OLIMPÍADA BRASILEIRA DE FÍSICA

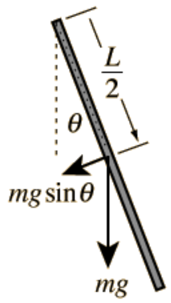
Prova Especial SELETIVAS 1 e 2 / 2020

21 de Janeiro de 2021

Gabarito

comissão de prova

Questão 1. A trança oscila como um pêndulo físico mostrado na figura abaixo.



Da figura vemos que a equação de movimento fica

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{L}[g + a(t)]\theta = 0\,, \tag{1}$$

que descreve um oscilador forçado. Aqui não mencionamos a dissipação de energia, que deve ocorrer mas não é necessário de ser informada. A ressonância ocorre quando a frequência da passada é igual à oscilação natural do pêndulo (trança), que é $\omega_r = \sqrt{2g/L}$.

Questão 2. **(a)** Vamos considerar a transformação

$$\begin{cases} q_i \to q_i' = \alpha q_i \\ t \to t' = \beta t\,, \end{cases} \tag{1}$$

onde *alpha* e *beta* são constantes que representam a variação de escala das coordenadas espaciais e do tempo. Destas transformações segue que as velocidades se transformam segundo a regra

$$\dot{q}_i \to \dot{q}_i' = \frac{\alpha}{\beta}\dot{q}_i\,. \tag{2}$$

Como $L = T + V$ temos

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial q_i'} = \frac{\partial V}{\partial q_i'} = \alpha^{\nu-1}\frac{\partial L}{\partial q_i} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i'} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i'} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,, \end{cases} \tag{3}$$

onde foi usado o fato de que T é proporcional a $\dot{q}_i^2$. Da última identidade segue que

$$\frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i'}\right) = \frac{\alpha}{\beta^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\,. \tag{4}$$

Com esses resultados, podemos ver que as equações de Lagrange se transformam de modo quer

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \to \frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}'_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q'_i} = \frac{\alpha}{\beta^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \alpha^{\nu-1}\frac{\partial L}{\partial q_i}. \tag{5}$$

Se o sistema é invariante por trasnformação de escala, então as soluções das equações de Lagrange devem permanecer válidas após a transformação. Isso só é possível se

$$\beta = \alpha^{1-\nu/2}, \tag{6}$$

pois nesse caso teremos

$$\frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}'_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q'_i} = \nu^{\nu-1}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right] \tag{7}$$

e assim vemos que as soluções das equações antes da transformação também são as soluções após a transformação.

(b) No caso do campo gravitacional temos $V(r) \propto 1/r$, portanto com as transformações definidas acima temos $V'(r) = \alpha^{-1}V(r)$, e portanto $\nu = -1$. Usando o resultado do item (a) temos então $\beta = \alpha^{3/2}$. Assim as transformações de t 4 r são dadas por

$$\begin{cases} r \to r' = \alpha r \\ t \to t' = \alpha^{3/2}. \end{cases} \tag{8}$$

Dessas equações obtemos que $t' \propto r'^{3/2}$ e portanto $t'^2 \propto r'^3$, que corresponde à Tereceira Lei de Kepler.

(c) No caso do pêndulo, $V(r) \propto r$ então $V' \propto \alpha V(r)$ e portanto $\nu = 1$. Nesse caso obtemos $\beta = 1/2$ e portanto $t' \propto r'^{1/2}$, resultando na conhecida lei do período do pêndulo.

