# Caracterização de Coloides do Solo (10 pontos)

A ciência coloidal é útil para caracterizar as partículas do solo porque muitas delas podem ser consideradas como partículas coloidais de tamanho micrométrico. Por exemplo, o movimento browniano (movimento aleatório de partículas coloidais) pode ser utilizado para medir o tamanho das partículas.

## Parte A. Movimentos de partículas coloidais (1,6 pontos)

Analisamos o movimento browniano unidimensional de uma partícula coloidal com massa $M$. A equação de movimento para a sua velocidade $v(t)$ é a seguinte:

$$M\dot{v} = -\gamma v(t) + F(t) + F_{\mathrm{ext}}(t), \tag{1}$$

em que $\gamma$ é o coeficiente de atrito, $F(t)$ é uma força devida a colisões aleatórias com moléculas de água, e $F_{\mathrm{ext}}(t)$ é uma força externa. Na Parte A, assumimos que $F_{\mathrm{ext}}(t) = 0$.

| | | |
|---|---|---|
| **A.1** | Considere que uma molécula de água colide com a partícula em $t = t_0$, dando impulso $I_0$, e, a partir de então, $F(t) = 0$. Se $v(t) = 0$ antes da colisão, $v(t) = v_0 e^{-(t-t_0)/\tau}$ para $t > t_0$. Determine $v_0$ e $\tau$, utilizando $I_0$ e os parâmetros necessários na Eq. (1). | 0.8pt |

A seguir, você pode utilizar $\tau$ nas suas respostas.

| | | |
|---|---|---|
| **A.2** | Na verdade, as moléculas de água, uma após a outra, colidem sucessivamente com a partícula. Suponha que a $i$-ésima colisão dá um impulso $I_i$ no instante $t_i$ e determine $v(t)$ na condição em que $t > 0$ e $v(0) = 0$. Apresente também a desigualdade que especifica o intervalo de $t_i$ que deve ser considerado para um dado $t$. Na folha de respostas, não é necessário especificar este intervalo na expressão para $v(t)$. | 0.8pt |

## Parte B. Equação de movimento efetiva (1,8 pontos)

Os resultados obtidos até agora implicam que as velocidades das partículas $v(t)$ e $v(t')$ podem ser consideradas como quantidades aleatórias não correlacionadas se $|t - t'| \gg \tau$. Sendo assim, introduzimos um modelo teórico para descrever aproximadamente o movimento browniano unidimensional, onde a velocidade muda aleatoriamente em cada intervalo de tempo $\delta$ $(\gg \tau)$, ou seja,

$$v(t) = v_n \quad (t_{n-1} < t \leq t_n), \tag{2}$$

com $t_n = n\delta$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ e uma quantidade aleatória $v_n$, que satisfaz

$$\langle v_n \rangle = 0, \quad \langle v_n v_m \rangle = \begin{cases} C & (n = m), \\ 0 & (n \neq m), \end{cases} \tag{3}$$

com um parâmetro $C$ que depende de $\delta$. Aqui $\langle X \rangle$ indica o valor esperado de $X$. Ou seja, se sortear números aleatórios $X$ infinitas vezes, a média será $\langle X \rangle$.

Consideramos agora o deslocamento da partícula $\Delta x(t) = x(t) - x(0)$ para $t = N\delta$, com um número inteiro $N$.

| | | |
|---|---|---|
| **B.1** | Determinar $\langle \Delta x(t) \rangle$ e $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ utilizando $C$, $\delta$, e $t$. | 1.0pt |

**B.2** A quantidade $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ é designada por deslocamento quadrático médio (MSD). Ela é uma grandeza observável caraterística do movimento Browniano, que corresponde ao caso limite $\delta \to 0$. A partir daí, podemos mostrar que $C \propto \delta^\alpha$ e $\langle \Delta x(t)^2 \rangle \propto t^\beta$. Determine os valores de $\alpha$ e $\beta$. 0.8pt

## Parte C. Eletroforese (2,7 pontos)

Agora discutiremos a eletroforese, ou seja, o transporte de partículas carregadas por um campo elétrico. Uma suspensão de partículas coloidais com massa $M$ e carga $Q$ $(> 0)$ é colocada num canal estreito com uma secção transversal $A$ (Fig. 1(a)). Ignoramos a interação entre as partículas, os efeitos da parede, do fluido, dos íons nele contidos e da gravidade.

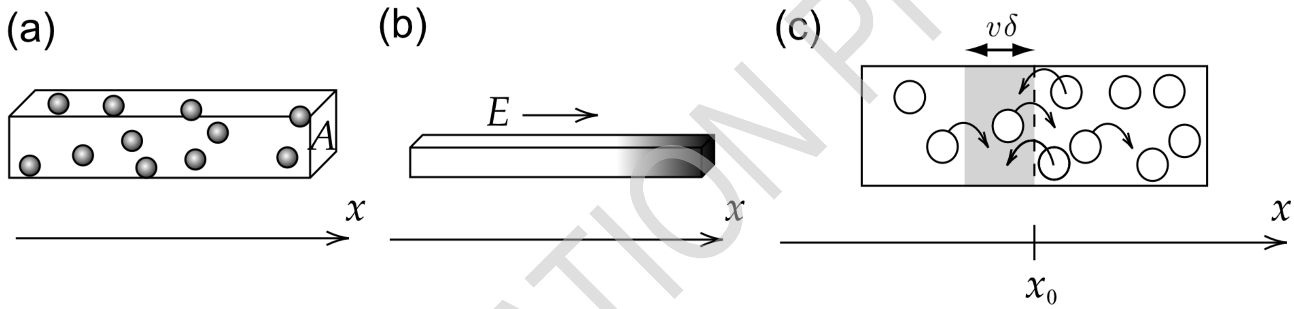



Fig. 1: Configuração para a Parte C.

Ao aplicar um campo elétrico uniforme $E$ na direção $x$, as partículas são transportadas e a sua concentração $n(x)$ (número de partículas por unidade de volume) torna-se não uniforme (Fig. 1(b)). Quando $E$ é removido, esta não uniformidade desaparece gradualmente. Este fato deve-se ao movimento browniano das partículas. Se $n(x)$ não for uniforme, os números de partículas que vão para a direita e para a esquerda podem diferir (Fig. 1(c)). Isto gera um fluxo de partículas $J_D(x)$, o número médio de partículas que fluem ao longo do eixo $x$ na posição $x$ por unidade de área de seção transversal e unidade de tempo. Sabe-se que este fluxo satisfaz

$$J_D(x) = -D\frac{dn}{dx}(x), \tag{4}$$

onde $D$ é o coeficiente de difusão.

