



Torneio Brasileiro de Física
2 a 8 de Maio de 2021
Prova Teórica



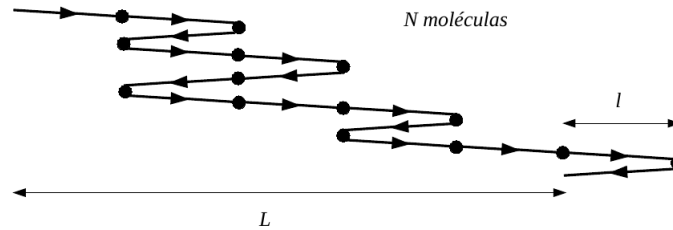
INSTRUÇÕES

1. Este é o caderno de questões da Prova Teórica do TBF/2021. A prova é composta por três questões. Confira seu caderno. Ele deve conter um **total de 13 páginas**, identificadas de 1 a 13. Em caso contrário, peça sua substituição.
2. A duração da prova é de **quatro horas**.
3. As resoluções devem ser escritas de próprio punho em folhas inicialmente em branco e sem qualquer tipo de identificação. **Não escreva o seu nome, nem o de sua escola, nas folhas de respostas.**
4. Ao final da prova **você deve parar de escrever imediatamente**. O fiscal da sala vai conceder um tempo adicional de 30 minutos **exclusivamente** para a fotografia e envio das questões.
5. Cada questão deve ser respondida em um documento eletrônico separado, de tamanho menor que 10 Mbytes e no formato PDF (preferencialmente), ou JPG ou PNG.
6. Cada questão deve ser submetida no correspondente formulário eletrônico disponibilizado em sua área restrita do site <https://app.graxaim.org/tbf/2021>.

Questão 1

(valor: 20 pontos)

Polímeros, como o elástico, são compostos por muitas moléculas chamadas de monômeros. Os monômeros são longos e geralmente emaranhados numa configuração com alta entropia. Um modelo muito simples de elástico pode ser visto na figura abaixo. Trata-se de uma cadeia de N monômeros de comprimento l . No emaranhado, cada monômero aponta ou para a direita ou para a esquerda e o comprimento total, L , do elástico é o resultado líquido de N_R monômeros apontando para a direita e N_L apontando para a esquerda. Considere ainda que a energia interna deste elástico permanece constante quando é esticado em contato diatérmico com um reservatório térmico de temperatura T .



2 pts

- (a) Calcule o número de microestados possíveis da cadeia de monômeros.

Solução: É preciso calcular a entropia, e a partir dela, a força. A entropia é calculada por $S = k \ln \Omega$, onde k é a constante de Boltzmann e Ω é o número de microestados do sistema de N moléculas.

O número de microestados é obtido por análise combinatória como

$$\Omega = \frac{N!}{N_R!(N - N_R)!} \quad (1)$$

1 pt

- (b) Calcule a entropia do elástico em termos de N e N_R .

Solução:

A entropia pode então ser resolvida:

$$S = k \ln \left(\frac{N!}{N_R!(N - N_R)!} \right) \quad (2)$$

Se a fórmula de Stirling ($\ln N! = N \ln N - N$) for usada neste ponto, temos ainda:

$$S = k \ln \left(\frac{N!}{N_R!(N - N_R)!} \right) \quad (3)$$

$$= k [\ln N! - \ln N_R! - \ln(N - N_R)!] \quad (4)$$

$$= k [N \ln N - N - N_R \ln N_R + N_R - ((N - N_R) \ln(N - N_R) - N + N_R)] \quad (5)$$

$$S = k [N \ln N - N_R \ln N_R - (N - N_R) \ln(N - N_R)] \quad (6)$$

17 pts

- (c) Calcule a força restauradora exercida pelo elástico em termos de T , l , N e L .

