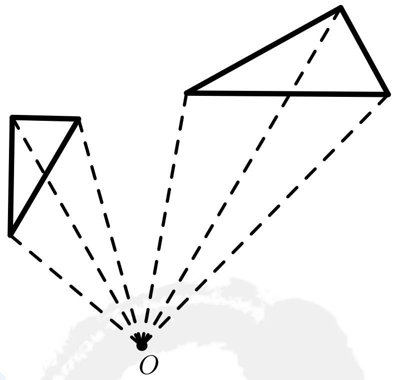
Roto Homotetia

Fábio Medeiros

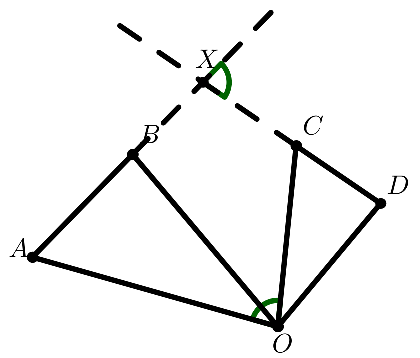
1 Introdução

Vamos tratar de um tema muito recorrente na geometria. A roto-homotetia é uma composição de uma rotação e uma dilatação.



Ainda não estudamos isso no curso, mas uma interpretação para essa transformação é a multiplicação de todos os pontos por um complexo a+bi sendo O=0.

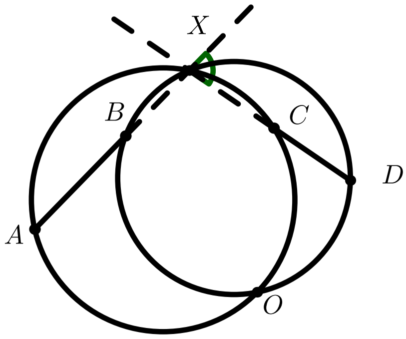
Sejam OAB e OCD dois triângulos que são roto homotéticos a partir de O. Como fazemos uma homotetia e uma rotação, os triângulos OAB e OCD são semelhantes. Uma questão intrigante é: qual o ângulo formado pelas retas AB e CD?

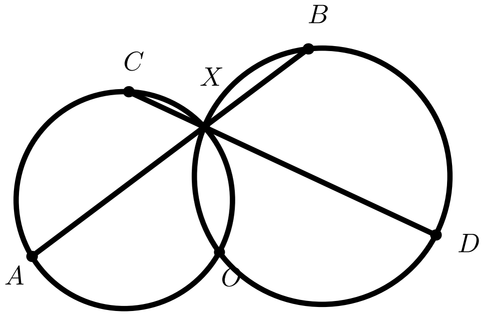


Note que, sendo $\alpha = \angle AOC$, α é o ângulo de rotação dessa transformação (pois OA vai para OC). Portanto, o ângulo em verde apresentado na figura formado pelas retas AB e CD também é α, pois é o ângulo de rotação de AB para CD. Uma prova menos abstrata desse fato é que, pela semelhança: $\angle OAB = \angle OCD \Rightarrow AOCX$ é cíclico $\Rightarrow \angle CXA = 180 - \alpha$ então o ângulo entre as retas AB e CD é α.

Lema: Dado 4 pontos A, B, C, D no plano, existe exatamente um ponto que é centro de uma roto-homotetia que leva AB em CD.

Demonstração: Vamos fazer a construção do centro, argumentando o porquê ela é única.

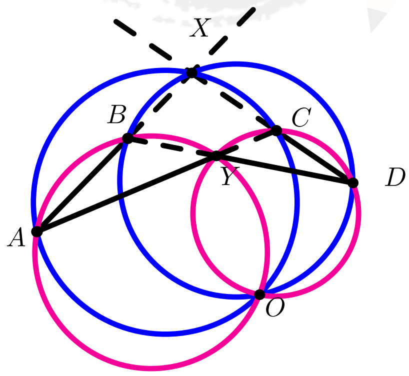




Suponha que exista algum centro, vamos provar sua unicidade. Como vimos anteriormente, o ângulo formado pelo centro de roto homotetia e AC (α de rotação) deve ser o ângulo entre as retas AB e CD ($\angle AOC = \alpha$ de rotação). Portanto, AXCO é cíclico. O mesmo vale para BXDO. Assim, $O = (AXC) \cap (BXD)$ e é único. Note que essa construção desse O satisfaz a propriedade de roto homotetia, pois: $\angle OAB = \angle OAX = \angle OCD$ e $\angle ODC = \angle ODX = \angle OBA$. Portanto, $\triangle OAB \sim \triangle OCD$ e como têm um ponto em comum, ocorre uma rotação.

Corolário: O é o centro da roto homotetia que leva AC em BD.
Demonstração: Note que $\angle OAC = \angle OXC = \angle OXD = \angle OBD$ e analogamente $\angle OCA = \angle ODB$. Desse modo, $\triangle OAC \sim \triangle OBD$.
Observação: Esse corolário é conhecido como semelhança automática, pois dado a roto homotetia de AB em CD temos a de AC em BD com o mesmo centro.