Agora vamos supor, por simplicidade, que metade das partículas tem velocidade $+v$ e a outra metade tem velocidade $-v$. Seja $N_+(x_0)$ o número de partículas com velocidade $+v$ que atravessam $x_0$ da esquerda para a direita por unidade de área de seção transversal e unidade de tempo. Para que as partículas com velocidade $+v$ atravessem $x_0$ no intervalo de tempo $\delta$ elas devem estar na região sombreada da Fig. 1(c). Como $\delta$ é pequeno, temos que $n(x) \simeq n(x_0) + (x - x_0)\frac{dn}{dx}(x_0)$ nesta região.

**C.1** Determine $N_+(x_0)$ utilizando os parâmetros necessárias entre$v$, $\delta$, $n(x_0)$, e $\frac{dn}{dx}(x_0)$. 0.5pt

Definimos $N_-(x_0)$ como a contrapartida de $N_+(x_0)$ para a velocidade $-v$. Com isso, temos $J_D(x_0) = \langle N_+(x_0) - N_-(x_0) \rangle$. De acordo com a Eq. (3), temos $\langle v^2 \rangle = C$.

| | | |
|---|---|---|
| **C.2** | Determine $J_D(x_0)$ utilizando os parâmetros necessários entre $C$, $\delta$, $n(x_0)$, e $\frac{dn}{dx}(x_0)$. Utilizando isto e a Eq. (4), determine $D$ em termos de $C$ e $\delta$, e $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ em termos de $D$ e $t$. | 0.7pt |

Discutimos agora o efeito da pressão osmótica $\Pi$. Esta é dada por $\Pi = \frac{n}{N_A}RT = nkT$ com a constante de Avogadro $N_A$, a constante dos gases $R$, a temperatura $T$, e a constante de Boltzmann $k = \frac{R}{N_A}$. Consideremos a concentração não uniforme formada sob o campo elétrico $E$ (Fig. 1(b)). Como $n(x)$ depende de $x$, o mesmo acontece com $\Pi(x)$. Assim, as forças devidas a $\Pi(x)$ e $\Pi(x+\Delta x)$ devem ser equilibradas com a força total do campo $E$ que atua sobre as partículas (Fig. 2). Neste caso, consideramos $\Delta x$ pequeno, de modo que $n(x)$ pode ser considerado constante neste intervalo, enquanto $n(x+\Delta x) - n(x) \simeq \Delta x \frac{dn}{dx}(x)$.

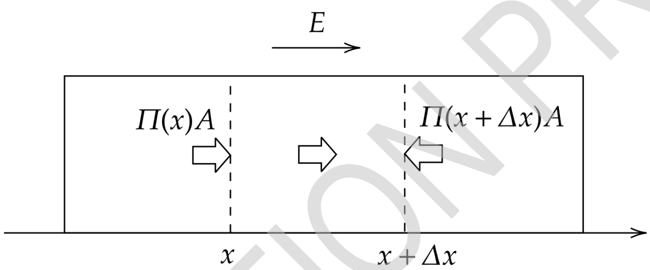



Fig. 2: Equilíbrio de forças.

| | | |
|---|---|---|
| **C.3** | Determine $\frac{dn}{dx}(x)$ utilizando $n(x)$, $T$, $Q$, $E$, e $k$. | 0.5pt |

Vamos agora discutir o equilíbrio do fluxo. Para além do fluxo $J_D(x)$ devido ao movimento browniano, existe também um fluxo devido ao campo elétrico, $J_Q(x)$. Este fluxo é dado por

$$J_Q(x) = n(x)u, \tag{5}$$

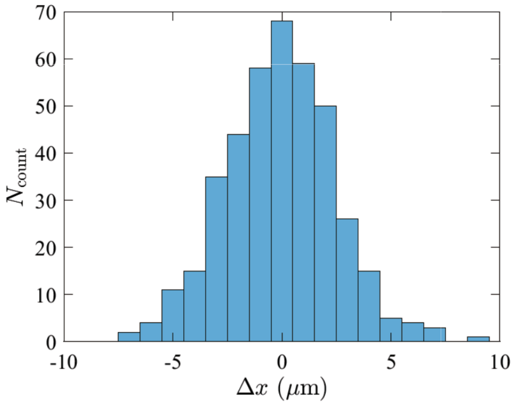
onde $u$ é a velocidade terminal das partículas movidas pelo campo.

| | | |
|---|---|---|
| **C.4** | Para determinar $u$, utilizamos a Eq. (1) com $F_{\text{ext}}(t) = QE$. Como $v(t)$ é flutuante, consideramos $\langle v(t) \rangle$. Assumindo $\langle v(0) \rangle = 0$ e utilizando $\langle F(t) \rangle = 0$, avaliamos $\langle v(t) \rangle$ e obtemos $u = \lim_{t\to\infty} \langle v(t) \rangle$. | 0.5pt |

| | | |
|---|---|---|
| **C.5** | O equilíbrio do fluxo lê-se em $J_D(x) + J_Q(x) = 0$. Exprima o coeficiente de difusão $D$ em termos de $k$, $\gamma$ e $T$. | 0.5pt |

## Parte D. Deslocamento quadrático médio (2,4 pontos)

Suponhamos que observamos o movimento browniano de uma partícula coloidal esférica isolada, de raio $a = 5.0\ \mu$m, em água. A figura 3 mostra o histograma dos deslocamentos $\Delta x$ medidos na direção $x$ em cada intervalo $\Delta t = 60$ s. O coeficiente de atrito é dado por $\gamma = 6\pi a \eta$ com a viscosidade da água $\eta = 8.9 \times 10^{-4}$ Pa $\cdot$ s e a temperatura $T = 25\ ^\circ$C.




| $\Delta x$ ($\mu$m) | $-10$ | $-9$ | $-8$ | $-7$ | $-6$ | $-5$ | $-4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_{\rm count}$ | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 11 | 15 |

| $\Delta x$ ($\mu$m) | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_{\rm count}$ | 35 | 44 | 58 | 68 | 59 | 50 | 26 |

| $\Delta x$ ($\mu$m) | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_{\rm count}$ | 15 | 5 | 4 | 3 | 0 | 1 | 0 |

Fig. 3: Histograma de deslocamentos.

