresenta um movimento de precessão em torno de um eixo fixo. No fim, investigamos um modelo grosseiro de rolamento no caso em que o atrito é levado em consideração.

1.1 Rolamento sem Atrito

Considere o pião mostrado na Fig. 1(a). Ele é composto por uma esfera de raio r em sua base, por um disco de raio R e espessura d e uma barra muito fina de comprimento L e área de seção transversal A. Cada elemento é soldado um sobre o outro, de acordo com a Fig. 1(a).

Considere que todo o pião é feito de um material cuja densidade é ρ.



(a) Diagrama do pião.

(b) Instantâneo do movimento de precessão do pião com o eixo principal x_2 saindo do plano da folha.

Figura 1: Movimento de precessão de um pião.

(a)[1,0] Determine a distância D do centro de massa (CM) do pião ao centro da esfera.

(b)[1,5] Determine os momentos de inércia I_1, I_2 e I_3 do pião em torno de seus eixos principais x_1', x_2' e x_3' indicados na Fig. 1(a) e que passam pelo CM do pião.

Considere a Fig. 1(b) que indica somente a esfera e todo o resto do pião é indicado como uma barra. O pião apresenta um movimento de precessão onde o CM gira em torno de um círculo de raio R. O ponto de contato entre a esfera e o solo gira em torno de um círculo de raio a, conforme a Fig. 1(b), onde as velocidades angulares de precessão também estão indicadas.

(c)[0,8] Considerando que o raio da esfera seja pequeno para que os eixos principais possam ser considerados aqueles mostrados na Fig. 1(b), determine a componente ω_3 do pião no eixo x_3 e o momento angular L_3 nesse mesmo eixo.

(d)[0,7] Determine a força de atrito F necessária para manter o movimento.

(e)[0,6] Escreva a equação de movimento do pião no eixo x_2.

(f)[0,6] Qual a condição entre ω e Ω para que haja rolamento puro?

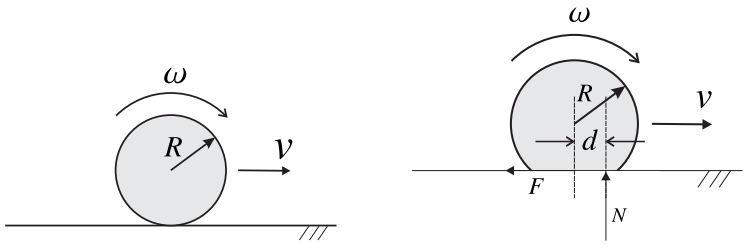
(g)[0,6] Qual a condição sobre ω para que o movimento seja possível.

(h)[1,0] Determine o valor da velocidade angular de precessão Ω como função do ângulo θ, da velocidade angular ω e das outras quantidades importantes no problema. Nota: Não é preciso substituir os resultados obtidos para os momentos de inércia I_1, I_2 e I_3, basta escrever o resultado como função deles.

(i)[1,5] Investigue o caso em que $\omega \gg \Omega$.

1.2 Rolamento com Atrito

Nesta parte do problema vamos fazer uma rápida visita ao problema do rolamento de um corpo quando se leva em consideração a força de atrito.



(a) Modelo clássico de um cilindro rolando se deslizar.

(b) Modelo "melhorado" de um cilindro girando sem atrito desprezível.

Figura 2: Análise do movimento de rotação de um cilindro submetido à ação da força de atrito.

(j)[0,2] De acordo com a Fig. 2(a), determine qual a condição de rolamento puro de um cilindro de raio R cujo CM se move com velocidade v e cuja velocidade angular em torno do CM é ω.

Quando uma força de atrito F atua sobre o cilindro, para a Fig. 2(a), ela tende a modificar tanto a velocidade do CM como a velocidade angular do cilindro.

(k)[0,5] Indique na Fig. 2(a) onde atua a força de atrito e mostre que se o torque desta força for levado em consideração isso se torna imcompatível com a condição de rolamento puro obtida em (j).

Para contornar o problema do item anterior pode-se adotar o esquema mostrado na Fig. 2(b), onde a força normal sobre o cilindro apresenta um deslocamento vertical com relação a seu CM.

(l)[0,5] A que distância d deve estar a força normal N, com relação ao CM, para que a condição de rolamento puro seja satisfeita?

(m)[0,5] Qual deve ser o menor valor do coeficiente de atrito estático μ para que o movimento ocorra?