Questão 3. Como $\vec{A} = A_z\hat{z}$,

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial z}. \tag{1}$$

como

$$A_z = -\frac{\mu_0 J_0}{4}\left(x^2+y^2\right) \Rightarrow \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0, \tag{2}$$

logo

$$\nabla\cdot\vec{A} = 0. \tag{3}$$

Assumindo que ϕ (potencial escalar) é nulo, teremos para $\vec{A}$:

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J}. \tag{4}$$

Como só temos componente z, então

$$\begin{aligned}\nabla^2\vec{A} &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \\ &= -\frac{\mu_0 J_0}{2} - \frac{\mu_0 J_0}{2} + 0 = -\mu_0 J_0.\end{aligned} \tag{5}$$

Portanto

$$-\mu_0 J_0 = -\frac{4\pi}{c} J_z \quad \Rightarrow \quad J_z = \frac{c\mu_0 J_0}{4\pi}\,. \tag{6}$$

A distribuição de corrente é dada por

$$\vec{J} = \left(\frac{c\mu_0 J_0}{4\pi}\right)\hat{z} \tag{7}$$

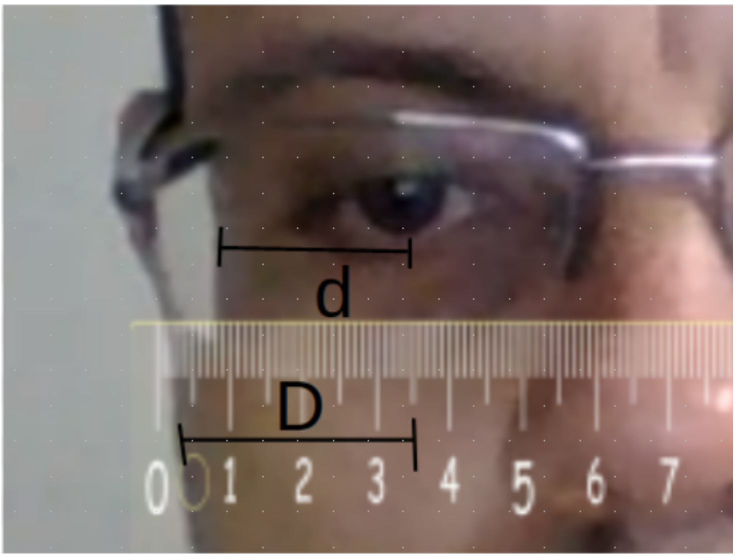
O campo magnético é relacionado a $\vec{A}$ por

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}\,, \tag{8}$$

logo

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0}{2}\left(-y\hat{x} + x\hat{y}\right)\,. \tag{9}$$

Questão 4. **(a)** É preciso medir o aumento angular pela redução do tamanho da imagem medindo a partir do centro do olho, desprezando o fato de que a pessoa não está olhando diretamente à câmera.



Da figura acima:

$$D = 34 - 1 = 33\,\text{mm e } d = 34 - 8 = 26 \text{ mm},$$

com precisão, nos dois casos, de ± 1 mm. O aumento neto é

$$A = \frac{d}{D} = 0{,}8 \text{ (aumento neto, imagem não invertida, erro somando os de cada elemento, 6\%)}\,.$$

Como $A = i/o$, da figura ao lado,

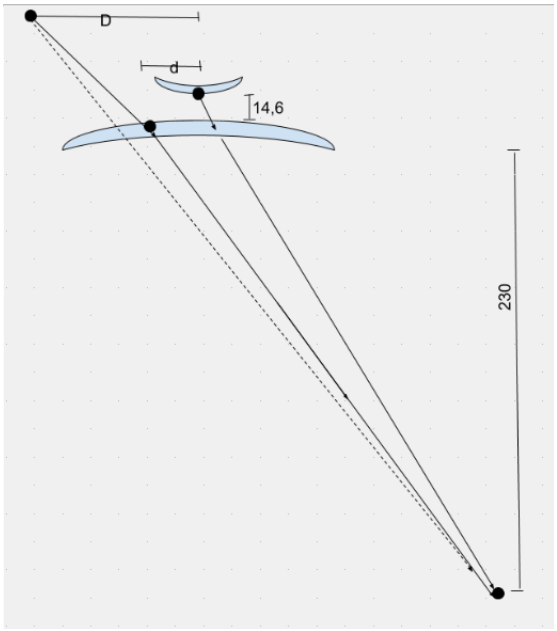
$$A = \frac{i}{o} = \frac{i}{14{,}6} = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad i = 11{,}68 \text{ mm} .$$

