Torneio Brasileiro de Física

2 a 8 de Maio de 2021

Prova Teórica

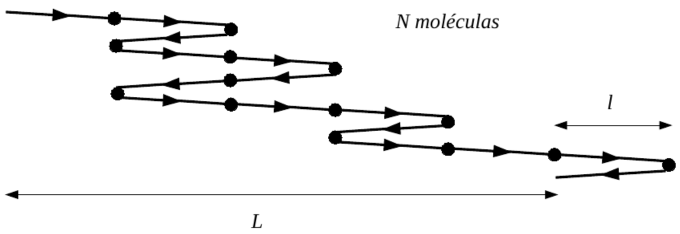
INSTRUÇÕES

1. Este é o caderno de questões da Prova Teórica do TBF/2021. A prova é composta por três questões. Confira seu caderno. Ele deve conter um **total de 5 páginas**, identificadas de 1 a 5. Em caso contrário, peça sua substituição.
2. A duração da prova é de **quatro horas**.
3. As resoluções devem ser escritas de próprio punho em folhas inicialmente em branco e sem qualquer tipo de identificação. **Não escreva o seu nome, nem o de sua escola, nas folhas de respostas.**
4. Ao final da prova **você deve parar de escrever imediatamente**. O fiscal da sala vai conceder um tempo adicional de 30 minutos **exclusivamente** para a fotografia e envio das questões.
5. Cada questão deve ser respondida em um documento eletrônico separado, de tamanho menor que 10 Mbytes e no formato PDF (preferencialmente), ou JPG ou PNG.
6. Cada questão deve ser submetida no correspondente formulário eletrônico disponibilizado em sua área restrita do site `https://app.graxaim.org/tbf/2021`.

continua ...

Questão 1 **(valor: 20 pontos)**

Polímeros, como o elástico, são compostos por muitas moléculas chamadas de monômeros. Os monômeros são longos e geralmente emaranhados numa configuração com alta entropia. Um modelo muito simples de elástico pode ser visto na figura abaixo. Trata-se de uma cadeia de N monômeros de comprimento l. No emaranhado, cada monômero aponta ou para a direita ou para a esquerda e o comprimento total, L, do elástico é o resultado líquido de N_R monômeros apontando para a direita e N_L apontando para a esquerda. Considere ainda que a energia interna deste elástico permanece constante quanto é esticado em contato diatérmico com um reservatório térmico de temperatura T.



$\boxed{\text{2 pts}}$ (a) Calcule o número de microestados possíveis da cadeia de monômeros.

$\boxed{\text{1 pt}}$ (b) Calcule a entropia do elástico em termos de N e N_R.

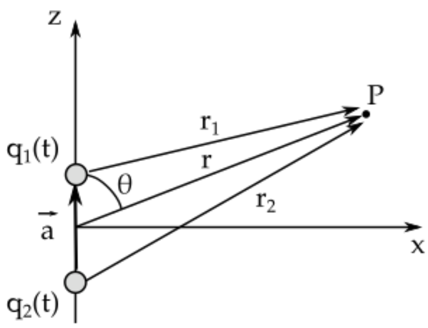
$\boxed{\text{17 pts}}$ (c) Calcule a força restauradora exercida pelo elástico em termos de T, l, N e L.

Questão 2 **(valor: 20 pontos)**

Sistemas elétricos ou magnéticos estáticos não são capazes de gerar ondas eletromagnéticas que se propagam ao longo do espaço. Neste problema vamos desenvolver um modelo eletromagnético de radiação de um dipolo elétrico oscilante. Trata-se de um modelo simplificado que demonstra como carga elétricas oscilantes são capazes de irradiar energia através de campos eletromagnéticos.

Parte I

Um dipolo elétrico de momento de dipolo $\vec{p}(t) = q(t)\vec{a}$ pode ser modelado por um par de cargas elétricas de cargas oscilantes $q_1(t) = q_0 \cos(\omega t)$ e $q_2(t) = -q_1(t)$ unidas por uma haste rígida de comprimento a. O sentido e a direção do vetor dipolo elétrico $\vec{p}$ são os mesmos do vetor que liga a carga $q_2(t)$ à carga $q_1(t)$. O momento de dipolo elétrico varia segundo a expressão $p(t) = p_0 \cos(\omega t)$. Por simplicidade, considere o vetor $\vec{a}$ orientado paralelamente ao eixo vertical $\hat{z}$ e que o centro geométrico do dipolo localiza-se na origem do sistema de coordenadas. Vamos calcular quantidades de interesse no ponto $P(\vec{r})$, distante de r_1 da carga 1 e r_2 da carga 2. Veja a figura a seguir.



O meio no qual encontra-se o dielétrico é o vácuo, cuja constante eletrostática é $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ e permeabilidade magnética μ_0.

Segundo a relatividade restrita, não é possível que a informação da variação do valor das cargas seja transmitida instantaneamente a todo o espaço. Por essa razão, consideraremos que, quando o valor de uma carga pontual sofre uma alteração, o potencial elétrico associado é 'atualizado' após um tempo de propagação com velocidade da luz c através do espaço. A mesma hipótese pode ser feita para o potencial vetor magnético gerado.

1 pt (a) Considerando que não há acumulo de cargas elétricas na haste que une as cargas $q_1(t)$ e $q_2(t)$, determine a corrente elétrica $I(t)$ associada à variação do dipolo $p(t)$.

