

Torneio Brasileiro de Física 2022

Prova Teórica
11 de abril de 2022


Q1 - Mecânica do corpo rígido (20 pontos)

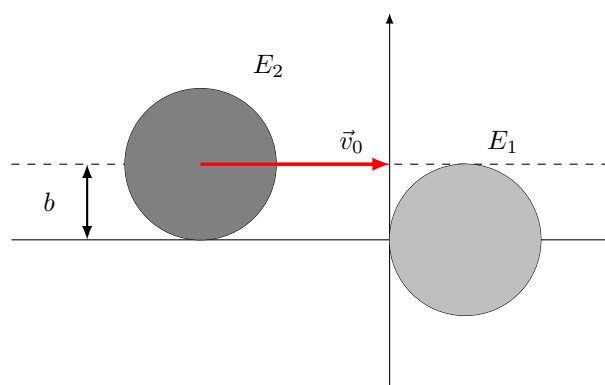
Nessa questão exploraremos aspectos interessantes sobre colisões de bolas de bilhar homogêneas idênticas de massa m e de raio r . Nesse problemas consideraremos diferentes situações físicas e consideraremos as bolas como corpos rígidos e extensos.

Considere todas as colisões com uma duração τ infinitesimal. Consideraremos sempre o tipo de colisão típico de uma mesa de sinuca, no qual uma esfera E_1 encontra-se inicialmente em repouso e é atingida por uma esfera em movimento E_2 . O movimento de E_2 antes da colisão é caracterizado por uma velocidade inicial \vec{v}_0 e uma velocidade angular $\vec{\omega}_0$.

Exploraremos diferentes tipos de colisões possíveis. Nos itens a seguir considere eventuais dissipações de energia associadas aos parâmetros físicos fornecidos.

Parte A - Efeito do parâmetro de impacto (7 pontos)

Nesta primeira parte, desprezaremos qualquer atrito entre as bolas e entre estas e a mesa sobre a qual elas se movimentam. Investigaremos o movimento das esferas subsequente à colisão em função do parâmetro de choque b , definido como a distância entre o centro de E_2 e o prolongamento da trajetória de E_1 anterior à colisão. Veja a figura a seguir.



Para colisões como essa, o coeficiente de restituição e da colisão é definido como a razão entre as componentes normais das velocidades de aproximação e afastamento com respeito à superfície de contato dos corpos durante a colisão, isto é,

$$e = \frac{v_{\perp, aprox.}}{v_{\perp, afast.}} \quad (1)$$

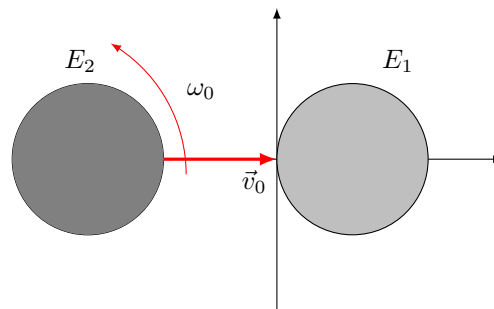
A.1 Considerando uma colisão perfeitamente elástica entre as bolas de bilhar ($e = 1$), calcule os vetores velocidade \vec{v}_1 e \vec{v}_2 das bolas E_1 e E_2 , respectivamente, após a colisão em termos de b e do raio r . 2,5pt

A.2 Refaça o item anterior considerando o coeficiente de restituição $e = 0$. 2,5pt

A.3 Demonstre a conservação (ou dissipação) da energia mecânica para cada uma das situações anteriores. Quando houver dissipação, calcule a energia mecânica dissipada. 2,0pt

Parte B - Colisão com rotação e deslizamento contínuo (7 pontos)

Nessa segunda parte, considere uma colisão de parâmetro de choque b nulo. A superfície de contato entre a mesa e as bolas é perfeitamente lisa, mas entre uma bola e outra apresenta um coeficiente de atrito μ . Nessa oportunidade, considere que a primeira esfera, E_1 , encontra-se novamente em repouso, enquanto E_2 , desloca-se com velocidade linear $\vec{v} = v_0 \hat{x}$, vinda da posição inicial $\vec{r} = -x_0 \hat{x}$, com $x_0 > 0$, e velocidade angular $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{z}$, isto é, vista como anti-horária se vista por um observador acima da mesa, conforme ilustrado na figura a seguir.



Assuma que o coeficiente de restituição entre as esferas é dado por $e = 1$. Assim como na parte A, denote os vetores velocidade linear das bolas E_1 e E_2 por \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , respectivamente. Analogamente, denote suas velocidades angulares após a colisão por $\vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$.