2 Levitação Diamagnética (10 pontos)

Contrarimente à nossa intuição substâncias aparentemente não-magnéticas podem levitar na presença de campos magnéticos. A maioria das substâncias são fracamente diamagnéticas e as pequenas forças associadas a elas torna a levitação possível. Criaturas vivas consistem basicamente de moléculas diamagnéticas (como água e proteínas) e podem ser levitadas ou sentir pequenas gravidades.

Figura 3: *Sapo diamagnético* levitando devido à presença de um campo magnético.

Foi através dessa constatação que os Físicos *Andre Geim* e *Michael Berry* puseram um sapo para levitar, como mostra a Fig. 3. Eles ganharam o Ig Nobel, um prêmio que é dado a pessoas que obtém realizações científicas que fazem as pessoas **rirem** e depois **pensarem** sobre ciência. Um fato curioso é que o Físico *Andre Geim* recebeu o prêmio Nobel de Física em 2010 por seu trabalho com *grafeno*, uma folha perfeitamente bidimensional e estável formada por átomos de carbono.

2.1 Energia

Seja dado um solenóide vertical como mostrado na Fig. 4. O campo magnético na posição $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ é $\vec{B}(\vec{r})$ com módulo dado por $B(\vec{r}) = |\vec{B}(\vec{r})|$, e a aceleração gravitacional é g.

O objeto a ser levitado possui massa M e volume V (densidade $\rho = M/V$) e susceptibilidade χ.

O momento magnético $\vec{m}(\vec{r})$ de um corpo submetido a um campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$ pode ser dada pela expressão

$$\vec{m}(\vec{r}) = \frac{\chi V \vec{B}(\vec{r})}{\mu_0} \tag{1}$$

onde μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo e χ sua susceptibilidade magnética.

(a)[1,0] Qual o sinal da susceptibilidade de um corpo diamagnético?

Suponha que o campo magnético sobre o corpo seja aumentado lentamente de zero a $\vec{B}(\vec{r})$.

(b)[1,5] Determine o trabalho realizado sobre o corpo para que este adquira um momento magnético $d\vec{m}$, como função do campo $\vec{B}(\vec{r})$ ao qual ele está submetido.

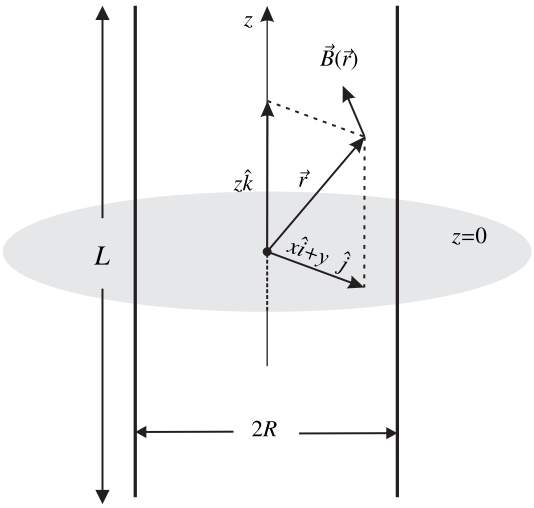


Figura 4: Solenóide no qual é introduzido um objeto diamagnético para ser levitado.

(c)[1,5] Levando em conta a energia potencial gravitacional mgz escreva a expressão para a energia total do corpo.

(d)[1,0] Determine a força resultante sobre o corpo como função dos dados do problema e de $\vec{\nabla}\vec{B}(\vec{r})$.

(e)[1,0] Supondo que o campo magnético só dependa de z, i.e. $\vec{B}(\vec{r}) = B_z(z)\hat{k}$, determine qual a condição sobre $B(z)B'(z)$ para que o corpo permaneça em equilíbrio.

2.2 Condições de Estabilidade

O teorema de Earnshaw diz que diz que não é possível para uma partícula permanecer em equilíbrio estável devido somente à ação de forças do tipo inverso do quadrado da distância $\sim 1/r^2$. O mesmo resultado é válido para magnetos permanentes (ferromagnéticos) e corpos paramagnéticos, mas isso não é verdade para corpos diamagnéticos.

Suponha que numa região de campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$ seja colocado um corpo magnético cujo momento magnético seja dado por $\vec{\mu} = \eta\vec{B}(\vec{r})$.