Solução:

Assumindo que a temperatura é constante, escrevemos a 1ª Lei da Termodinâmica como

$$dU = TdS + FdL, \quad (7)$$

onde o sinal positivo no termo FdL decorre de se usar a força exercida pelo elástico. Dado que a energia interna também se mantém constante durante o esticamento, temos

$$F = -T \frac{dS}{dL} = -T \frac{\partial S}{\partial N_R} \frac{\partial N_R}{\partial L}, \quad (8)$$

onde usamos a regra da cadeia visto que a entropia não depende diretamente de L . A relação entre N_R e L é dada por

$$L = (N_R - N_L)l = (N_R - N + N_R)l \Rightarrow N_R = \frac{L}{2l} + \frac{N}{2}. \quad (9)$$

Assim,

$$\frac{\partial N_R}{\partial L} = \frac{1}{2l}. \quad (10)$$

Se a fórmula de Stirling não foi aplicada antes, ela precisa ser usada antes do cálculo de $\frac{\partial S}{\partial N_R}$ a seguir.

Temos, então, que a força é dada por

$$F = -\frac{T}{2l} \frac{\partial S}{\partial N_R} \quad (11)$$

$$= -\frac{Tk}{2l} \frac{\partial}{\partial N_R} [N \ln N - N_R \ln N_R - (N - N_R) \ln(N - N_R)] \quad (12)$$

$$= -\frac{Tk}{2l} \ln \left(\frac{N - N_R}{N_R} \right) = -\frac{Tk}{2l} \ln \left(\frac{N}{N_R} - 1 \right). \quad (13)$$

Usando Equação 9, temos finalmente

$$F = -\frac{Tk}{2l} \ln \left(\frac{lN - L}{lN + L} \right) \quad (14)$$

1. **3,0 pts:** Escrever a 1ª Lei da Termodinâmica na forma correta para o caso de T constante e considerando o trabalho da força restauradora do elástico.
2. **3,0 pts:** Aplicar a constância da energia interna e escrever a força restauradora em termos das derivadas parciais apropriadas.
3. **2,5 pts:** Determinar a dependência de N_R com L .
4. **2,0 pts:** Determinar $\frac{\partial N_R}{\partial L}$.

5. 1,5 **pts**: Uso correto da fórmula de Stirling para obter o comportamento limite de um elástico com um número N muito grande de monômeros.
6. 2,5 **pts**: Determinar $\frac{\partial S}{\partial N_R}$.
7. 2,5 **pts**: Escrever a força restauradora em termos de T , l , N e L .

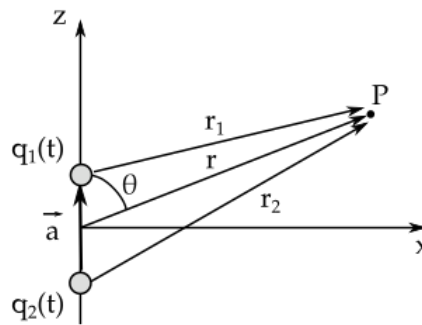
Questão 2

(valor: 20 pontos)

Sistemas elétricos ou magnéticos estáticos não são capazes de gerar ondas eletromagnéticas que se propagam ao longo do espaço. Neste problema vamos desenvolver um modelo eletromagnético de radiação de um dipolo elétrico oscilante. Trata-se de um modelo simplificado que demonstra como cargas elétricas oscilantes são capazes de irradiar energia através de campos eletromagnéticos.

Parte I

Um dipolo elétrico de momento de dipolo $\vec{p}(t) = q(t)\vec{a}$ pode ser modelado por um par de cargas elétricas de cargas oscilantes $q_1(t) = q_0 \cos(\omega t)$ e $q_2(t) = -q_1(t)$ unidas por uma haste rígida de comprimento a . O sentido e a direção do vetor dipolo elétrico \vec{p} são os mesmos do vetor que liga a carga $q_2(t)$ à carga $q_1(t)$. O momento de dipolo elétrico varia segundo a expressão $p(t) = p_0 \cos(\omega t)$. Por simplicidade, considere o vetor \vec{a} orientado paralelamente ao eixo vertical \hat{z} e que o centro geométrico do dipolo localiza-se na origem do sistema de coordenadas. Vamos calcular quantidades de interesse no ponto $P(\vec{r})$, distante de r_1 da carga 1 e r_2 da carga 2. Veja a figura a seguir.