**D.1** Estimar o valor de $N_A$ sem utilizar o fato de ser a constante de Avogadro, até dois algarismos significativos, a partir dos dados da Fig. 3. A constante dos gases é $R = 8.31$ J/K · mol. Não utilizar o valor da constante de Boltzmann $k$ indicado nas Instruções Gerais. Quanto à constante de Avogadro, poderá obter um valor diferente do indicado nas Instruções Gerais. 1.0pt

Agora estendemos o modelo da Parte B para descrever o movimento de uma partícula com carga $Q$ sob um campo elétrico $E$. A velocidade da partícula $v(t)$ considerada na Eq. (2) deve ser substituída por $v(t) = u + v_n\ (t_{n-1} < t \leq t_n)$ com $v_n$ satisfazendo a Eq. (3) e $u$ sendo a velocidade terminal considerada na Eq. (5).

**D.2** Determine o MSD $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ em termos de $u$, $D$, e $t$. Obtenha leis de potência aproximadas para $t$ pequeno e $t$ grande, bem como o tempo caraterístico $t_*$ em que esta mudança ocorre. Esboce um gráfico aproximado do MSD numa escala log-log, indicando a localização aproximada de $t_*$. 0.8pt

Em seguida, consideramos micróbios nadadores (Fig. 4(a)), em uma dimensão, para simplificar (Fig. 4(b)). Trata-se de partículas esféricas com raio $a$. Elas nadam com velocidade $+u_0$ ou$-u_0$, sendo o sinal escolhido aleatoriamente, sem correlação, em cada intervalo de tempo $\delta_0$ . O movimento observado é uma combinação de deslocamentos devidos ao nado e de deslocamentos devidos ao movimento browniano de uma partícula esférica.

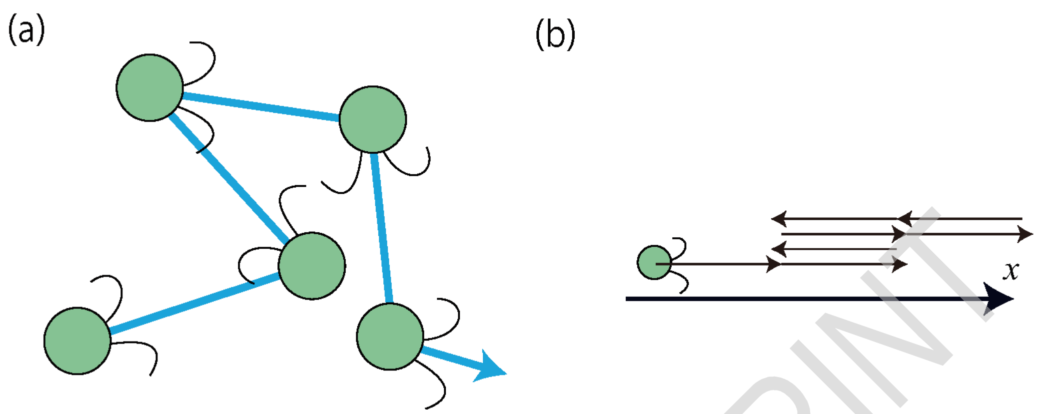



Fig. 4: (a) Movimento dos micróbios. (b) A sua versão unidimensional.

**D.3** A Figura 5 apresenta o MSD $\langle \Delta x(t)^2 \rangle$ desses micróbios, mostrando diferentes leis de potência para valores de $t$ pequenos, grandes e intermediários, conforme indicado pelas linhas tracejadas. Obtenha a lei de potência para cada intervalo de tempo e expresse-a utilizando os parâmetros necessárias entre $D, u_0, \delta_0$, e $t$. **0.6pt**

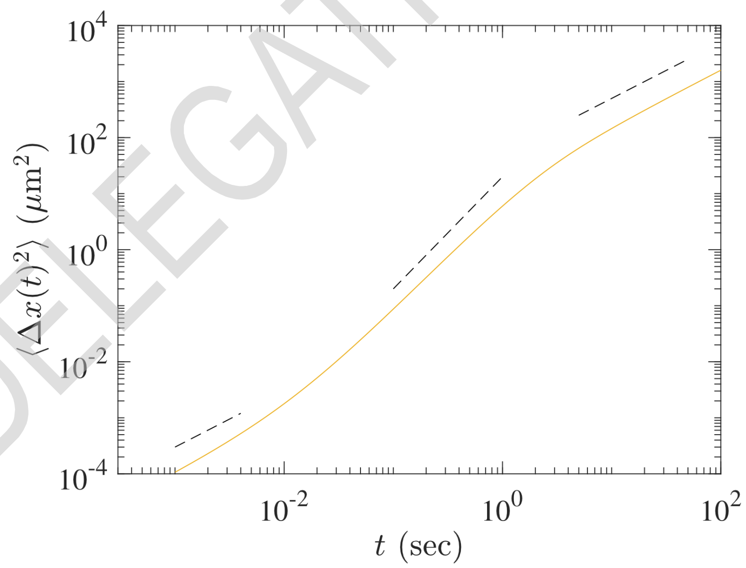



Fig. 5: Deslocamento quadrático médio dos micróbios.

## Parte E. Purificação da água (1,5 pontos)

Agora discutiremos a purificação da água, incluindo partículas de solo semelhantes a coloides, através da adição de eletrólitos para que se coagulem. As partículas interagem através da força de Van der Waals e da força eletrostática, esta última incluindo os efeitos das cargas superficiais e da camada circundante de íons de carga oposta (estes íons e a sua camada são designados por contra-íons e dupla camada elétrica, respetivamente; ver Fig. 6(a)). Como resultado, o potencial de interação para a distância da partícula $d$ (Fig. 6(b)) é dado por

$$U(d) = -\frac{A}{d} + \frac{B\epsilon(kT)^2}{q^2}e^{-d/\lambda}, \tag{6}$$

em que $A$ e $B$ são constantes positivas, $\epsilon$ é a constante dielétrica da água e $\lambda$ é a espessura da dupla camada elétrica. Assumindo que as cargas dos íons são $\pm q$, temos

$$\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon kT}{2N_A q^2 c}} \tag{7}$$

em que $c$ é a concentração molar do íon, $c$.