Como O é o centro da segunda roto homotetia, temos que, sendo $Y = AC \cap BD \Rightarrow O \in (ABY)$ e (CDY) pela construção do centro.



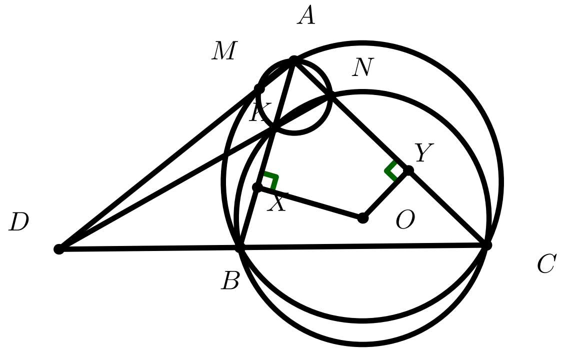
A figura acima é recorrente e podemos tomar como base o quadrilátero XBYC. Ao completarmos ele com as interseções de seus lados (A e D) temos o chamado "quadrilátero completo". O ponto O é o miquel do quadrilátero, e marcando ângulos analogamente ao processo acima, podemos provar que O também é o centro da roto homotetia que leva BY em CX e que leva BX em CY. Os temas Roto Homotetia e Miquel se misturam, recomendamos que você veja também o material de Miquel do NOIC: clique aqui. Vamos a exemplos!

2 Exemplos

2.1 *Mostrando na prática!*

Os problemas a seguir são para mostrar o que vimos até agora, é de suma importância que você **leia** as duas soluções a seguir para pegar o jeito!

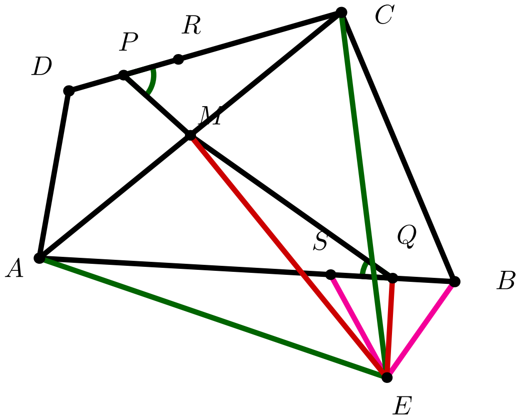
1. ***(IMO 1985)*** Um círculo de centro O passa pelos pontos B e C do triângulo ABC e intersecta AB e AC em K e N, respectivamente. Seja M o ponto de interseção dos circuncírculos de ABC e KAN. Prove que $\angle OMA = 90°$

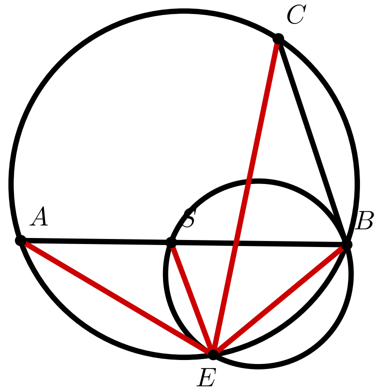


Solução: O M é o miquel do quadrilátero KNBC. Neste problema, vamos provar uma propriedade de Miquel para quando o quadrilátero em referência (KNBC) é cíclico: se KNBC é cíclico com centro O e $BK \cap CN = A$ e $KN \cap BC = D \Rightarrow M \in AD$ e $\angle OMA = 90°$

Demonstração: Note que, por centro radical em (MAKN), (MABC), (BKNC) temos que AM, KN e BC concorrem em D. Assim, $M \in AD$. Sejam X e Y os pontos médios de BK e NC, respectivamente. Perceba que M é o centro da roto homotetia que leva BK em CN, pois $BK \cap CN = A$ e $(AKN) \cap (ABC) = M$ (construção do centro de roto homotetia). Como é uma transformação que preserva razões, o ponto médio de BK vai para o ponto médio de CN. Logo X vai para Y. Portanto, M é o centro da roto homotetia que leva KX em NY. Fazendo o processo de construção de novo: $KX \cap NY = A$ e $(AKN) \cap (AXY) = M \Rightarrow M \in (AXY)$. Mas (AXY) é o círculo de diâmetro AO, pois $\angle AXO = \angle KXO = 90°$. Portanto, $\angle OMA = \angle OXA = 90°$.

2. ***(Cone Sul 2018)*** Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, onde R e S são pontos em DC e AB, respectivamente, tais que $AD = RC$ e $BC = SA$. Sejam P, Q e M os pontos médios de RD, BS e CA, respectivamente. Se $\angle MPC + \angle MQA = 90$, prove que $ABCD$ é cíclico.