2 pts (b) Calcule o potencial elétrico $V(\vec{r}, t)$ gerado pela superposição do potencial retardado das duas cargas. Deixe sua resposta em termos de K, q_0, r_1, r_2 e c. Considere efeitos de atraso e não faça, por ora, qualquer tipo de aproximação geométrica.

2 pts (c) Escreva a expressão do potencial vetor $A(\vec{r}, t)$ gerado pelo dipolo elétrico oscilante. Considere efeitos de atraso e não faça, por ora, qualquer tipo de aproximação geométrica.

Parte II

Um parâmetro de comprimento importante desse problema é o comprimento de onda associado à onda eletromagnética emitida pelo dipolo, $\lambda = c/\omega$. Consideraremos agora aproximações úteis que ajudam a simplificar as expressões encontradas para $V(\vec{r})$ e $\vec{A}(\vec{r})$. A primeira será a aproximação de dipolo curto ($a \ll \lambda$) e a segunda será a condição de campo distante ($r \gg \lambda$). A partir desse ponto, despreze termos de ordem superior a $1/r$. Devido aos efeitos relativísticos de retardamento dos potenciais, deixe suas respostas em termos do instante $\tau = t - r/c$.

5 pts (d) Determine a expressão do potencial elétrico $V(\vec{r},\tau)$ gerado por um dipolo elétrico curto oscilante na região de campo distante. Deixe sua resposta em termos de ω, p_0, e demais constantes físicas intervenientes.

4 pts (e) Determine a expressão do potencial vetor $\vec{A}(\vec{r},\tau)$ gerado por um dipolo elétrico curto oscilante na região de campo distante. Deixe sua resposta em termos de ω, p_0 e demais constantes físicas intervenientes.

Parte III

A partir do potencial elétrico escalar e do potencial vetor determinados na Parte II é possível determinar os campos elétricos e magnéticos gerados pelo dipolo. Por conveniência, fornecemos os campos gerados por um dipolo elétrico curto na região de campo distante

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi}\left(\frac{sen\theta}{r}\right) cos(\omega\tau)\hat{\theta}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c}\left(\frac{sen\theta}{r}\right) cos(\omega\tau)\hat{\phi}.$$

2 pts (f) Classifique a onda eletromagnética emitida pelo dipolo com respeito a sua polarização no ponto $P(r,\theta,\phi)$.

3 pts (g) Demonstre, a partir dos campos elétrico e magnético fornecidos, que o dipolo elétrico oscilante irradia energia.

1 pt (h) O dipolo elétrico oscilante é uma fonte de radiação isotrópica? Em caso negativo, indique a(s) direção(ões) em que a sua irradiação de energia é máxima.

Questão 3 **(valor: 20 pontos)**

O gás de elétrons de Fermi é um modelo quântico de elétrons distribuídos com densidade eletrônica uniforme. Nesse modelo a interação Coulombiana elétron-elétron é compensada por uma carga positiva distribuída homogeneamente no espaço. Por hipótese, os elétrons não interagem entre si.

Pode-se dizer, portanto, que trata-se da versão quântica de um gás ideal, para o caso de partículas fermiônicas, também conhecidas como Férmions. Esse tipo de partícula se caracteriza pelo spin semi-inteiro e pela obediência ao princípio de exclusão de Pauli. Apesar de muito simplificado, esse modelo é capaz de fornecer resultados bastante úteis para diferentes ramos da física, como o estudo de semicondutores, metais, núcleos atômicos e interior de estrelas.

Seja m a massa do elétron livre. Nesse problema, vamos descrever os estados quânticos eletrônicos dos elétrons contidos em um cubo de aresta L.

1 pt (a) Escreva a equação que deve ser satisfeita pelos estado quântico $\psi(x, y, z)$ estacionário de um elétron no gás de Fermi.

3 pts (b) O tratamento de um sistema infinito pode ser trocado pela consideração de condições periódicas de contorno nas paredes do cubo, isto é

$$\psi(x, y, z) = \psi(x + L, y, z) = \psi(x, y + L, z) = \psi(x, y, z + L)\,.$$

Resolva a equação encontrada no item anterior aplicando as condições de contorno periódicas fornecidas.

1 pt (c) Normalize a função de onda encontrada considerando o volume interno do cubo de aresta L.

2 pts (d) É possível escrever as soluções encontradas como

$$\Psi_{k_x,k_y,k_z}(x, y, z) = Ae^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}\,.$$

Calcule a energia de um elétron no estado eletrônico $\Psi_{k_x,k_y,k_z}(x, y, z)$ em termos de m, k_x,k_y, k_z e constantes físicas.

1 pt (e) Calcule o comprimento de onda de de Broglie de um elétron no estado $\Psi_{k_x,k_y,k_z}(x, y, z)$ em termos de k_x,k_y e k_z.

6 pts (f) Considere a seguir que a densidade eletrônica do gás de fermi é dada por $n = N/L^3$, onde $N \gg 1$ é o número total de elétrons. A energia cinética **máxima** de um elétron no gás de Fermi no seu estado fundamental pode ser escrita como

$$E_{max} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}\,.$$

em que k_F é conhecido como *número de onda de Fermi*. Calcule o valor de k_F em termos de n.

6 pts (g) Calcule a energia **média** por elétron em função de $\hbar$, massa do elétron m e densidade eletrônica n à temperatura de $T = 0$ K.

Dica: Caso necessário, utilize o operador momento $\hat{p} = -i\hbar\nabla$.