Nessa parte do problema, suponha que o deslizamento entre as esfera dura durante todo o intervalo de tempo τ da colisão.

B.1 Determine que relações matemáticas devem ser satisfeitas pelas componentes das velocidades lineares \vec{v}_0 , \vec{v}_1 , \vec{v}_2 das bolas, antes e depois da colisão. 1,0pt

B.2 Determine que relação matemática devem ser satisfeita pelas velocidades angulares $\vec{\omega}_0$, $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ das bolas, antes e depois da colisão. 1,0pt

B.3 Determine o ângulo entre o vetor velocidade \vec{v}_1 da esfera E_1 após o choque e a direção \hat{x} . 2,0pt

B.4 Determine as velocidades lineares e angulares ($\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$) das esferas E_1 e E_2 após colisão. 3,0pt

Parte C - Colisão com rotação e deslizamento parcial (6 pontos)

Nesta terceira e última parte do problema, considere a mesma condição inicial da parte B, isto é, E_1 encontra-se em repouso, enquanto E_2 , desloca-se com velocidade linear $\vec{v} = v_0 \hat{x}$ e velocidade angular $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{z}$. A colisão continua perfeitamente elástica, no entanto verifica-se agora que, ao final da colisão entre as esferas, não há

deslizamento entre suas superfícies, ou seja, a duração do deslizamento é menor que intervalo de tempo τ da colisão.

Faça o que se pede nos itens a seguir.

C.1 Determine as velocidades lineares e angulares ($\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$) das esferas E_1 e E_2 após colisão na situação descrita. 3,0pt

C.2 Calcule a energia mecânica dissipada na colisão nessa situação. Como se pode explicar a dissipação de energia mesmo quando $e = 1$? 3,0pt

Q2 - Termodinâmica de Reações Químicas (20 pontos)

Nos cursos introdutórios de termodinâmica, a energia interna U de um sistema macroscópico, como um gás, geralmente é relacionada aos seus componentes microscópicos – as partículas (átomos ou moléculas) – por meio da teoria cinética. No caso de um gás monoatômico, com todas as partículas no estado fundamental, por exemplo, a energia interna é simplesmente a soma da energia cinética média de todas as partículas.

No caso mais geral, o gás pode ser formado por diversos tipos moléculas que, além de transladar, podem vibrar e rotacionar. Além disso, átomos e moléculas podem sofrer reações químicas em um dado sistema termodinâmico, de modo que uma transição entre dois estados em equilíbrio termodinâmico pode implicar não somente uma mudança na pressão, volume, temperatura ou entropia, mas também uma mudança na composição química do gás. Neste problema vamos explorar algumas propriedades de sistemas termodinâmicos com composição química variável, isto é, que sofrem reações químicas.

Parte A - Energia Interna e Entalpia em sistemas não-reativos (6 pontos)

Em sistemas de composição fixa, costuma-se considerar apenas a energia associada à translação dos átomos e moléculas para a energia interna U do sistema. No caso de sistemas de composição química variável, deve-se considerar que a energia interna abrange não só a energia cinética das partículas, mas também a energia potencial associada à formação de ligações químicas intramoleculares. Considere válida a aproximação do gás ideal ao longo de todo o problema e despreze quaisquer interações intermoleculares entre os gases.

Considere um sistema termodinâmico em equilíbrio consistindo em um gás contendo um número M de diferentes tipos de moléculas ou átomos, com uma composição de equilíbrio $\{N_1, \dots, N_i, \dots, N_M\}$, onde N é o número de partículas do tipo i .

A.1 Mostre que a energia interna do sistema pode ser escrita como uma função linear da temperatura, $U = CT + D$, em que $C = f(\{N_i\})$ e $C > 0$, $D = g(\{N_i\})$, ou seja, os parâmetros C e D são função apenas da composição química do sistema em equilíbrio termodinâmico. 3pt

Temperatura T , volume V , energia interna U são variáveis de estado comumente utilizadas para descrever sistemas físicos. Dependendo da circunstância, pode ser interessante utilizar outras variáveis de estado derivadas destes, como, por exemplo, a entalpia, definida como $H = U + PV$.

Mantendo sua composição química permanece inalterada, o sistema transita entre dois estados de equilíbrio termodinâmico, em que o estado inicial tem temperatura T_i e o estado final tem temperatura T_f .