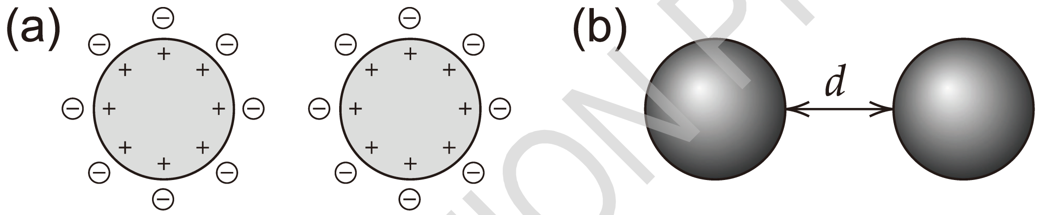



Fig. 6: (a) Cargas superficiais das partículas coloidais e dos contra-íons. (b) Definição da distância $d$.

| | | |
|---|---|---|
| **E.1** | A adição de cloreto de sódio (NaCl) à suspensão provoca a coagulação das partículas coloidais. Determine a menor concentração $c$ de NaCl necessária para a coagulação. É suficiente considerar duas partículas sem flutuações térmicas, ou seja, $F(t) = 0$ na Eq. (1), e assumir que a velocidade terminal para uma dada força conservativa é atingida instantaneamente. | 1.5pt |

# Estrelas de Nêutrons (10 pontos)

Discutiremos a estabilidade dos núcleos grandes e estimaremos, teórica e experimentalmente, a massa das estrelas de nêutrons.

## Parte A. Massa e estabilidade dos núcleos (2,5 pontos)

A energia de repouso $m(Z,N)c^2$ de um núcleo constituído por $Z$ prótons e $N$ nêutrons é menor do que a soma das energias de repouso dos prótons e nêutrons, a seguir designados por núcleons, pela energia de ligação $B(Z,N)$, em que $c$ é a velocidade da luz no vácuo. Ignorando pequenas correções, podemos aproximar a energia de ligação que contém os seguintes termos: de volume, com $a_V$, de superfície, com $a_S$, de energia de Coulomb, com $a_C$, e de energia de simetria, com $a_{\text{sym}}$, da seguinte forma.

$$m(Z,N)c^2 = Am_N c^2 - B(Z,N), \qquad B(Z,N) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N-Z)^2}{A}, \tag{1}$$

em que $A = Z + N$ é o número de massa e $m_N$ é a massa do núcleon. No cálculo, utilize $a_V \approx 15.8\ \mathrm{MeV}$, $a_S \approx 17.8\ \mathrm{MeV}$, $a_C \approx 0.711\ \mathrm{MeV}$, e $a_{\text{sym}} \approx 23.7\ \mathrm{MeV}$ (MeV = $10^6$ elétrons-volt).

| | | |
|---|---|---|
| **A.1** | Sob a condição de $Z = N$, determine $A$ para maximizar a energia de ligação por núcleon, $B/A$. | 0.9pt |

| | | |
|---|---|---|
| **A.2** | Sob a condição de $A$ fixo, o número atômico $Z^*$ do núcleo mais estável é determinado pela maximização de $B(Z, A-Z)$. Para $A = 197$, calcule $Z^*$ usando a Eq. (1). | 0.9pt |

**A.3** Um núcleo com grande $A$ quebra-se em núcleos mais leves através da fissão, de modo a minimizar a energia total da massa de repouso. Para simplificar, consideramos uma das múltiplas maneiras de partir um núcleo com $(Z,N)$ em dois núcleos iguais, o que ocorre quando a seguinte relação de energia é válida, **0.7pt**

$$m(Z,N)c^2 > 2m(Z/2, N/2)c^2,$$

Quando esta relação é escrita como

$$Z^2/A > C_{\text{fission}} \frac{a_S}{a_C},$$

obtenha $C_{\text{fission}}$ com até dois algarismos significativos.

## Parte B. A estrela de nêutrons como um núcleo gigantesco (1,5 ponto)

Para núcleos grandes com um número de massa suficientemente grande $A > A_c$ com um limiar $A_c$ , estes núcleos permanecem estáveis contra a fissão nuclear devido à energia de ligação suficientemente grande devido à gravidade.

| | | |
|---|---|---|
| **B.1** | Assumimos que $N = A$ e $Z = 0$ é possível para $A$ suficientemente grande e a Eq. (1) permanece válida com a adição da energia de ligação gravitacional. A energia de ligação devido à gravidade é $$B_{\text{grav}} = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R},$$ em que $M = m_N A$ e $R = R_0 A^{1/3}$ com $R_0 \simeq 1.1 \times 10^{-15}$ m $= 1.1$ fm correspondem a massa e o raio do núcleo, respectivamente. Para $B_{\text{grav}} = a_{\text{grav}} A^{5/3}$ , obter $a_{\text{grav}}$ , em MeV, até o primeiro algarismo significativo. Em seguida, ignorando o termo de superfície, estime $A_c$ até o primeiro algarismo significativo. No cálculo, utilize $m_N c^2 \simeq 939$ MeV e $G = \hbar c / M_P^2$ , em que $M_P c^2 \simeq 1.22 \times 10^{22}$ MeV e $\hbar c \simeq 197$ MeV · fm. | 1.5pt |

## Parte C. Estrela de nêutrons em um sistema binário (6,0 pontos)

Algumas estrelas de nêutrons são pulsares que emitem regularmente, a um período constante, ondas eletromagnéticas que chamamos "luz", para simplificar. As estrelas de nêutrons formam frequentemente sistemas binários com anãs brancas. Consideremos a configuração estelar mostrada na Fig. 1, em que um pulso de luz emitido por uma estrela de nêutrons **N** para a Terra **E** passa perto de uma anã branca **W** do sistema binário. A medição destes pulsos influenciados pela gravidade da estrela permite estimar com exatidão a massa de **W**, como se explica a seguir, o que resulta na estimativa da massa de **N**.