Como

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{11{,}68 \times 14{,}6}{3{,}08} = 170{,}53 \text{ mm} .$$

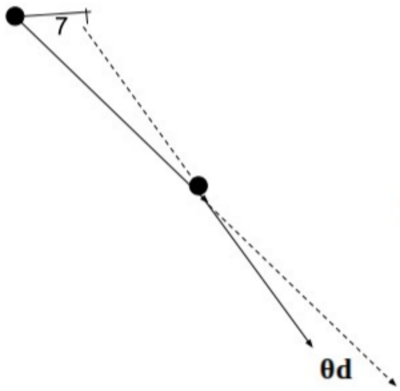
Finalmente,

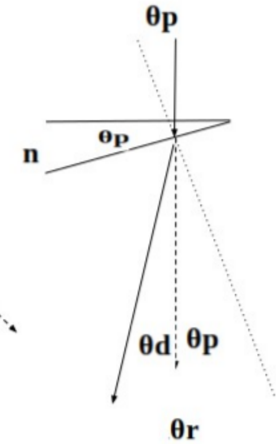
$$G = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}17} = 5{,}9 \text{ dioptrias.}$$



(b) Praticamente o mesmo do da lente direita, pois a imagem dos dois olhos são aproximadamente iguais, tem de medir entre os extremos dos olhos 50-20 mm para o direito, 120-90 mm para o esquerdo.

(c) O desvio da imagem da borda da face pode ser medido na figura, corresponde à diferenças das medidas anteriores: $D - d = D_v = 33 - 26 = 7$ mm. A inclinação das faces equivale à passagem da luz por um prisma, aproximando as superfícies pelas suas tangentes. Considerando o ângulo pequeno, vale a aproximação para um prisma pequeno, se calcula facilmente considerando a incidência inicial perpendicular, a segunda refração sendo a que gera o desvio, pois com mais cálculo se prova queπ é insensível, na aproximação, a rotações do prisma.





$$n\,\text{sen}\theta_p = \text{sen}\theta_r \Rightarrow n\,\theta_p = \theta_r = \theta_d + \theta_p \Rightarrow \theta_d = (n-1)\theta_p = \theta_p/2$$

O desvio angular θ_d resulta ser a metade do ângulo entre as faces θ_p.

$$\theta_{desvio} = \theta_d = \theta_{prisma}/2 = \theta_p/2$$

Sempre igualando a figura a uma proporção mais real, como se a distância da câmera fosse infinita:

$$7/230 = \theta_p/2 \Rightarrow \theta_p = 14/230 = 0{,}06 \text{ rad} = 0{,}06x180/\pi = 10{,}80/3{,}1416 = 3{,}44 \text{ graus}.$$

Questão 5. (a) Equilíbrio de forças quando $v = v_t$:

$$mg = kv_t \to v_t = mg/k$$

Resposta da questão:

$$mg/k > v_s.$$

(b) Equação de movimento do paraquedista:

$$a = g - \frac{k}{m}v.$$

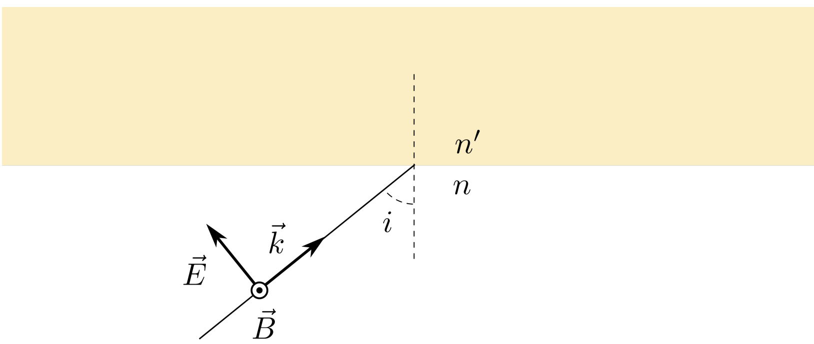
A resolução da equação de movimento, fornece a expressão

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt/m}\right)$$

Fazendo $v(T) = v_s$, chegamos ao seguinte resultado:

$$T = -\frac{m}{k} \cdot \ln\left(1 - v_s\frac{k}{mg}\right)$$

Questão 6.