A.2 Demonstre que, na situação de composição química fixa, a variação de entalpia ΔH de um sistema que sofre uma transformação isobárica é igual ao calor trocado na transformação. 1,5pt

A.3 Demonstre que, na situação de composição química fixa, se $T_f > T_i$ então sempre se verifica $U_f > U_i$ e $H_f > H_i$. 1,5pt

Parte B - Energia Interna e Entalpia em sistemas reativos (6 pontos)

Consideremos uma situação diferente agora: M espécies químicas, inicialmente separadas, mas à mesma temperatura T_i , são colocada para reagir em um mesmo recipiente. O sistema transita de um estado de composição inicial $\{N_i\}$ para um estado de equilíbrio termodinâmico de composição de equilíbrio final $\{N_f\}$ e temperatura $T_f \neq T_i$.

B.1 Explique, no caso em que uma reação química ocorre no sistema gasoso, como é possível observar $U_f < U_i$ mesmo quando $T_f > T_i$. 1pt

Considere que a transformação descrita no início da parte B ocorre em um sistema termicamente fechado, ou seja, não recebe calor do exterior nem transfere calor para o exterior.

B.2 Calcule a variação de energia interna é ΔU para o caso de um recipiente mantido a volume constante. 1,5pt

B.3 Calcule a variação de entalpia é ΔH para o caso de um recipiente isolado com pistão móvel e mantido a pressão constante. 1,5pt

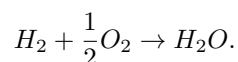
Considere um processo semelhante ao descrito no item **B.1** e que o processo ocorre em um recipiente isolado com um pistão móvel e pressão constante. Os químicos costumam tabelar a variação de entalpia ΔH_0 para reações que ocorrem a uma pressão e temperatura padrão, P_0 e T_0 , respectivamente. Assuma que a temperatura T_0 esteja compreendida entre as temperaturas inicial e final do sistema, isto é, $T_i < T_0 < T_f$ ou $T_f < T_0 < T_i$.

Para resolver os itens que seguem, lembre-se que a entalpia é uma função de estado. As funções de estado tem a seguinte propriedade: a variação da função de estado entre dois estados de equilíbrio não depende do processo de transição.

B.4 Quais são as condições sobre ΔH_0 para que $T_f > T_i$ e quais as condições sobre ΔH_0 para que $T_f < T_i$. Justifique. 2pt

Parte C - Queima de gás hidrogênio (8 pontos)

Vamos tentar aplicar os resultados que vimos anteriormente para a reação de queima de gás hidrogênio na presença de oxigênio, expressa pela reação química



Suponha que a energia armazenada nas ligações químicas pode ser estimada como a soma das energias de ligação em cada espécie, a saber:

$$E_{H-H} = 436 \text{ kJ/mol};$$

$$E_{H-O} = 463 \text{ kJ/mol};$$

$$E_{O=O} = 495 \text{ kJ/mol}.$$

Suponha que em um recipiente isolado dentro no qual existem inicialmente 1 mol de gás hidrogênio e 1 mol de oxigênio à 25°C e 1 atm. A reação de queima acontece de forma controlada e lenta até o sistema atinge uma nova configuração de equilíbrio. Se necessário, utilize o valor da constante universal dos gases $R = 8,31 \text{ J/mol K}$.

C.1 Sendo x o número de mols de H_2 consumidos pela reação de queima descrita, estime os parâmetros $C(x)$ e $D(x)$ definidos na parte **A.1**. Desconsidere efeitos de vibrações moleculares. 1,5pt

C.2 Supondo que a reação acontece de forma isocórica, estime a máxima temperatura que pode ser atingida pela mistura gasosa. Essa situação acontece ao final ou durante a reação química? 2,5pt

C.3 Supondo que a reação acontece de forma isobárica, com o uso de um pistão móvel, qual a temperatura T_f do sistema gasoso ao final da reação? 2,5pt

C.4 À medida que a temperatura de um sistema gasoso eleva-se, o efeito das vibrações moleculares se torna cada vez mais relevante para uma descrição acurada de suas propriedades termodinâmicas. Explique, qualitativamente, como esse efeito afetaria as temperaturas calculadas nos itens **C.2** e **C.3**. 1,5pt

Q3 - Problema de Dois Corpos Relativístico

Neste problema abordaremos efeitos de relatividade geral em órbitas planetárias. Em todas as partes deste problema, consideramos a órbita de uma massa m ao redor de uma massa M com $M \gg m$. Os efeitos relativísticos tornam-se relevantes para fortes campos gravitacionais e alguns de seus efeitos podem ser investigados com argumentos físicos simples.