O meio no qual encontra-se o dielétrico é o vácuo, cuja constante eletrostática é $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ e permeabilidade magnética μ_0 .

Segundo a relatividade restrita, não é possível que a informação da variação do valor das cargas seja transmitida instantaneamente a todo o espaço. Por essa razão, consideraremos que, quando o valor de uma carga pontual sofre uma alteração, o potencial elétrico associado é ‘atualizado’ após um tempo de propagação com velocidade da luz c através do espaço. A mesma hipótese pode ser feita para o potencial vetor magnético gerado.

1 pt

- (a) Considerando que não há acúmulo de cargas elétricas na haste que une as cargas $q_1(t)$ e $q_2(t)$, determine a corrente elétrica $I(t)$ associada à variação do dipolo $p(t)$.

Solução:

Para não haver acúmulo de cargas, a corrente elétrica I deve ser constante ao longo da haste. Assim

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0\omega \text{sen}(\omega t). \quad (15)$$

- +1 pts: Cálculo de corrente.

2 pts

- (b) Calcule o potencial elétrico $V(\vec{r}, t)$ gerado pela superposição do potencial retardado das duas cargas. Deixe sua resposta em termos de K , q_0 , r_1 , r_2 e c . Considere efeitos de atraso e não faça, por ora, qualquer tipo de aproximação geométrica.

Solução:

O potencial elétrico é dado pela expressão

$$V(\vec{r}, t) = \frac{Kq_0 \cos[\omega(t - r_1/c)]}{r_1} - \frac{Kq_0 \cos[\omega(t - r_2/c)]}{r_2} \quad (16)$$

- +1 pts: Indicação de cálculo de potencial considerando superposição.
- +1 pts: Cálculo correto do potencial elétrico.

2 pts

- (c) Escreva a expressão do potencial vetor $A(\vec{r}, t)$ gerado pelo dipolo elétrico oscilante. Considere efeitos de atraso e não faça, por ora, qualquer tipo de aproximação geométrica.

Solução:

Cada elemento de corrente localizado a uma altura z sofre um efeito distinto de atraso, assim

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \hat{z} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\mu_0 I(t - r'/c)}{4\pi r'} dz, \quad (17)$$

em que r' é a distância entre um elemento de comprimento na haste e o ponto determinado pelo vetor \vec{r} .

- +1 pts: Indicação do cálculo do potencial vetor.
- +1 pts: Cálculo correto do potencial vetor.

Parte II

Um parâmetro de comprimento importante desse problema é o comprimento de onda associado à onda eletromagnética emitida pelo dipolo, $\lambda = c/\omega$. Consideraremos agora aproximações úteis que ajudam a simplificar as expressões encontradas para $V(\vec{r})$ e $\vec{A}(\vec{r})$. A primeira será a aproximação de dipolo curto ($a \ll \lambda$) e a segunda será a condição de campo distante ($r \gg \lambda$). A partir desse ponto, despreze termos de ordem superior a $1/r$. Devido aos efeitos relativísticos de retardamento dos potenciais, deixe suas respostas em termos do instante $\tau = t - r/c$.

5 pts

- (d) Determine a expressão do potencial elétrico $V(\vec{r}, \tau)$ gerado por um dipolo elétrico curto oscilante na região de campo distante. Deixe sua resposta em termos de ω , p_0 , e demais constantes físicas intervenientes.