No caso de polarização paralela ao plano de incidência para que tenhamos condição em que não há reflexão estamos no ângulo de Brewster

$$i_B = \tan^{-1}\left(\frac{n'}{n}\right), \tag{1}$$

onde n' e $n = 1$ são os índices de refração de cada meio (veja figura acima).

$$\tan i_B = \tan 30^\circ = \frac{n'}{n} \quad \Rightarrow \quad n' = \frac{\sqrt{3}}{3}. \tag{2}$$

A frequência de plasma f_p está relacionada a n' por

$$n'^2 \approx 1 - \frac{f_p^2}{f^2}, \tag{3}$$

logo

$$f_p^2 \approx \left[1 - n'^2\right] f^2 \quad \Rightarrow \quad f_p \approx 86{,}5 \text{ Hz}. \tag{4}$$

Como

$$\omega_p = 57\sqrt{N} \quad \text{e} \quad \omega_p = 2\pi f_p, \tag{5}$$

temos

$$N \approx 91 \text{ elétrons/cm}^3. \tag{6}$$

Questão 7. Seja (X, Y) as coordenadas x, y de um ponto P no anteparo. A diferença de caminho entre a lacuna na origem do sistema de coordenadas e uma lacuna localizada na posição $\vec{R}$ é dada por

$$\Delta r = n_x a_x \frac{X}{D} + n_y a_y \frac{Y}{D}, \tag{1}$$

enquanto a defasagem associada a essa diferença de caminho é dada por

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r = 2\pi n_x \left(\frac{a_x X}{D\lambda}\right) + 2\pi n_y \left(\frac{a_y Y}{D\lambda}\right). \tag{2}$$

Os pontos claros do padrão de difração acontecem quando as frações entre parênteses na Eq. 2 são iguais a números inteiros m_x e m_y arbitrários, isto é,

$$\frac{a_x X}{D\lambda} = m_x \quad \text{e} \quad \frac{a_y Y}{D\lambda} = m_y. \tag{3}$$

Dessa maneira, há interferências contrutiva simultânea entre todas as lacunas da rede.

Portanto, as coordenadas dos pontos claros do anteparo podem ser escritas como

$$(X, Y) = m_x.\frac{D\lambda}{a_x}\hat{x} + m_y.\frac{D\lambda}{a_y}\hat{y}, \; m_x \text{ e } m_y \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

O padrão de difração observado no anteparo, dessa maneira, preserva a mesma simetria retangular da rede de difração.

Questão 8. **(a)** Considere uma carga em movimento circular em uma trajetória de raio R com a aplicação de um campo magnético B constante e perpendicular à trajetória da partícula. Do movimento circular realizado, podemos escrever

$$v = \omega R = R\frac{d\theta}{dt} \quad \rightarrow \quad d\theta = \frac{vdt}{R} \tag{1}$$

Considerando que em um intervalo de tempo infinitesimal dt, a quantidade de movimento da partícula $\vec{P}$ sofre uma rotação de $d\theta$, sofrendo uma variação vetorial da quantidade de movimento dada por $\Delta\vec{P}$. Segue, da definição de força como a variação temporal da quantidade de movimento, que

$$\Delta P = F\delta t = Pd\theta. \tag{2}$$

A força resultante é magnética, portanto $F = qvB$. Combinando as equações 1 com a 2 e substituindo a expressão da força magnética, temos que

$$P = eBR. \tag{3}$$

Desconsiderando efeitos relativísticos, pode-se escrever $P = mv$, o que leva a

$$v_N = \frac{eBR}{m}, \tag{4}$$

o que corresponde a seguinte energia cinética

$$E_N = \frac{mv_N^2}{2} = \frac{e^2B^2R^2}{2m}. \tag{5}$$

(b) Verifique que até a equação 3, não houve qualquer hipótese que não pudesse ser aplicada tanto a mecânica clássica quanto a relativística.

