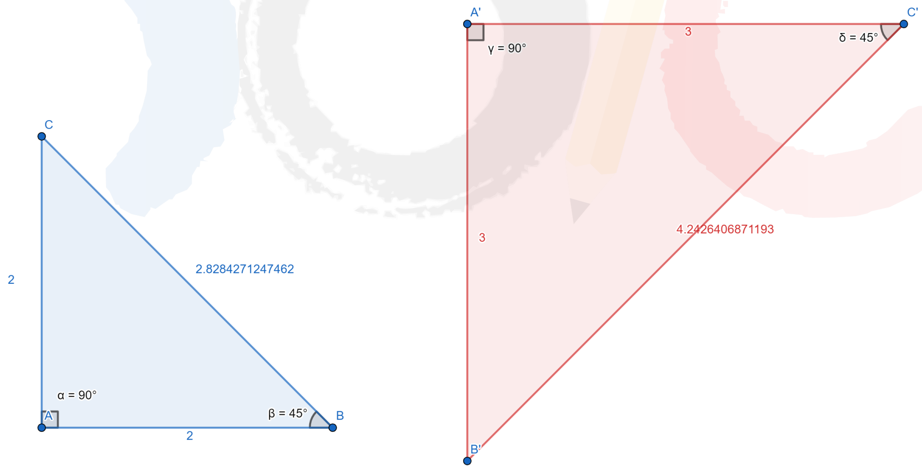
Semelhança e Congruência de Triângulos

Andressa Farias, Luiza Lanza, Maria Luisa Berbert, Gustavo Linhares e Fernando Anjos

1 Semelhança de Triângulos

Uma ferramenta extremamente útil para questões não só da OBMEP, mas também para aquelas mais sofisticadas é a semelhança de triângulos. Define-se que dois triângulos são semelhantes se, e somente se, tiverem seus ângulos iguais e uma proporção - chamada de razão de semelhança - entre seus lados ordenamente, ou seja, obedecendo a ordem. Veja os exemplos abaixo.



Perceba que os ângulos são ordenamente congruentes e os lados correspondentes são proporcionais. A forma mais simples de achar os lados proporcionais é identificando os ângulos iguais nos dois triângulos, os lados que se opõem a esses ângulos são homólogos, ou seja, correspondentes.

Para indicar que dois triângulos são semelhantes, utilizamos o símbolo $\sim$, no exemplo acima, dizemos que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

A razão entre os lados proporcionais de um triângulo é chamada de razão de semelhança.

$$k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

k é a constante de proporcionalidade.

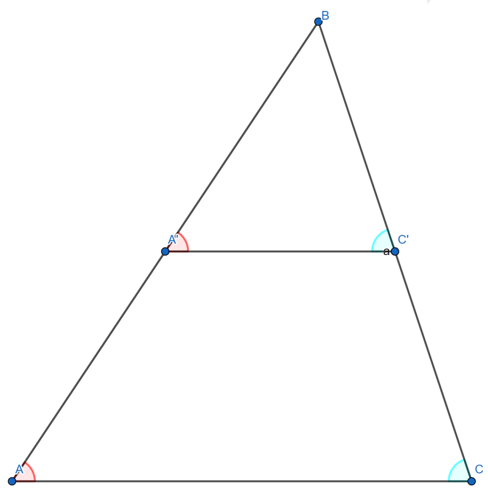
É válido ressaltar que a congruência de triângulos é apenas um caso particular da semelhança de triângulos, no qual $k = 1$. Em vista disso, pode-se afirmar que todo par de triângulos congruente também é semelhante e, portanto, todos os casos de congruência que serão abordados posteriormente também adequam-se como casos de semelhança. Ademais, o caso que não se aplica para a congruência, mas se aplica para semelhança é o chamado Ângulo-Ângulo (ÂÂ).

Definição 1. *O caso de semelhança Ângulo-Ângulo acontece quando dois triângulos, postos em diferentes domínios espaciais, possuem três ângulos congruentes dois a dois. Desse modo, afirma-se que esses dois triângulos são semelhantes.*

Teorema 1. Toda reta paralela ao lado de um triângulo forma com os outros dois lados um novo triângulo semelhante ao primeiro.

Demonstração:

Veja a figura abaixo

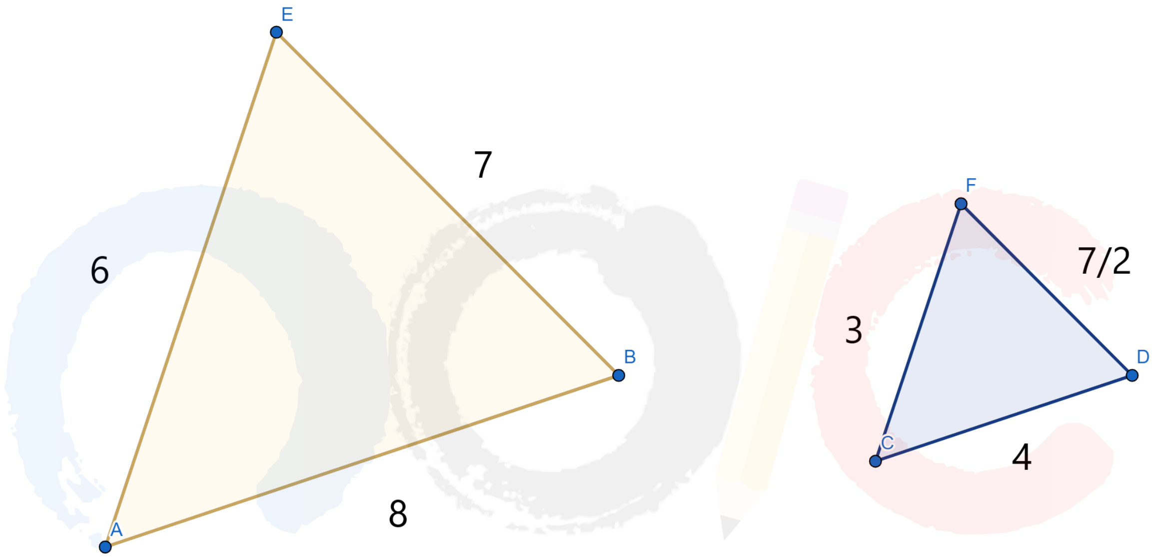


Por palarelismo (2 retas paralelas cortadas por tranversais), os ângulos $\angle BA'C'$ e $\angle BAC$ são correspondentes, e, portanto, congruentes. Analogamente, $\angle BC'A' \equiv \angle BCA$. Pelo caso Ângulo-Ângulo, os triângulos ABC e A'BC' são semelhantes.

Embora menos usuais, há ainda dois casos de semelhança de triângulos:

Definição 2. *Se, em dois triângulos, todos os lados correspondentes mantêm a mesma proporção entre suas medidas, esses triângulos são semelhantes.*

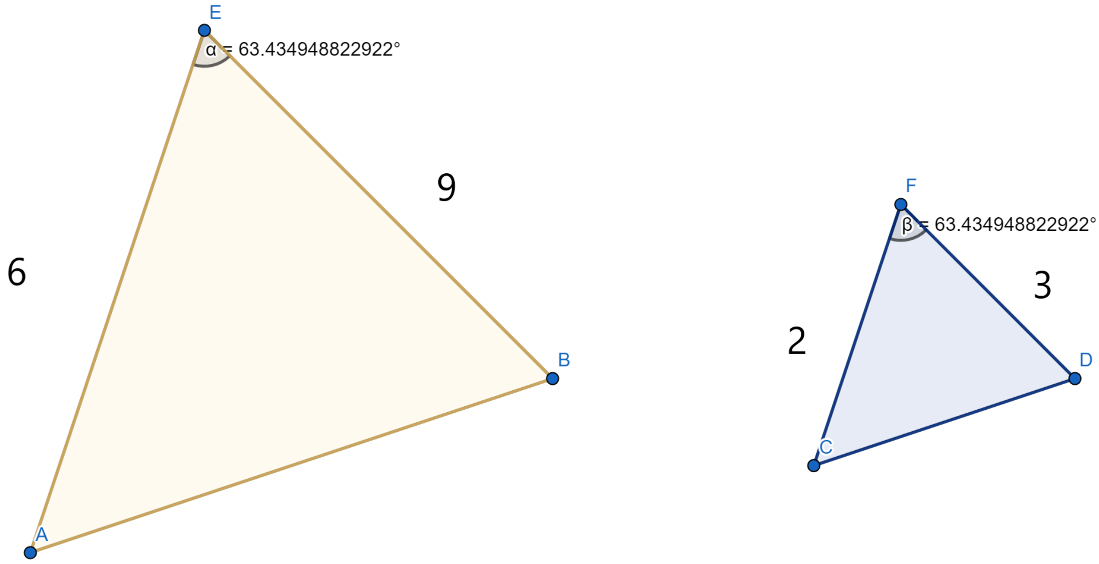
Veja o exemplo a seguir:



$$\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CF} = \frac{BE}{DF} = 2 \Longrightarrow \triangle ABE \sim \triangle CDF$$

Definição 3. *Se, em dois triângulos, dois dos lados correspondentes mantêm a mesma proporção entre suas medidas e os ângulos entre esses lados são congruentes, esses triângulos são semelhantes.*

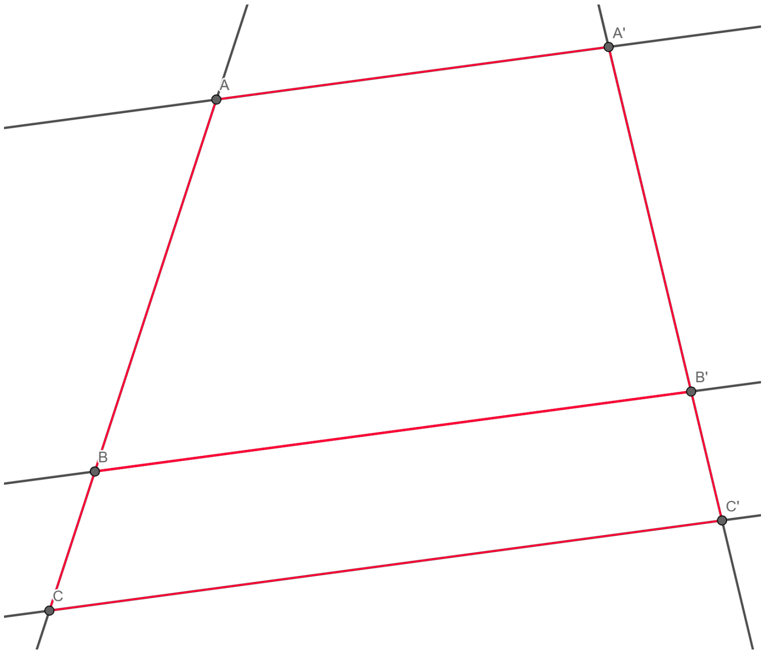
Veja o exemplo a seguir:



$\angle AEB \cong \angle CFD$, bem como $\frac{AE}{CF} = \frac{BE}{FD} = 3 \Longrightarrow \triangle ABE \sim \triangle CDF$

TEOREMA DE TALES

Teorema 2. O chamado Teorema de Tales determina que, em um conjunto de retas paralelas cortadas por duas transversais, há uma proporcionalidade. Veja o exemplo a seguir.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

2 Congruência de Triângulos

Entende-se por congruência entre triângulos o caso particular em que a razão de semelhança é igual a 1. Isto é, além de possuírem ângulos congruentes, seus lados também são congruentes. Em outras palavras, isso acontece porque os triângulos são ”iguais”, já que as transformações de transformações de rotação, translação e reflexão não alteram as medidas de comprimento, ângulo e área da figura.

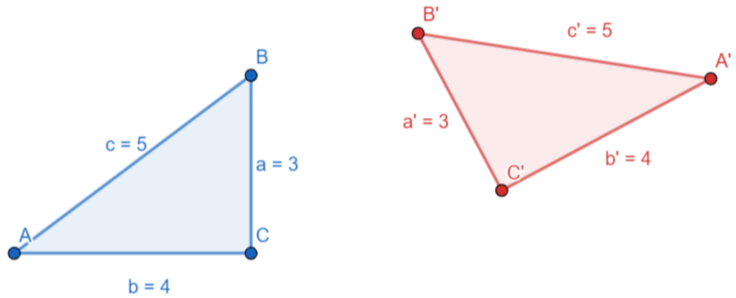
Os triângulos são a única figura geométrica que possuem uma propriedade chamada ”rigidez”, isto é:

Definição 4. *Dadas três medidas de lado é possível formar um, e somente um triângulo.*

A partir disto, deduzimos o primeiro caso de semelhança:

Teorema 3. Dados dois triângulos com as medidas dos 3 lados iguais, esses triângulos são congruentes entre si.

Exemplo:



Como já foi dito, o caso $(\hat{A}\hat{A})$ não se aplica para congruência, mas os casos que envolvem congruência de um dos triângulos sempre se aplicam para semelhança e congruência. Isso porque, para garantir que dois triângulos são congruentes, devemos garantir que:

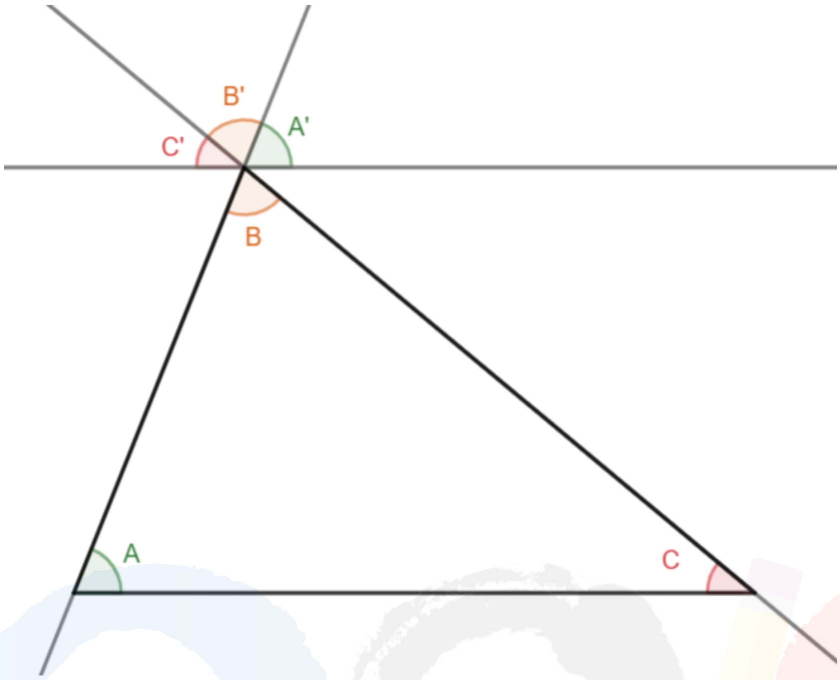
1º: Os triângulos são semelhantes isto é, que um é triângulo é a transformação geométrica do outro dada por rotação, translação e/ou ampliação do triângulo. Ou seja, devemos garantir que *todos os ângulos dos dois triângulos são congruentes entre si dois a dois.*

2º: a amplicação do triângulo com relação ao original é $k = 1$: basta garantir que um lado é congruente ao correspondente do outro triângulo, pois se um triângulo é semelhante a ampliação é constante para todas as dimensões. Logo, se garantimos que dois lados correspondentes são iguais, a ampliação do triângulo em relação ao original é 1, logo eles são congruentes.