Solução:

Na condição de dipolo curto, podemos realizar as seguintes aproximações

$$r_1 \approx r - \frac{a}{2} \cos \theta \quad (18)$$

$$r_2 \approx r + \frac{a}{2} \cos \theta. \quad (19)$$

O efeito de distâncias diferentes pode gerar expansões tanto no numerador quanto no denominador da Equação 16. Podemos realizar uma expansão de primeira ordem nos cossenos

$$\cos[\omega(t - r_1/c)] = \cos[\omega(t - r/c)] + \frac{\omega a \cos(\theta)}{2c} \text{sen}[\omega(t - r/c)] \quad (20)$$

$$\cos[\omega(t - r_2/c)] = \cos[\omega(t - r/c)] - \frac{\omega a \cos(\theta)}{2c} \text{sen}[\omega(t - r/c)]. \quad (21)$$

A diferença de tempos de atraso é capaz de gerar um termo $\propto 1/r$, pois os cossenos podem ser expandidos em primeira ordem com respeito à fração (a/r) . Como a expansão dos termos do denominador gera termos de segunda ordem, ambos os denominadores serão aproximados por r , isto é

$$V(\vec{r}, t) = \frac{kq_0 \cos[\omega(t - r_1/c)] - \cos[\omega(t - r_2/c)]}{r}. \quad (22)$$

Substituindo as expansões de primeira ordem dos cossenos e substituindo na equação 22, obtemos o resultado desejado

$$V(\vec{r}, t) = -\frac{p_0 \omega \cos \theta \text{sen}[\omega(t - r/c)]}{4\pi \epsilon_0 c r} \quad (23)$$

-
- +1 pts: Aproximação para as distâncias.
 - +2 pts: Expansão dos cossenos.
 - +2 pts: Determinação do resultado final ou expressão equivalente.

4 pts

- (e) Determine a expressão do potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}, \tau)$ gerado por um dipolo elétrico curto oscilante na região de campo distante. Deixe sua resposta em termos de ω , p_0 e demais constantes físicas intervenientes.

Solução:

Fazendo uma expansão do termo senoidal associado ao atraso, temos que

$$\text{sen}[\omega(t - r'/c)] = \text{sen}[\omega(t - r/c)] - \frac{\omega z \cos(\theta)}{2c} \cos[\omega(t - r/c)]. \quad (24)$$

De forma análoga ao item anterior, o denominador do integrando da equação 17 pode ser aproximado para r para obter efeitos de primeira ordem. Após essa

simplificação, substituindo esse resultado na integral da Equação 17, verifica-se que o segundo termo sofre um cancelamento quando é integrado ao longo de toda a haste.

Feitas as devidas simplificações, chegamos ao seguinte resultado

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = -\hat{z} \frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \text{sen}[\omega(t - r/c)]. \quad (25)$$

- +1 pts: Expansão do termo senoidal.
- +1 pts: Aproximação de r constante na integral.
- +2 pts: Determinação de expressão desejada ou equivalente.

Parte III

A partir do potencial elétrico escalar e do potencial vetor determinados na Parte II é possível determinar os campos elétricos e magnéticos gerados pelo dipolo. Por conveniência, fornecemos os campos gerados por um dipolo elétrico curto na região de campo distante

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \left(\frac{\text{sen}\theta}{r} \right) \cos(\omega\tau) \hat{\theta}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{\text{sen}\theta}{r} \right) \cos(\omega\tau) \hat{\phi}.$$

2 pts

- (f) Classifique a onda eletromagnética emitida pelo dipolo com respeito a sua polarização no ponto $P(r, \theta, \phi)$.

Solução:

Por inspeção direta, verifica-se que a onda eletromagnética gerada é linearmente polarizada, pois $\vec{E} \parallel \hat{\theta}$.

- +2 pts: Identificação da polarização da onda emitida.

3 pts

- (g) Demonstre, a partir dos campos elétrico e magnético fornecidos, que o dipolo elétrico oscilante irradia energia.

Solução:

Com os campos \vec{E} e \vec{B} fornecidos, podemos calcular o vetor de Poynting associado

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \left(\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 \text{sen}(\theta)}{4\pi r} \right)^2 \frac{1}{c\mu_0} \cos^2(\omega t) \hat{r}. \quad (26)$$

Como o valor médio do vetor de Poynting é maior que zero, para $\theta \neq 0$ ou π ,

concluimos que há um fluxo de energia paralelo a \hat{r} ao longo do espaço como um todo e nulo na direção \hat{z} .