$$E = \sqrt{(Pc)^2 + (m_0c^2)^2}$$

$$E = \sqrt{(eBRc)^2 + (m_0c^2)^2}$$

Questão 9. Área da base do pistão:

$$A = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right) \tag{1}$$

Pressão devida ao pistão:

$$P = \frac{Mg}{\frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right)} \tag{2}$$

Pressão deve se igualar à pressão da coluna de água:

$$\frac{Mg}{\frac{\pi}{4}\left(D^2-d^2\right)}=\rho g h \tag{3}$$

Isolando h:

$$h=\frac{4M}{\pi\rho(D^2-d^2)} \tag{4}$$

Massa total do líquido:

$$m=\rho V=\rho\left(\frac{\pi d^2}{4}h+\frac{\pi D^2}{4}H\right) \tag{5}$$

Isolando H:

$$H=\frac{1}{D^2}\left(\frac{4m}{\pi\rho}-hd^2\right) \tag{6}$$

Substituindo h:

$$H=\frac{1}{D^2}\left(\frac{4m}{\pi\rho}-\frac{4M}{\pi\rho(D^2-d^2)}d^2\right)=\frac{4}{\pi\rho D^2}\left(m-\frac{Md^2}{D^2-d^2}\right) \tag{7}$$

Questão 10. Trabalho adiabático em AB e CD:

$$W_{AB}=-\frac{P_BV_B-P_AV_A}{\gamma-1}=-nR\left(\frac{T_B-T_A}{\gamma-1}\right) \tag{1}$$

$$W_{CD}=-nR\left(\frac{T_D-T_C}{\gamma-1}\right) \tag{2}$$

Variação de energia interna em BC:

$$\Delta U_{BC}=nC_v(T_C-T_B)=nR\left(\frac{T_C-T_B}{\gamma-1}\right) \tag{3}$$

Rendimento:

$$\eta=\frac{W}{Q}=\frac{W_{AB}+W_{CD}}{\Delta U_{BC}}=\frac{-nR\left(\frac{T_B-T_A}{\gamma-1}\right)-nR\left(\frac{T_D-T_C}{\gamma-1}\right)}{nR\left(\frac{T_C-T_B}{\gamma-1}\right)} \tag{4}$$

$$\eta=\left(\frac{T_C-T_D+T_A-T_B}{T_C-T_B}\right)=1-\frac{T_D-T_A}{T_C-T_B} \tag{5}$$

Reescrevendo as temperaturas em termos de r e γ:

$$P_CV_0^\gamma=P_D(V_0r)^\gamma \quad\Rightarrow\quad P_D=P_Cr^{-\gamma} \tag{6}$$

Analogamente:

$$P_A = P_B r^{-\gamma} \tag{7}$$

Para os pontos A, B, C e D, temos:

$$P_A V_A = P_B r^{-\gamma} V_0 = nRT_A \tag{8}$$

$$P_B V_B = P_B \frac{V_0}{r} = nRT_B \tag{9}$$

$$P_C V_C = P_C \frac{V_0}{r} = nRT_C \tag{10}$$

$$P_D V_D = P_C r^{-\gamma} V_0 = nRT_D \tag{11}$$

Logo,

$$P_D V_D - P_A V_A = nR(T_D - T_A) \quad \Rightarrow \quad T_D - T_A = \frac{P_D V_D - P_A V_A}{nR} = \frac{V_0 r^{-\gamma}(P_C - P_B)}{nR} \tag{12}$$

Analogamente,

$$T_C - T_B = \frac{V_0}{r} \frac{P_C - P_B}{nR} \tag{13}$$

Logo,

$$\frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} = r^{-\gamma+1} = \left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma-1} \tag{14}$$

Portanto,

$$\eta = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} = 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma-1} \tag{15}$$