Para provar os casos de congruência, é importante relembrar uma propriedade dos triângulos:

Teorema 4. A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°

Demonstração: Dado um triângulo qualquer, seja traçada um reta paralela a uma das bases do triângulo, que passa pelo vértice oposto a esse lado. Pelo teorema das retas paralelas cortadas por uma transversal, temos que $A \equiv A'$ e $C \equiv C'$; $B \equiv B'$ (opostos pelo vértice). Logo, como $A' + B' + C' = 180°$, pois estão contidos numa mesma reta, $A + B + C = 180°$.

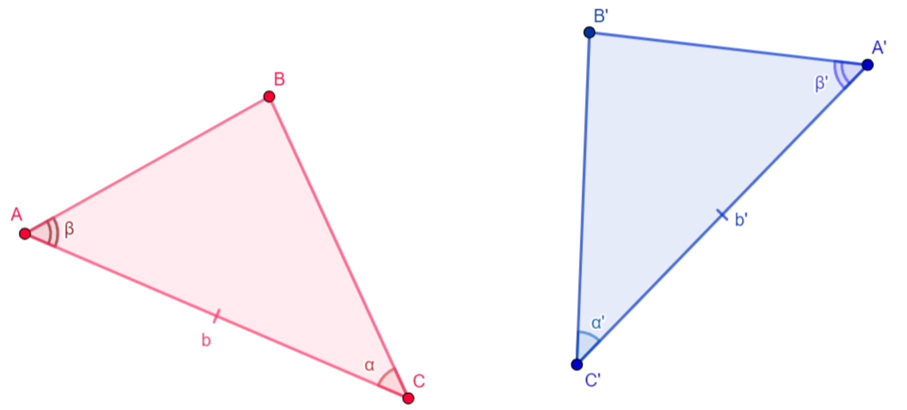


Dito isso, dados 2 ângulos de um triângulo, o 3 ângulo está determinado, pois a soma dos 3 ângulos internos é 180°. Dessa forma, estabelecemos mais uma relação de congruência:

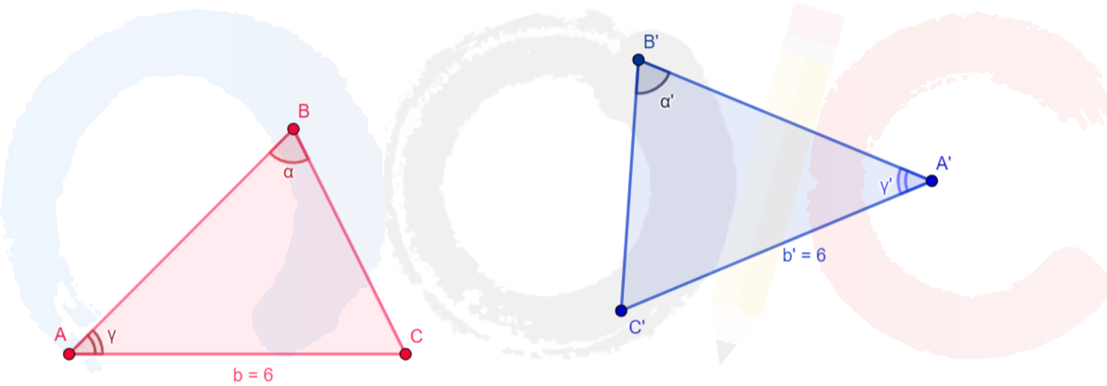
Teorema 5. Dados dois triângulos com 2 ângulos congruentes e um **lado correspondente** congruente, esses triângulos são congruentes.

Pelos motivos citados, se dois triângulos tem dois ângulos congruentes o terceiro é congruente, e se um lado correspondente é congruente $k = 1$. Esse caso de congruência pode ser subdividido em 2 casos:

1º) Ângulo-Lado-Ângulo (ALA): Nesta ordem, um ângulo, o lado adjacente e o outro ângulo adjacente à este lado são congruentes.

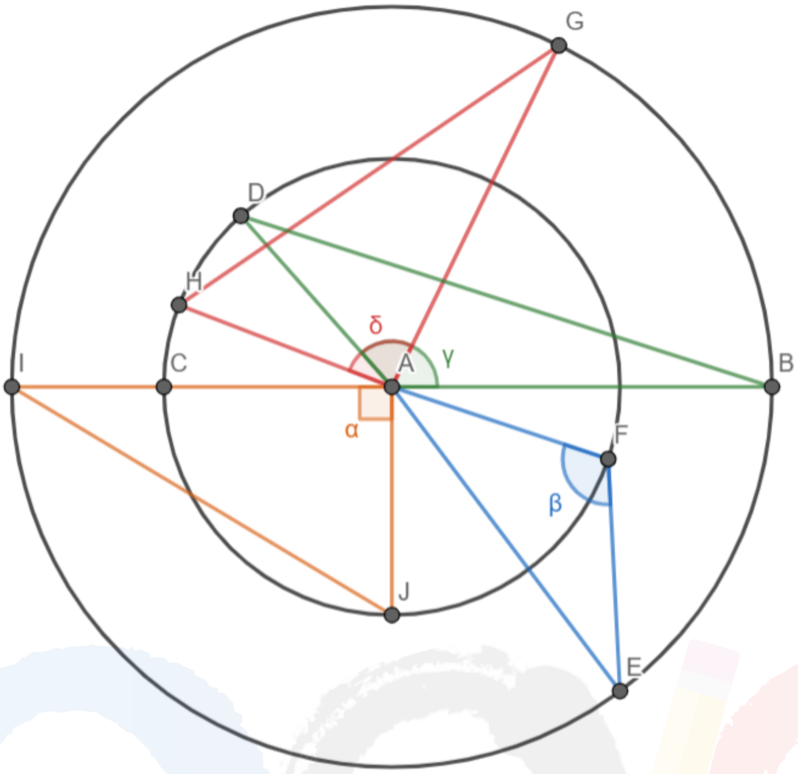


2º) Ângulo-Ângulo Oposto (LAAo): Nesta ordem, um lado, um ângulo adjacente à ele e o ângulo oposto ao lado são congruentes.