- +1 pts: Cálculo do vetor de Poynting.
- +4 pts: Interpretação do vetor de Poynting.

1 pt

- (h) O dipolo elétrico oscilante é uma fonte de radiação isotrópica? Em caso negativo, indique a(s) direção(ões) em que a sua irradiação de energia é máxima.

Solução:

O vetor de Poynting tem uma dependência $\propto \sin^2\theta$ com respeito a variável angular θ , portanto o dipolo elétrico oscilante não é uma fonte isotrópica.

Dessa maneira, concluimos que a irradiação de energia é máxima quando $\theta = 90^\circ$, isto é, ao longo do plano $x - y$.

- +1 pts: Identificar que a onda não é isotrópica e as direções de máxima irradiação.

Questão 3

(valor: 20 pontos)

O gás de elétrons de Fermi é um modelo quântico de elétrons distribuídos com densidade eletrônica uniforme. Nesse modelo a interação Coulombiana elétron-elétron é compensada por uma carga positiva distribuída homoganeamente no espaço. Por hipótese, os elétrons não interagem entre si.

Pode-se dizer, portanto, que trata-se da versão quântica de um gás ideal, para o caso de partículas fermiônicas, também conhecidas como Férmions. Esse tipo de partícula se caracteriza pelo spin semi-inteiro e pela obediência ao princípio de exclusão de Pauli. Apesar de muito simplificado, esse modelo é capaz de fornecer resultados bastante úteis para diferentes ramos da física, como o estudo de semicondutores, metais, núcleos atômicos e interior de estrelas.

Seja m a massa do elétron livre. Nesse problema, vamos descrever os estados quânticos eletrônicos dos elétrons contidos em um cubo de aresta L .

1 pt

- (a) Escreva a equação que deve ser satisfeita pelo estado quântico $\psi(x, y, z)$ estacionário de um elétron no gás de Fermi.

Solução:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(x, y, z) = E\Psi(x, y, z). \quad (27)$$

- +1 pts: Determinação da expressão desejada ou equivalente.

3 pts

- (b) O tratamento de um sistema infinito pode ser trocado pela consideração de condições periódicas de contorno nas paredes do cubo, isto é

$$\psi(x, y, z) = \psi(x + L, y, z) = \psi(x, y + L, z) = \psi(x, y, z + L).$$

Resolva a equação encontrada no item anterior aplicando as condições de contorno periódicas fornecidas.

Solução:

O problema pode ser dividido, pelo método de separação de variáveis, em três problemas unidimensionais idênticos para as direções x, y e z

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi_x''(x) = E_x\Psi_x(x). \quad (28)$$

Analogamente para as demais direções, com $E = E_x + E_y + E_z$. A solução dessa equação pode ser escrita como uma exponencial complexa que traduz uma partícula livre de momento bem definido

$$\Psi_x(x) = A_x \cdot e^{ik_x x}, \quad \text{em que } E_x = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m}. \quad (29)$$

Consequentemente, a função de onda do sistema 3D pode ser escrita como

$$\Psi(x, y, z) = Ae^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}. \quad (30)$$

Para garantir a condição de contorno desejada, é necessário que

$$k_i = n_i \cdot \frac{2\pi}{L}, \text{ em que } i \in x, y, z \text{ e } n_i \in \mathbb{Z}. \quad (31)$$

-
- +2 pts: Solução da equação diferencial.
 - +1 pts: Aplicação da condição de contorno periódica.

1 pt

- (c) Normalize a função de onda encontrada considerando o volume interno do cubo de aresta L .

Solução:

A condição de normalização pode ser escrita como

$$\int_{\Omega} |\Psi|^2 d^3r = 1, \quad (32)$$

o que leva ao resultado

$$A = \frac{1}{\sqrt{L^3}}, \quad (33)$$

-
- +1 pts: Cálculo da contante de normalização.