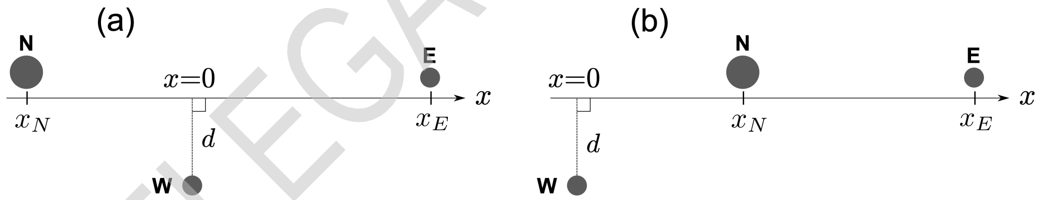
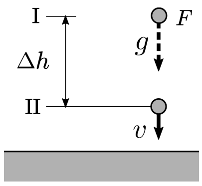



Fig. 1: Configurações com o eixo $x$ ao longo da linha que liga **N** e **E**. (a) para $x_N < 0$ e (b) para $x_N > 0$.

**C.1** Como mostra a figura abaixo, sob a aceleração gravitacional constante $g$ , colocamos dois níveis I e II com a diferença de altura $\Delta h (> 0)$. Coloque relógios idênticos em I, II e $F$, o sistema em queda livre, designados por relógio-I, relógio-II e relógio-$F$, respetivamente. 1.0pt




Montagem do experimento mental.

Assumimos que um observador se senta com o relógio-$F$, e inicialmente $F$, com velocidade nula, é colocado à mesma altura que o relógio-I. Como os relógios são idênticos, registram intervalos de tempo iguais, $\Delta\tau_F = \Delta\tau_{\mathrm{I}}$. Em seguida, deixamos $F$ cair livremente e trabalhamos no referencial de $F$, que é considerado inercial. Neste referencial, o relógio-II passa pelo relógio-$F$ com velocidade $v$, de modo que a dilatação do tempo do relógio-II pode ser determinada pela transformação de Lorentz. Quando o tempo $\Delta\tau_{\mathrm{I}}$ passa no relógio-$F$, o tempo $\Delta\tau_{\mathrm{II}}$ passa no relógio-II.
Determine $\Delta\tau_{\mathrm{II}}$ em termos de $\Delta\tau_{\mathrm{I}}$ até a primeira ordem em $\Delta\phi/c^2$, em que $\Delta\phi = g\Delta h$ é uma diferença de potencial gravitacional, *isto* é, a energia potencial gravitacional por unidade de massa.

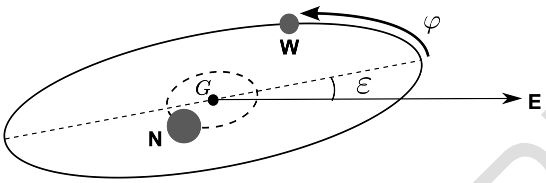
**C.2** Sob o potencial gravitacional $\phi$, os atrasos temporais alteram a velocidade efetiva da luz, $c_{\text{eff}}$, observada no infinito, embora a velocidade local da luz seja $c$. Quando $\phi(r = \infty) = 0$, $c_{\text{eff}}$ pode ser dado até a primeira ordem em $\phi/c^2$ como 1.8pt

$$c_{\text{eff}} \approx \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c$$

incluindo o efeito de distorção do espaço, que não foi apresentado em **C.1**. Note que a trajetória da luz pode ser aproximada como uma linha reta.
Como mostrado na Fig. 1(a), tomamos o eixo $x$ ao longo da trajetória da luz desde a estrela de nêutrons **N** até à Terra **E** e colocamos $x = 0$ no ponto em que a anã branca **W** está mais próxima da trajetória da luz. Seja $x_N\,(< 0)$ a coordenada $x$ de **N**, $x_E\,(> 0)$ a de **E** e $d$ a distância entre **W** e a trajetória da luz. Estime as alterações do tempo de chegada $\Delta t$ da luz de **N** para **E** causadas pela anã branca com massa $M_{\text{WD}}$ e avalie a resposta de forma simples, desprezando termos de ordem superior das seguintes pequenas quantidades: $d/|x_N| \ll 1$, $d/x_E \ll 1$, e $GM_{\text{WD}}/(c^2 d) \ll 1$. Se necessário, use a seguinte fórmula.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+d^2}} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{x^2+d^2}+x}{\sqrt{x^2+d^2}-x}\right) + C. \qquad (\log \text{ é o logaritmo natural})$$

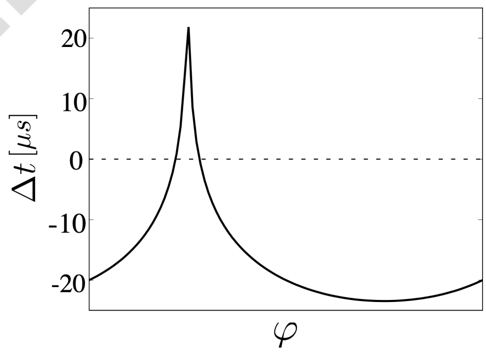
**C.3** Como mostrado abaixo, em um sistema estelar binário, supõe-se que **N** e **W** se movem em órbitas circulares com excentricidade zero em torno do centro de massa $G$ no plano de órbita. Sejam $\varepsilon$ o ângulo de inclinação orbital medido desde o plano de órbita até a linha dirigida de $G$ para **E** , $L$ o comprimento entre **N** e **W**, e $M_{\mathrm{WD}}$ a massa da anã branca. No que se segue, assumimos $\varepsilon \ll 1$. 1.8pt




Sistema estelar binário.

Observamos pulsos luminosos emitidos por **N** em **E**, longe de **N**. O percurso da luz até **E** varia com o tempo, dependendo da configuração de **N** e **W.** O atraso no intervalo de tempo de chegada dos pulsos a **E** tem o valor máximo $\Delta t_{\text{max}}$ para $x_N \simeq -L$ e o valor mínimo $\Delta t_{\text{min}}$ para $x_N \simeq L$ (ver Fig. 1(b) para a configuração). Calcule $\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}}$ de uma forma simples, desprezando os termos de ordem superior de pequenas quantidades, como se fez em **C.2**. Note que se supõe que os atrasos devidos à gravidade de objetos estelares que não **W** se anulam em $\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}}$.