A equação principal que usaremos para descrever este problema é denominado a *métrica de Schwarzschild*:

$$-c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 d\theta^2, \quad (1)$$

em que c é a velocidade da luz, as coordenadas tempo, t , raio, r , e ângulo θ são observadas a partir de um observador distante no infinito, e τ é o *tempo próprio* da massa m . O parâmetro r_s é chamado de raio de Schwarzschild de M . Essa equação relaciona um diferencial de tempo próprio com diferenciais de tempo e espacial medidas no infinito.

Este resultado é análogo ao intervalo invariante que temos em relatividade especial

$$-c^2 d\tau^2 = \Delta s^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2)$$

porém mais geral, uma vez que é capaz de lidar com referenciais acelerados.

Note: Embora a equação acima seja originada de relatividade geral, neste problema não é necessário saber nada de relatividade geral, e precisa ser usado apenas a equação (1) fornecida acima.

Neste problema, começaremos na **Parte A** obtendo o raio de Schwarzschild e obtendo o *potencial efetivo* com correções relativísticas. Em seguida, na **Parte B**, analisaremos como esse potencial efetivo afeta órbitas circulares, encontrando condições limitantes de movimento. Finalmente, na **Parte C** analisaremos efeitos de estabilidade e efeitos de precessão, comparando os resultados com a órbita de mercúrio.

Parte A - Dinâmica do Movimento (3 Pontos)

Nesta primeira parte do problema, analisaremos a dinâmica desse problema de dois corpos relativístico. Antes de analisar efeitos de relatividade no entanto, vamos começar encontrando uma expressão para o raio de Schwarzschild r_s .

Buracos negros são corpos celestes extremamente massivos e compactos. O campo gravitacional em torno desses corpos é tão intenso que consegue confinar até mesmo um raio de luz. Dada uma massa M , é possível calcular classicamente o raio r_s de uma esfera dentro da qual a massa, caso confinada, tornar-se-ia um buraco negro.

A.1 Encontre uma expressão para o raio de Schwarzschild r_s considerando a condição de velocidade de escape clássica do corpo de massa M para um fóton. 1.0pt
--

Há duas constantes de movimento do movimento orbital em torno de M que podem ser exploradas. A primeira delas é o movimento angular $L \equiv mr^2 \frac{d\theta}{d\tau}$. A segunda constante de movimento se trata da energia, que pode ser escrita como:

$$E = mc^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \quad (3)$$

Combinando as equações acima, podemos considerar efeitos da dinâmica orbital do nosso sistema. Começaremos obtendo uma equação para $\frac{dr}{d\tau}$, e em seguida obteremos o potencial efetivo $U(r)$ do nosso sistema relativístico.

A.2 Dada as expressões fornecidas, encontre $\frac{dr}{d\tau}$, em termos de constantes fornecidas. 1.0pt

Com o resultado acima, podemos obter uma expressão para a “energia cinética efetiva”

$$K = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 \quad (4)$$

em função de variáveis do sistema. Observe que essa quantidade K não é a energia cinética real e apenas uma analogia a ela. Dado isso, podemos definir o potencial efetivo $U(r)$ como termos dependendo apenas de r de forma que $K + U(r)$ é uma constante do movimento.

- A.3** Com a expressão encontrada em **A.2** e a discussão acima, encontre o potencial efetivo $U(r)$ desse problema de dois corpos relativístico. Você vai perceber que temos uma certa liberdade em escolher $U(r)$. Para resolver possíveis ambiguidades, escolha $U(r)$ tal que $U(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$.
O que difere $U(r)$ com o potencial gravitacional clássico mais comum? 1.0pt

Parte B - Efeito em órbitas circulares (6 Pontos)

Com a expressão do potencial efetivo $U(r)$ temos informação suficiente para caracterizar a dinâmica do sistema como um problema unidimensional radial. Caso você não tenha feito a parte A, assuma que o potencial efetivo por ser escrito como

$$U(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} - \frac{\alpha}{r^3}, \quad (5)$$

em que os dois primeiros têm natureza clássica e o terceiro termo constitui a correção relativística ao potencial gravitacional. Começaremos fazendo uma breve análise do problema de dois corpos clássico, encontrando o raio orbital de movimento neste caso.

- B.1** Assumindo o potencial efetivo clássico, $U_C(r)$, obtenha o raio r_C da órbita circular da órbita de momento angular L . 0.2pt

Consideramos agora o potencial efetivo relativístico completo e analisaremos quais os raios das órbitas neste caso. Estes raios orbitais relativísticos diferem substancialmente das expressões clássicas, e analisaremos implicações disso nesta parte do problema. Agora, voltamos a considerar efeitos relativísticos caracterizados pelo potencial efetivo $U(r)$ encontrado na **Parte A** do problema.