2 pts

- (d) É possível escrever as soluções encontradas como

$$\Psi_{k_x, k_y, k_z}(x, y, z) = Ae^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}.$$

Calcule a energia de um elétron no estado eletrônico $\Psi_{k_x, k_y, k_z}(x, y, z)$ em termos de m , k_x, k_y, k_z e constantes físicas.

Solução:

É possível verificar, por inspeção, que

$$\hat{p}\Psi = \hbar\vec{k}\Psi, \quad (34)$$

em que $\vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}$.

A energia cinética da partícula pode ser escrito como $E_k = \frac{\hat{p}^2}{2m}$, o que nos leva ao resultado

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (35)$$

- +2 pts: Cálculo da energia cinética em função do k .

1 pt

- (e) Calcule o comprimento de onda de de Broglie de um elétron no estado $\Psi_{k_x, k_y, k_z}(x, y, z)$ em termos de k_x, k_y e k_z .

Solução:

O comprimento de onda de de Broglie pode ser calculado como

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\hbar \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}. \quad (36)$$

- +1 pts: Cálculo do comprimento de onda de de Broglie.

6 pts

- (f) Considere a seguir que a densidade eletrônica do gás de fermi é dada por $n = N/L^3$, onde $N \gg 1$ é o número total de elétrons. A energia cinética **máxima** de um elétron no gás de Fermi no seu estado fundamental pode ser escrita como

$$E_{max} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}.$$

em que k_F é conhecido como *número de onda de Fermi*. Calcule o valor de k_F em termos de n .

Solução:

Os estados estacionários permitidos podem ser representados em um espaço $\{k_x, k_y, k_z\}$ como um retículo cúbico. O estado fundamental corresponde a a ocupação dos estados de menor energia possível.

Nesse espaço, estados com a mesma energia estão distribuídos em uma esfera de raio k . Na condição de muitos elétrons podemos supor que os estados ocupados determinam uma esfera de raio k_F cujo volume, no espaço configuracional, é dado por

$$V_K = \frac{4}{3}\pi k_F^3 \quad (37)$$

Considerando o retículo cúbico de estados, podemos verificar que cada estado pode ser associado aos pontos mais próximos a ele no espaço de configurações, isto é, um cubo de aresta $2\pi/L$. Como cada estado pode ser ocupado por 2 elétrons (spin up/spin down), podemos estimar o número total de elétrons como

$$N = 2 \frac{V_K}{(2\pi/L)^3}, \quad (38)$$

Onde N é igual ao número de elétrons e, conseqüentemente, $N/L^3 = n$. Dessa maneira, temos que

$$3\pi^2 \frac{N}{L^3} = k_F^3 \rightarrow k_F = \sqrt[3]{3\pi^2 n}. \quad (39)$$

- +1 pts: Cálculo do volume ocupado por um estado.
- +1 pts: Cálculo do volume da esfera de Fermi.
- +2 pts: Estabelecer relação entre o número de elétrons e o vetor de Fermi.
- +2 pts: Cálculo de k_F .
- -2 pts: Pelo uso de condições fixas de contorno.

6 pts

(g) Calcule a energia **média** por elétron em função de \hbar , massa do elétron m e densidade eletrônica n à temperatura de $T = 0$ K.

Solução:

$$\bar{E}_k = \frac{1}{N} \sum_{occ} \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (40)$$

Para muitos elétrons, o somatório pode ser aproximado por uma integral

$$\bar{E}_k \approx \frac{2}{N(2\pi/L)^3} \int_{occ} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} d^3k. \quad (41)$$

$$\bar{E}_k = \frac{2}{N(2\pi/L)^3} \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^{k_F} 4\pi k^4 dk. \quad (42)$$

Finalmente, a energia média por elétron pode ser calculada como

$$\bar{E}_k = \frac{3\hbar^2}{10m} (3\pi^2 n)^{2/3}. \quad (43)$$

- +2 pts: Expressão que resulta na energia média.
- +2 pts: Transformação do somatório em uma integral.
- +2 pts: Resolução da integral e cálculo da energia média.

Dica: Caso necessário, utilize o operador momento $\hat{p} = -i\hbar\nabla$.