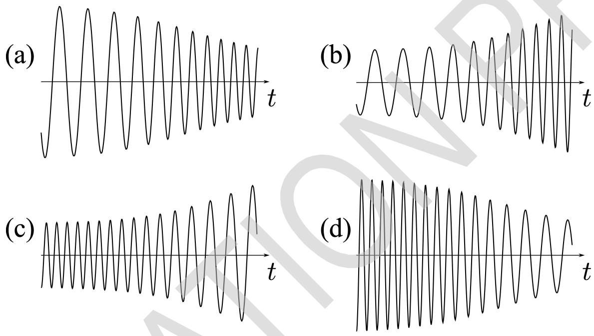
**C.4** A figura abaixo mostra os atrasos observados em função da fase orbital $\varphi$ para o sistema estelar binário com $L \approx 6 \times 10^6\,\mathrm{km}$ e $\cos\varepsilon \approx 0.99989$. Estime $M_{\mathrm{WD}}$ em termos da massa solar $M_\odot$ e apresente os resultados para $M_{\text{WD}}/M_\odot$ até o primeiro algarismo significativo. Aqui a relação aproximada $GM_\odot/c^3 \approx 5\,\mu\mathrm{s}$ pode ser usada. 0.8pt




Atrasos de tempo observados $\Delta t$ em função da fase orbital $\varphi$ (veja a figura em **C.3**) para localizar **N** e **W** nas órbitas.

**C.5** No sistema binário de estrelas de nêutrons, duas estrelas liberam energia e momento angular através da emissão de ondas gravitacionais e eventualmente se fundem após uma colisão. Por simplicidade, considere apenas um movimento circular com o raio $R$ e a velocidade angular $\omega$ e, com isso, $\omega = \chi R^p$ é respeitada com a constante $\chi$ que não depende nem de $\omega$ nem de $R$ , se os efeitos relativísticos forem ignorados. Determine o valor de $p$. 0.4pt

**C.6** A amplitude da onda gravitacional emitida pelo sistema binário em **C.5** é proporcional a $R^2\omega^2$. A figura abaixo mostra qualitativamente quatro perfis temporais diferentes das ondas gravitacionais observadas antes da colisão de duas estrelas. Identifique o perfil mais adequado de (a) a (d). 0.2pt




Perfis de dados observados de ondas gravitacionais.

# Água e Objetos (10 pt)

Neste problema, nós consideraremos os fenômenos causados pela interação entre água e objetos, relacionados à tensão superficial. A parte **A** trata de dinâmica, enquanto as partes **B** e **C** tratam de estática.

Se necessário, você pode utilizar o fato de que se a função $y(x)$ satisfaz a equação diferencial $y''(x) = ay(x)$ (sendo $a$ uma constante positiva), então a sua solução geral é $y(x) = Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x}$, onde $A$ e $B$ são constantes arbitrárias.

## Parte A. Aglutinação de gotas de água (2,0 pontos)

Como ilustrado na Fig. 1, considere duas gotas de água esféricas e estacionárias na superfície de um material superhidrofóbico, isto é, há intensas forças repulsivas entre a água e o material.

Inicialmente, duas gotas idênticas de água esféricas são colocadas na superfície. Em seguida, após se tocarem, estas duas gotas se aglutinam e formam uma gota de água esférica maior, que salta subitamente para cima.

| | | |
|---|---|---|
| **A.1** | O raio $a$ de ambas as gotas de água antes de se aglutinarem é igual a $100\ \mu$m. A densidade da água $\rho$ é igual a $1.00 \times 10^3$ kg/m$^3$. A tensão superficial $\gamma$ é igual a $7.27 \times 10^{-2}$ J/m$^2$.<br>Uma porção $k$ da diferença entre as energias de superfície antes e depois da aglutinação, ΔE, é transformada em energia cinética da gota de água que saltou. Determine a velocidade inicial de salto, $v$, da gota de água resultante, com dois algarismos significativos, sob as seguintes hipóteses:<br>• $k = 0.06$<br>• Antes e depois de se aglutinarem, o volume total de água é conservado. | 2.0pt |

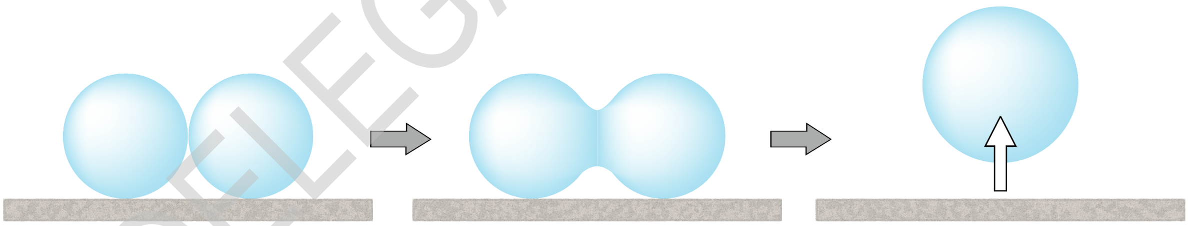


Fig. 1: Aglutinação de duas gotas de água e salto da gota de água resultante.

## Parte B. Uma placa imersa verticalmente (4,5 pontos)

Uma placa plana é imersa verticalmente em água. As figuras 2(a) e 2(b) mostram, respetivamente, as formas que a superfície da água assume para placas de materiais hidrofílicos (atrativos) e hidrofóbicos. Desconsidere a espessura da placa.

A superfície da placa está no plano $yz$ e a superfície horizontal da água, longe da placa, está no plano $xy$, com $z = 0$. A forma da superfície da água não depende da coordenada $y$. Seja $\theta(x)$ o ângulo entre a superfície da água e o plano horizontal num ponto $(x, z)$ da superfície da água no plano $xz$. Aqui $\theta(x)$ é medido em relação ao eixo positivo $x$ e a rotação no sentido anti-horário é considerada positiva. Seja $\theta_0$ o valor de $\theta(x)$ no ponto de contato entre a placa e a superfície da água ($x = 0$). A seguir, $\theta_0$ é fixado pelas propriedades do material da placa.