- B.2** Considerando o potencial efetivo $U(r)$ encontrado em **A.3**, obtenha expressões para os raios r_i onde o sistema apresenta órbitas circulares. Escreva o resultado em termos de r_s e $\eta \equiv \frac{L^2}{m^2 c^2 r_s}$. Também esboce um gráfico desses raios divididos por r_s , sobreposto com o raio clássico r_C encontrado previamente, em função de η/r_s . 2.0pt

- B.3** Com base em $U(r)$ discuta a estabilidade das órbitas circulares encontradas com base no seu gráfico. 2.0pt

- B.4** Existe um valor de momento angular crítico L_C tal que o sistema pare de admitir órbitas circulares se $L < L_C$. Encontre L_C . 1.0pt

Finalmente, com os resultados acima podemos analisar órbitas de partículas sem massa ao redor de uma massa M . Essa órbita é denominada a *esfera de fótons*, e caracteriza a região de espaço onde gravidade é suficientemente forte tal que fótons viajam em órbitas circulares em torno de um buraco negro.

- B.5** Considerando o limite $\eta \gg 1$, encontre o valor do raio da esfera de fótons. 0.8pt

Parte C - Efeitos de Estabilidade e Precessão (11 Pontos)

Nesta terceira e última parte, analisaremos como o potencial efetivo $U(r)$ gera efeitos de precessão orbital. Para isso, consideraremos uma órbita **quase clássica** e **estável**. Primeiramente, vamos obter o valor do raio orbital deste movimento.

- | | | |
|------------|--|-------|
| C.1 | Em qual limite de η , temos uma órbita quase clássica? Usando seus resultados da Parte B encontre uma expressão aproximada para o raio dessa órbita estável r . Nesta mesma aproximação encontre uma expressão para a velocidade angular da órbita ω_θ . | 1.0pt |
|------------|--|-------|

Tendo em mente este raio orbital r encontrada no item acima, e efeitos de estabilidade da **Parte B**, analisemos oscilações radiais do movimento orbital.

- | | | |
|------------|---|-------|
| C.2 | Considerando os efeitos de estabilidade discutidos no item B.3 , considere uma pequena perturbação radial na órbita tal que a massa m passe a oscilar com uma frequência de oscilação ω_r . Encontre ω_r . | 3.0pt |
|------------|---|-------|

- | | | |
|------------|---|-------|
| C.3 | Dados os resultados encontrados previamente, calcule o ângulo de precessão $\Delta\phi$ da ponta da órbita por período de revolução de m em torno de M . Deixe sua resposta em função de m , M , L e constantes físicas universais. | 3.0pt |
|------------|---|-------|

Os resultados acima foram obtidos assumindo uma órbita circular. No entanto, pode se estender os resultados acima para uma órbita elíptica e obter resultados análogos. Tendo em vista esse resultado, considere que m descreve uma órbita aproximadamente elíptica no resto deste problema.

O resultado acima está expressado em função do momento angular L . Como estamos tratando agora de uma órbita elíptica, é mais conveniente expressar o ângulo de precessão em função da excentricidade, ϵ , e semieixo maior da elipse, a .

- | | | |
|------------|---|-------|
| C.4 | Escreva uma expressão capaz de fornecer o ângulo de precessão $\Delta\phi$ em termos de M , a , ϵ e constantes físicas universais. | 2.0pt |
|------------|---|-------|

Essa taxa de precessão acima, é denominada a taxa de *precessão absidal*.

A massa m descreve uma trajetória aproximadamente elíptica, porém, os efeitos relativísticos resultam em uma lenta precessão do eixo principal da elipse. A órbita de mercúrio possui uma excentricidade $\epsilon = 0.21$, um semi-eixo maior de $a = 5,79 \cdot 10^{10}$ m, e um período de translação de 87,97 dias. Adicionalmente, foi medido experimentalmente que durante um período de mercúrio que a taxa de precessão é foi de $\Delta\phi = (2,88 \cdot 10^{-5})^\circ$.

- | | | |
|------------|---|-------|
| C.5 | Com a expressão prévia, e os dados fornecidos acima, calcule a taxa de precessão de mercúrio por órbita. Compute o erro relativo com a taxa real de precessão por órbita. | 2.0pt |
|------------|---|-------|