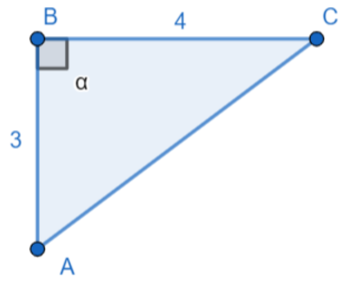
Por fim, proponho um exercício ao leitor: dado a medida de dois lados, quantos triângulos é possível construir com essas medidas?

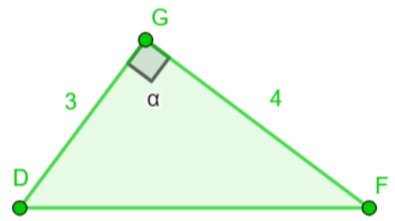
A resposta é: infinitos triângulos! Para observar isso, podemos traçar dois círculos concêntricos de raios iguais às medidas dos lados dadas. Dessa forma, podemos traçar infinitos raios que, se não estiverem sobre uma mesma reta, formam um triângulo com um terceiro segmento que une os dois lados. Assim, perceba que a abertura do ângulo correpondente, ou seja, o ângulo que o arco de circunferência enxerga, determina a medida do 3º lado.



Por outro lado, se o ângulo entre esses dois lado é rígido, há apenas uma medida possível para o 3º lado do triângulo, pois a abertura do ângulo oposto determina a medida do lado. Dessa forma, concluímos que dados a medida de dois lados de um triângulo e um ângulo entre eles, há somente um triângulo formado com esses medidas. O quarto e último caso de congruência é, portanto:

Teorema 6. Lado-ângulo-lado: dados dois triângulos com dois lados congruentes e o ângulo entre esses lados também congruentes, os triângulos são congruentes entre si.





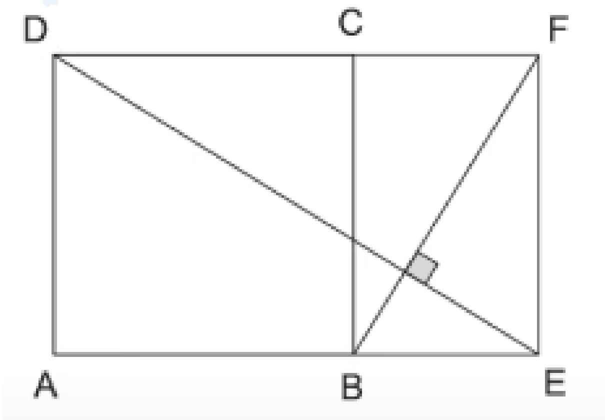
Observação:

Teorema 7. Em um triângulo, o maior lado está sempre oposto ao maior ângulo, o segundo maior lado está oposto ao segundo maior ângulo e o menor lado está oposto ao menor ângulo.

3 Exercícios:

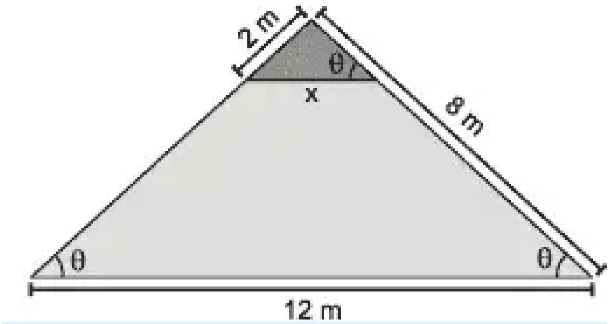
1. [OBMEP 2011 - N3]

Na figura, AEFD é um retângulo, ABCD é um quadrado cujo lado mede 1 cm e os segmentos BF e DE são perpendiculares. Qual é a medida, em centímetros, do segmento AE?