A densidade da água $\rho$ é constante e a tensão superficial da água $\gamma$ é uniforme. A constante de aceleração gravitacional é dada por $g$. A pressão atmosférica, $P_0$, é assumida como sendo sempre uniforme. Determinaremos a forma da superfície da água nos passos seguintes. Note que a unidade de tensão superficial é J/m$^2$ ou, também, N/m.

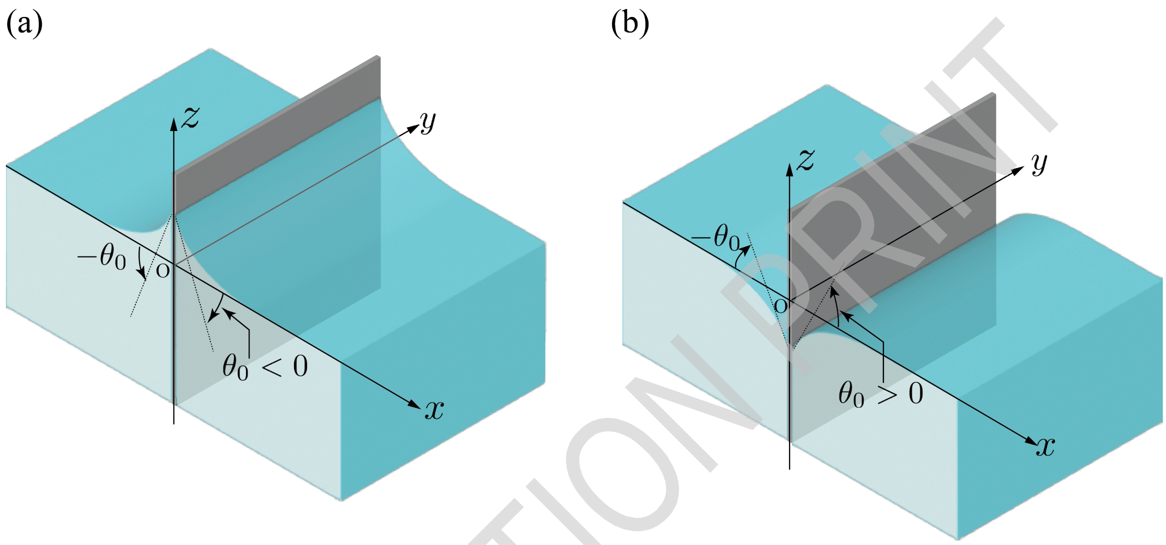



Fig. 2: Placas imersas verticalmente na água. (a) Placa hidrofílica; (b) Placa hidrofóbica.



| | | |
|---|---|---|
| **B.1** | Vamos considerar o caso de placa hidrofílica, como mostra a Fig. 2(a). Observamos que a pressão da água, $P$, satisfaz as condições $P < P_0$ para $z > 0$ e $P = P_0$ para $z = 0$. Então, determine a pressão $P$ na coordenada $z$ em termos de $\rho$, $g$, $z$, e $P_0$. | 0.6pt |

| | | |
|---|---|---|
| **B.2** | Vamos considerar um bloco de água cujo recorte é apresentado hachurado na Fig. 3(a). A sua secção transversal no plano $xz$ é mostrada na área hachurada na Fig. 3(b). Sejam $z_1$ e $z_2$, respectivamente, as coordenadas do lado esquerdo e direito da fronteira entre o bloco de água e o ar (superfície da água).<br>Obtenha $f_x$, a componente horizontal (componente $x$) da força resultante por unidade de comprimento ao longo do eixo $y$ que é exercida no bloco de água devido à pressão, em termos de $\rho$, $g$, $z_1$, e $z_2$. Note que $P_0$ não resulta em força horizontal resultante sobre o bloco de água. | 0.8pt |

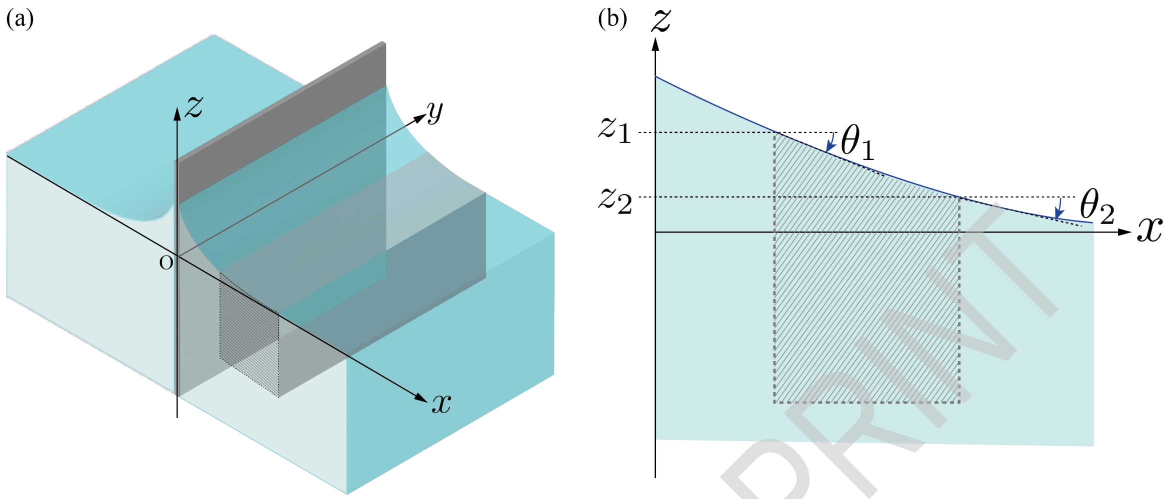



Fig. 3: Recorte de um bloco de água a partir da superfície da água. (a) Vista aérea e (b) vista da secção transversal.

| | | |
|---|---|---|
| **B.3** | A tensão superficial que atua sobre o bloco de água é equilibrada com a força $f_x$ discutida no item B.2. Definimos, respetivamente, $\theta_1$ e $\theta_2$ como os ângulos entre a superfície da água e o plano horizontal nas extremidades esquerda e direita. Expresse $f_x$ em termos de $\gamma$, $\theta_1$, e $\theta_2$. | 0.8pt |