(f)[0,8] Partindo da expressão para a energia de interação entre o magneto e o campo magnético, determine qual a condição sobre $\nabla^2\vec{B}^2(\vec{r})$ como função de η para que o corpo permaneça em equilíbrio estável na posição $\vec{r}$.

(g)[0,6] Qual é a condição sobre $\partial_j^2\vec{B}^2(\vec{r})$ $(j = x, y, z)$ para que ocorra estabilidade na direção vertical? E na horizontal? Escreva sua resposta como função de η.

Levando em conta a simetria cilíndrica do solenóide é possível obter relações entre as derivadas do campo magnético tanto na direção radial $\hat{r}$ como na vertical $\hat{k}$.

Suponha que o campo seja dado por

$$B_z = B_0 + B_1 z + \tfrac{1}{2}B_2 z^2 - \tfrac{1}{4}B_2 r^2 + \cdots$$
$$B_r = -\tfrac{1}{2}B_1 r - \tfrac{1}{2}B_2 r z + \cdots \tag{2}$$

onde

$$B_1 = \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad \text{e} \quad B_2 = \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \tag{3}$$

com as derivadas tomadas no ponto onde o corpo está levitando.

(h)[2,0] Verifique se a equação $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ é satisfeita com os termos dados. Nota: Lembre-se que deve ser levada em consideração a simetria cilíndrica.

(i)[0,6] Reescreva as condições de equilíbrio tanto na vertical como na horizontal como função de B_0, B_1 e B_2 somente. Neste item, leve em conta que o corpo possui massa m e momento magnético $\vec{m} = \chi V \vec{B}/\mu_0$. A gravidade local é g.

3 O Bétatron (10 pontos)

Um bétatron é um equipamento que pode ser utilizado para acelerar partículas carregadas a altas velocidades através da aplicação de um campo magnético variável. Neste problema iremos investigar a aceleração de elétrons *ultrarelativísticos*, em que sua velocidade se aproxima da velocidade da luz no vácuo c, sob a ação de um campo magnético.

O bétatron permite que os elétrons sejam acelerados numa órbita circular de raio R constante variando apenas o fluxo do campo magnético no círculo descrito pelo elétron. Um esquema do funcionamento deste equipamento é mostrado na Fig. 5.

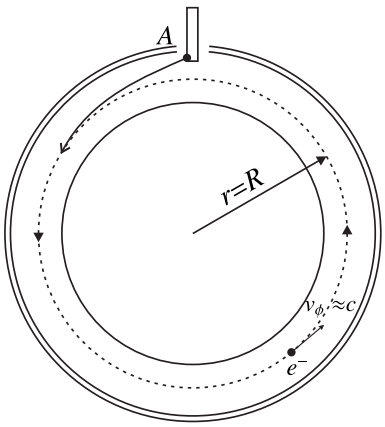


Figura 5: Um dos possíveis esquemas de funcionamento de um Bétatron. No ponto A elétrons são ejetados de um filamento e passam a percorrer uma órbita de raio R. À medida que o fluxo magnético varia no círculo de raio R a velocidade do elétron aumenta.

3.1 Velocidade Máxima do Elétron

Suponha, salvo menção contrária, que os elétrons tratados são ultrarelativísticos, i.e. sua velocidade é próxima da velocidade da luz no vácuo c. Considere a Fig. 6 que mostra o movimento do elétron no bétatron.

(a)[1,2] Determine o fator de Lorentz $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ do elétron como função do raio R da órbita do elétron e do campo magnético B_z perpendicular ao plano da órbita do mesmo e na posição $r = R$, onde o raio r é medido com relação ao centro da órbita do elétron. Se necessário utilize constantes básicas da natureza como a carga $-e$ e a massa m_e do elétron e a velocidade da luz no vácuo c.

(b)[0,8] Determine o campo elétrico E_ϕ tangente à órbita do elétron como função de constantes básicas e da variação temporal

$$\dot{\bar{B}}_z = \frac{d}{dt}\bar{B}_z = \frac{1}{\pi R^2}\frac{d}{dt}\int_0^R B_z(r')2\pi r' dr' \tag{4}$$

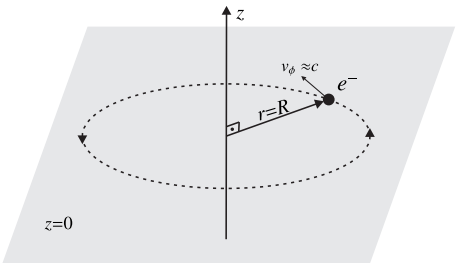


Figura 6: Ilustração do movimento do elétron num bétatron. Na figura é dado o sistema de coordenadas utilizado no problema.

do campo magnético médio medido no círculo da órbita do elétron, além do raio R da órbita do mesmo.