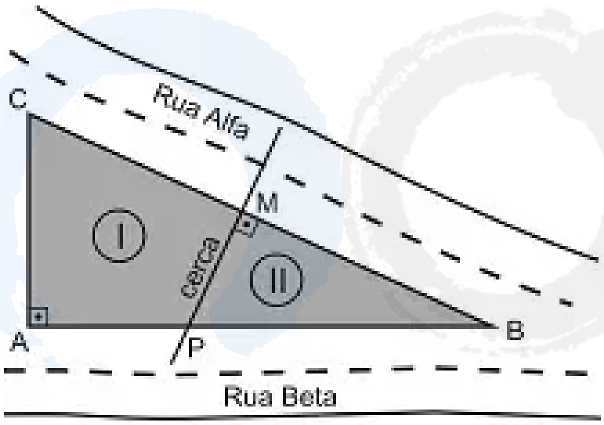


2. [PUC-RS] Considere a imagem abaixo, que representa o fundo de uma piscina em forma de triângulo com a parte mais profunda destacada. O valor em

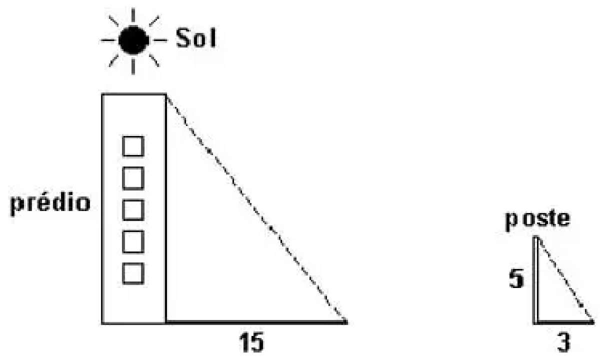
metros da medida ”x”é:



3. [Epcar] Um terreno com formato de um triângulo retângulo será dividido em dois lotes por uma cerca feita na mediatriz da hipotenusa, conforme mostra figura. Sabe-se que os lados AB e BC desse terreno medem, respectivamente, 80 m e 100 m. Assim, a razão entre o perímetro do lote I e o perímetro do lote II, nessa ordem, é:

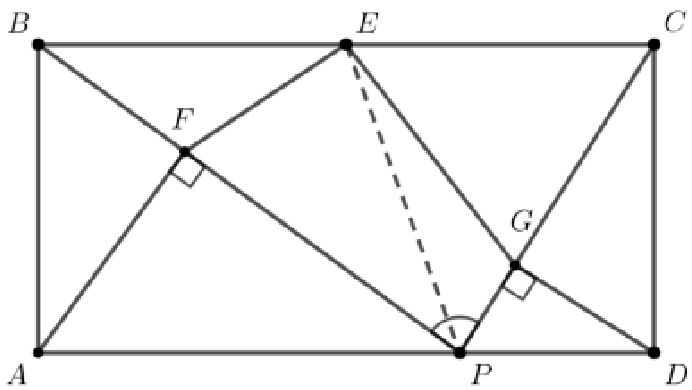


4. [Unesp] A sombra de um prédio, em um terreno plano, em uma determinada hora do dia, mede 15 m. Nesse mesmo instante, próximo ao prédio, a sombra de um poste de altura 5 m mede 3 m. A altura do prédio, em metros, é:



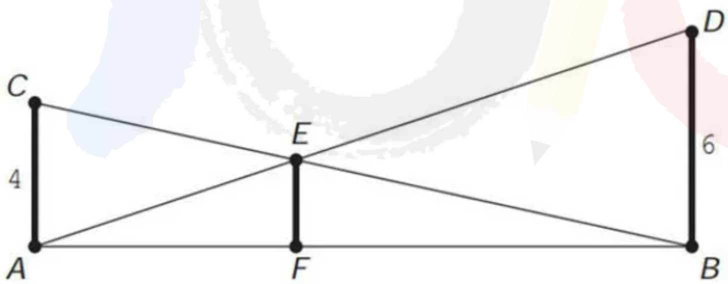
5. [Banco de Questões OBMEP 2022] Juca é um escoteiro que está explorando as proximidades do seu acampamento. Após coletar frutas e madeira, ele deve pegar água no rio e voltar para sua barraca. Vamos representar, na figura, Juca pela letra J, o rio pela letra r e sua barraca pela letra B. Adistância dos pés das perpendiculares C e E, em r dos pontos J e B é 180m. Qual a menor distância que Juca pode percorrer para voltar para sua barraca, passando pelo rio?

6. Seja ABCD um retângulo com BC = 2 · AB. Seja E o ponto médio de BC e P um ponto arbitrário interno ao lado AD. Sejam F e G os pés das perpendiculares desenhadas de A a BP e de D a CP. Sabemos que $\angle BPC = 85°$.

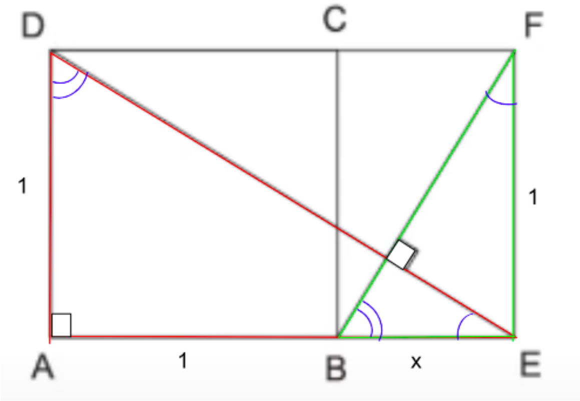


a) Verifique que os triângulos BEF e BEP são semelhantes.
b) Determine o valor da soma dos ângulos $\angle BEF + \angle CEG$.

7.[ENEM] O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.



4 Gabarito

1. 

Triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle BEF$ são congruentes. Portanto, para resolver a questão utilizaremos a razão de semelhança entre os lados proporcionais dos triângulos, onde AB e EF são equivalentes a 1.