**B.4** A seguinte equação é válida num ponto arbitrário $(x, z)$ na superfície da água, (0.8pt)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\ell}\right)^a + \cos\theta(x) = \text{constant.} \tag{1}$$

Determine o expoente $a$ e expresse a constante $\ell$ em termos de $\gamma$ e $\rho$. Note que esta equação é válida independentemente da placa ser hidrofílica ou hidrofóbica.

| | | |
|---|---|---|
| **B.5** | Na Eq. (1) em B.4, podemos assumir que a variação da superfície da água é lenta, isto é, $\lvert z'(x)\rvert \ll 1$, de tal forma que podemos expandir $\cos\theta(x)$ em relação à $z'(x)$ até à segunda ordem. Depois, diferenciando a equação resultante em relação a $x$, obtemos a equação diferencial que $z(x)$ deve satisfazer. Resolva esta equação diferencial e determine $z(x)$ para $x \geq 0$ em termos de $\tan\theta_0$ e $\ell$. Note que as direções verticais nas Figs. 2 e 3 são exageradas para uma melhor visualização e elas não satisfazem a condição $\lvert z'(x)\rvert \ll 1$. | 1.5pt |

## Parte C. Interação entre duas hastes (3,5 pontos)

As hastes idênticas A e B, feitas do mesmo material, flutuando paralelamente na superfície da água, são colocadas à mesma distância do eixo $y$ (Fig. 4).

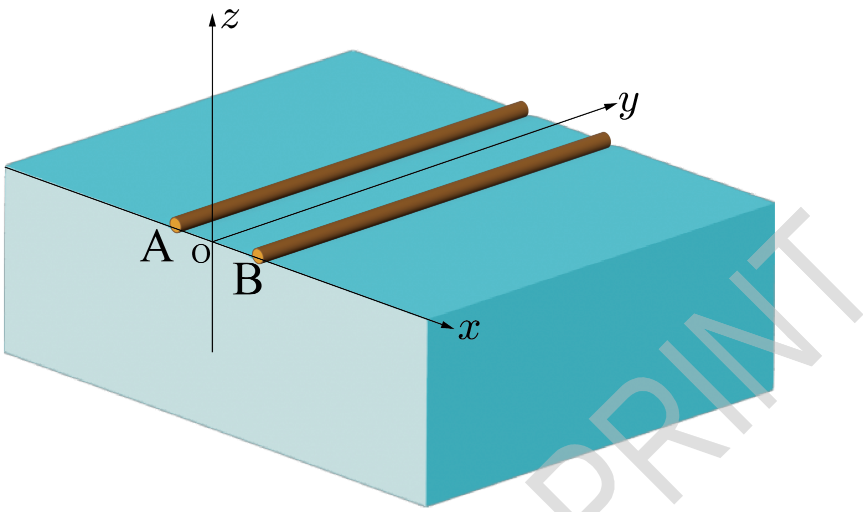



Fig. 4: Duas hastes A e B flutuando na superfície da água.

| | | |
|---|---|---|
| **C.1** | Nos pontos de contato entre a haste B e a superfície da água, definimos as coordenadas no eixo $z$, $z_a$e $z_b$ , e os ângulos $\theta_a$ e $\theta_b$, como mostra a Fig. 5. Determine $F_x$, a componente horizontal da força por unidade de comprimento ao longo do eixo $y$, na haste B, em termos de $\theta_a$, $\theta_b$, $z_a$, $z_b$, $\rho$, $g$, e $\gamma$. | 1.0pt |

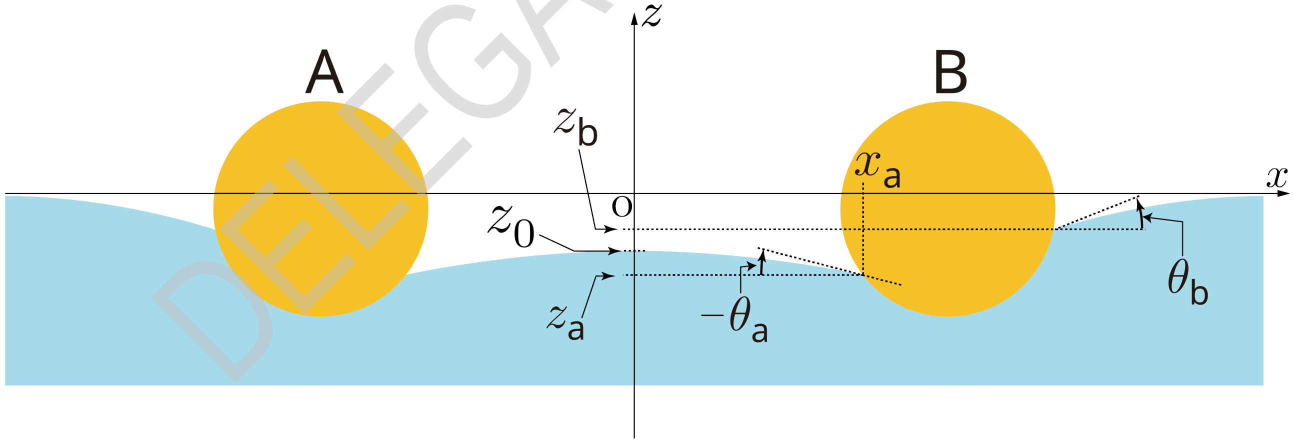



Fig. 5: Secção transversal vertical de duas hastes flutuando na superfície da água.

| | | |
|---|---|---|
| **C.2** | Definimos a coordenada $z$ da superfície da água, $z_0$, no ponto médio de duas hastes no plano $xz$. Expresse a força $F_x$ obtida em C.1 sem usar $\theta_a$, $\theta_b$, $z_a$ e $z_b$. | 1.5pt |

| | | |
|---|---|---|
| **C.3** | Seja $x_a$ a coordenada $x$ do ponto de contato entre a superfície da água e o lado esquerdo da haste B. Utilizando a equação diferencial obtida em B.4, expresse a coordenada do nível da água $z_0$ do ponto médio destas duas hastes A e B em termos de $x_a$ e $z_a$. Você pode utilizar a constante $\ell$ introduzida em B.4. | 1.0pt |