(c)[0,8] Determine qual deve ser a relação entre o campo magnético B_z na órbita do elétron e o valor médio $\bar{B}_z$ no círculo descrito pelo elétron.

(d)[0,5] Como exemplo, mostre que se o campo for dado por

$$B_z(r) = B_0 \left(1 - \frac{2}{3}\frac{r^2}{R^2}\right), \tag{5}$$

ele irá satisfazer a condição obtida no item anterior.

Suponha que durante a aceleração o elétron irradie energia de acordo com a fórmula de Larmor

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{e^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \tag{6}$$

onde a é a aceleração sofrida pelo elétron no seu referencial de repouso.

A potência emitida não muda quando se observa no referencial do laboratório, no entanto a aceleração sofrida pelo elétron muda.

(e)[1,0] Determine a aceleração a_L sofrida pelo elétron com relação ao referencial do laboratório se a aceleração do mesmo no seu referencial de repouso é a. Escreva a_L como função de a e γ.

(f)[0,7] Determine qual deve ser o maior valor de γ obtido pelo elétron durante a aceleração. Escreva sua resposta como da variação temporal $\dot{\bar{B}}_z$ do campo médio no círculo da órbita do elétron, do campo magnético B_z na órbita do elétron, do raio R de sua órbita e de constantes fundamentais.

3.2 Condição de Estabilidade

Vamos agora desconsiderar que o elétron irradie energia durante o movimento de aceleração no bétatron. No que se segue considere que ainda estamos lidando com elétrons ultrarelativísticos.

Vamos investigar como o elétron irá se mover se ele for levemente deslocado de sua órbita (posição) de equilíbrio quando os deslocamentos forem na direção z ou na direção radial. Considere que só há deslocamento numa das direções por vez,

e.g. quando ela for deslocada na radial ela permanece na mesma posição $z = 0$ no eixo z.

Considere que o campo magnético ao qual o elétron está submetido possa ser escrito como

$$B_0(t) = B_z(R, 0, t). \tag{7}$$

Defina também o índice do gradiente do campo magnético n como

$$n = -\frac{R}{B_0(t)} \frac{\partial B_z(R, 0, t)}{\partial r} \tag{8}$$

que indica a variação da componente z do campo magnético que atua sobre o elétron.

(g)[1,0] Escreva a equação de movimento radial do elétron como função de $B_0(t)$, de $\partial B_0(t)/\partial r$ e de constantes fundamentais.

Seja $x \equiv r - R \ll R$ o deslocamento do elétron na direção radial, com relação à sua posição de equilíbrio.

(h)[0,8] Determine a equação de movimento de x como função da frequência angular $\omega_0^2 = c/R$ do elétron, de B_0, do raio R de sua órbita original e de $\partial B_0(t)/\partial r$.

(i)[0,4] Qual é a condição sobre o índice n para que a órbita seja estável?

Suponha agora que o elétron seja levemente deslocado na direção z mantendo o mesmo raio R de sua órbita.

(j)[1,0] Escreva a equação de movimento para z como função de $B_0(t)$ e de $B_r(R, z, t)$, além de constantes fundamentais.

(k)[0,4] Sabendo que em coordenadas cilíndricas

$$\nabla \times \vec{B} = \hat{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z}\right) + \hat{\phi}\left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right) + \hat{\phi}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rB_\phi) - \frac{\partial B_r}{\partial \phi}\right] \tag{9}$$

se anula no plano da órbita do elétron, mostre que

$$B_r(R, z, t) = \int_0^z \frac{\partial B_z(R, z', t)}{\partial r} dz' \approx z\frac{\partial B_z(R, 0, t)}{\partial r} \tag{10}$$

(l)[0,4] Reescreva o resultado do item (j) e determine qual a condição sobre o índice n para que a órbita seja estável.

(m)[1,0] Determine o período dos movimentos tanto na direção radial como na direção vertical como função de n e ω_0. Mostre que este período é sempre maior que o período orbital do elétron no bétatron. Determine ainda qual a condição sobre n para que ambos os movimentos (direção z e radial) possuam o mesmo período.