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x+1}$$
$$(x+1) * x = 1 * 1$$
$$x^2 + x = 1$$
$$x^2 + x - 1 = 0$$

Percebe-se que encontramos uma equação do segundo grau, logo utilizaremos Bhaskara.

$$A = 1; \;\; B = 1; \;\; C = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

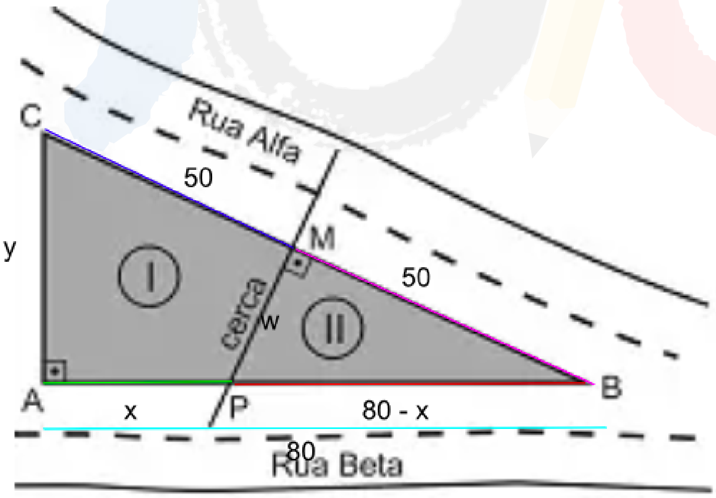
$$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

2. A primeira observação feita é que o triângulo maior é isósceles, já que dois dos ángulos dos triângulo são iguais. Também percebe-se que o triângulo maior e menor são semelhantes já que ambos possuem os mesmos ângulos. Portanto, para encontrar x podemos utilizar a razão entre os lados dos triângulos semelhantes.

$$\frac{AB}{A'B} = \frac{BC}{B'C}$$
$$\frac{2}{8} = \frac{X}{12}$$
$$12 * 2 = X * 8$$
$$24 = X * 8$$
$$\frac{24}{8} = X$$
$$3 = X$$

3. Para encontrar a razão entre os lotes I e II é necessário encontrar e somar todos os lados de cada lote e depois dividir o perímetro do lote I pelo do lote II. Em virtude disso, primeiro encontraremos o lado y, utilizando o Teorema de



Pitágoras.

$$100^2 = 80^2 + y^2$$
$$100^2 - 80^2 = y^2$$

$$10000 - 6400 = y^2$$
$$3600 = y^2$$
$$\sqrt{3600} = y$$
$$60 = y$$

Agora, encontraremos o lado x utilizando razão entre os lados dos lotes I e II.

$$\frac{80 - x}{100} = \frac{50}{80}$$
$$80 - x = \frac{5}{8} * 100$$
$$80 - x = \frac{125}{2}$$
$$x = 80 - \frac{125}{2}$$
$$x = \frac{35}{2}$$

Logo, só resta calcular o valor de w e calcular os perímetros dos lotes.

$$\frac{w}{60} = \frac{50}{80}$$
$$w = \frac{50}{80} * 60$$
$$w = \frac{75}{2}$$

$$P_{Lote1} = \frac{35}{2} + \frac{75}{2} + 60 + 50$$
$$P_{Lote1} = \frac{110}{2} + 110$$
$$P_{Lote1} = 165$$

$$P_{Lote2} = (80 - \frac{35}{2}) + \frac{75}{2} + 50$$
$$P_{Lote2} = \frac{125}{2} + \frac{75}{2} + 50$$

$$P_{Lote2} = \frac{200}{2} + 50$$
$$P_{Lote2} = 150$$

Depois de calcular os perímetros pode-se encontrar a razão dos perímetros dividindo o perímetro do lote I pelo do lote II.

$$\frac{165}{150} = \frac{33}{30} = \frac{11}{10}$$

4. Percebe-se que ambos os triângulos são semelhantes já que possuem lados proporcionais uns aos outros. Em virtude disso, pode-se encontrar a altura do prédio encontrando a razão entre o prédio e o poste.

$$\frac{AB}{A'B} = \frac{BC}{B'C}$$
$$\frac{15}{3} = \frac{X}{5}$$
$$15 * 5 = X * 3$$
$$75 = X * 3$$
$$\frac{75}{3} = X$$
$$25 = X$$

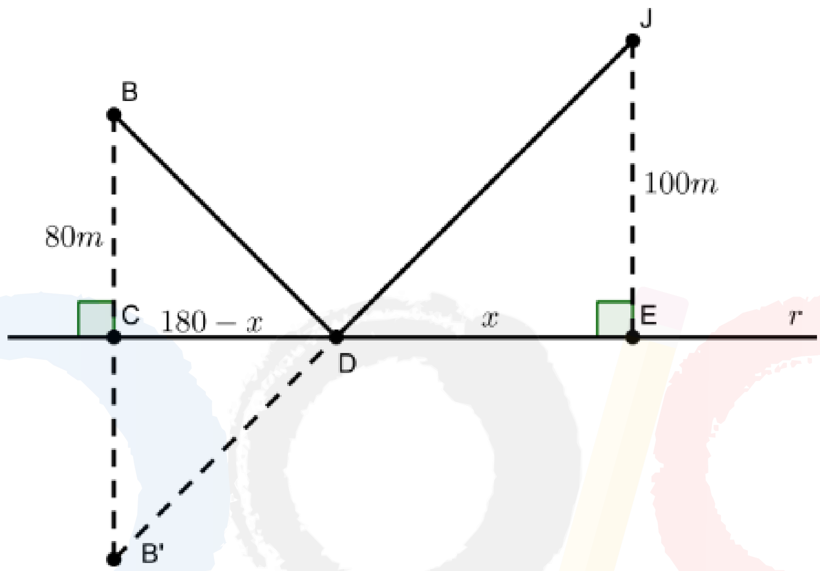
5. Vamos marcar o ponto B', simétrico do ponto B, em relação à reta r. O ponto B' também dista 80m da reta r e, com isso, temos os triângulos congruentes $\triangle BCD$ e $\triangle B'CD$ (Lado-ângulo-lado), sendo D o ponto que Juca pegará água no rio. Como a menor distância entre J e B' é o comprimento de um segmento de reta unindo esses dois pontos, J, D e B' devem estar alinhados. Seja x a medida do segmento $\overline{DE}$, vamos aplicar a razão de semelhança nos triângulos $\triangle BCD$ e $\triangle JED$:

$$\frac{180 - x}{80} = \frac{x}{100}$$
$$\frac{180 - x}{4} = \frac{x}{5}$$
$$4x = 900 - 5x$$
$$9x = 900$$

$$x = 100m$$

Aplicando agora o Teorema de Pitágoras nos triângulos $\triangle BCD$ e $\triangle JED$ podemos encontrar a menor distância entre J e B, passando por r:

$$JD + DB = \sqrt{100^2 + 100^2} + \sqrt{80^2 + 80^2}$$
$$= 100\sqrt{2} + 80\sqrt{2}$$
$$= 180\sqrt{2}$$

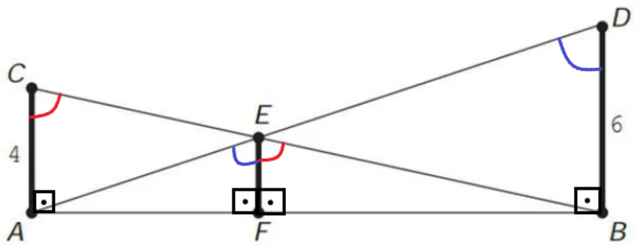


6. a) Em virtude das relações métricas nos triângulos retângulos aplicadas ao triângulo ABP, temos
$$BE^2 = AB^2 = BF ů BP$$
Portanto,
$$\frac{BE}{BP} = \frac{BF}{BE}$$
Dada a relação de proporcionalidade da última equação e $\angle EBF = \angle EBP$, segue que os triângulos BEF e BEP são semelhante.

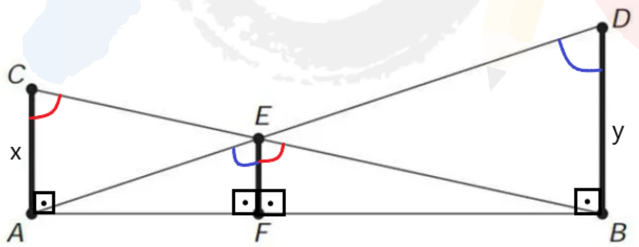
b) Da semelhança do item anterior, segue que $\angle BEF = \angle BPE$. De modo análogo, $\angle CEG = \angle EPC$. Assim,

$$\angle BEF + \angle CEG = \angle BPE + \angle EPC = \angle BPC = 85°$$

7. Seja $\angle ACB = \alpha$, logo, $\angle FEB = \alpha$, pois $AC \parallel EF$. Assim, como $\angle CAB = \angle EFB = 90°$, temos que $\triangle ABC \sim \triangle FBE \implies \frac{AB}{FB} = \frac{CA}{EF} = \frac{4}{EF}$. Analogamente, $\angle ADB = \angle AEF = \beta$ e $\angle DBA = \angle EFA = 90° \implies \triangle ADB \sim \triangle AEF \implies \frac{AB}{AF} = \frac{DB}{EF} = \frac{6}{EF}$. Juntando as duas equações, temos que: $\frac{EF}{6} = \frac{FE}{AB}$ e $\frac{EF}{4} = \frac{FB}{AB} \implies \frac{EF}{6} + \frac{EF}{4} = \frac{FE}{AB} + \frac{FB}{AB} = 1 \implies \frac{5 \times EF}{12} = 1 \implies EF = 2{,}4cm$.



EXTRA: No caso geral da questão anterior, no qual há dois postes com uma haste central, e se sabe os dois comprimentos dos postes, vamos mostrar uma maneira prática para calcular o comprimento da haste utilizando a mesma figura, mas com comprimentos laterais equivalentes a x e y:



Podemos encontrar as mesmas relações da questão 7:

$\frac{AB}{FB} = \frac{CA}{EF}$ e $\frac{AB}{AF} = \frac{DB}{EF}$ Como $CA = x$ e $DB = y$, temos: $\frac{EF}{x} = \frac{FB}{AB}$ e $\frac{EF}{y} = \frac{AF}{AB} \implies \frac{EF}{x} + \frac{EF}{y} = \frac{FB}{AB} + \frac{AF}{AB} = 1 \implies \frac{EF \times y + EF \times x}{x \times y} = 1 \implies EF = \frac{xy}{x+y}$