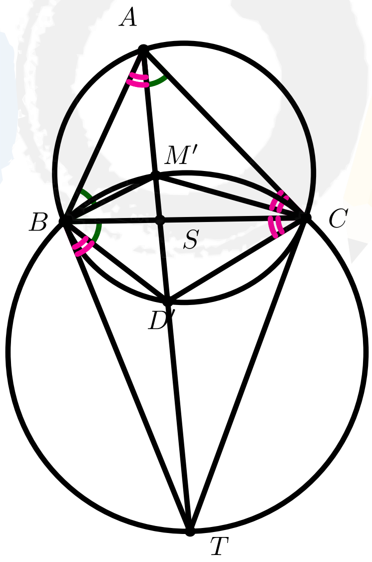


Como AS=BC, temos um indício de por onde começar! Vamos construir o centro de roto homotetia que leva AS em BC: $AS \cap BC = B$ e $(BAC) \cap (BBC) =$?! E agora? Pense que $AS \cap BC = T \neq B$. Ao aproximar T de B, o círculo TBS que vai nos auxiliar na construção vai virar tangente à reta BC. Portanto, podemos segui desse jeito: $AS \cap BC = B$ e $(BBC) \cap (BAC) = R$ onde (BBC) é o círculo que passa por B e S e é tangente à BC (essa construção vale mesmo que $AS \neq BC$).

Voltanto ao problema: como $AS = BC \Rightarrow$ é apenas uma rotação (não há dilatação). Assim, $\triangle ESA \equiv \triangle EBC \Rightarrow ES = EB$ e $EA = EC$. Seja $\angle EBS = \angle ESB = x \Rightarrow \angle ESA = 180° - x$ e $180° - x = \angle ESA = \angle EBC = \angle EBS + \angle ABC = x + \angle ABC \Rightarrow \angle ABC = 180° - 2x$. Como $ESA \to EBC \Rightarrow$ por semelhança automática $EBS \to ECA$ e $Q \to M$. Portanto, E é o centro da roto homotetia que leva $QS \to AM \Rightarrow$ por semelhança automática $QM \to AS \Rightarrow$ $180° - x = \angle ESA = \angle EQM = \angle EQS + \angle MQA = 90° + \angle MQA \Rightarrow \angle MQA = 90° - x$. Desse modo, $2\angle MQA = 180 - 2x = \angle CBA$. Fazendo o mesmo para o outro lado: $2\angle MPC = \angle ADC \Rightarrow \angle ADC + \angle ABC = 2\angle MPC + 2\angle MQA = 2 \times 90° = 180°$. Portanto $\#ABCD$ é cíclico.

(Lema Útil) Seja ABC um triângulo e D o ponto de interseção da A−simediana com o circuncírculo de ABC. Então sendo M o ponto médio de AD:

- 1. M é o centro da roto homotetia que leva $BA \to AC$
- 2. M é o centro da roto homotetia que leva $BD \to DC$
- 3. B é o centro da roto homotetia que leva $AM \to CD$ e C leva $AM \to BD$
- 4. $\triangle BDM \sim \triangle ABC \sim \triangle CDM$



1. Seja M' o centro da roto homotetia que leva $AB \to AC$ (temos a mesma construção do problema anterior: $(AAB) \cap (AAC) = M'$. Seja $T = (M'BC) \cap AM'$ e $D' = AM' \cap (ABC)$. Assim, seja $\angle M'BA = \alpha$ e $\angle M'AB = \beta \Rightarrow \alpha + \beta = \angle BM'T = \angle BCT = \angle BCD' + \angle D'CT = \angle BAD' + \angle D'CT = \beta + \angle D'CT \Rightarrow \angle D'CT = \alpha$. Mas $D'CT = \alpha = \angle M'BA = \angle M'AC \Rightarrow TC$ é tangente à (ABC). Analogamente, TB é tangente à (ABC). Portanto, AT é simediana (por construção de simediana). Assim, $D' = D$ e segue das propriedades de simediana que $(BTC) \cap AT = M$ ponto médio de AD.

2. Note que $\angle MBD = \angle MBC + \angle CBD = \angle MBC + \angle ABM = \angle ABC = \angle ADC$ e analogamente $\angle MDB = \angle MCD \Rightarrow$ M é o centro de roto homotetia que leva $BD \to DC$.

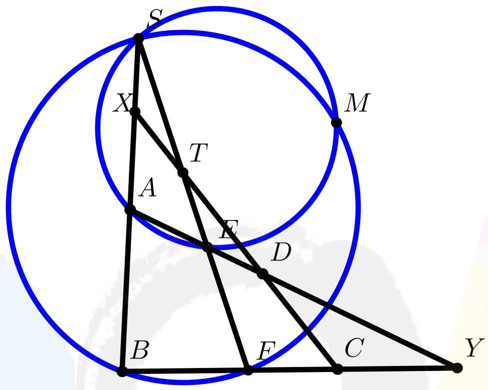
3. Pelos ângulos que já marcamos: $\angle MBA = \angle DBC$ e $\angle MAB = \angle DCB$ então $\triangle MBA \sim \triangle DBC$ e o mesmo vale para $\triangle CMA \sim \triangle CDB$.

4. Por semelhança automática nos triangulos roto homotéticos do item 3 temos $B : MD \to AC$ e $C : MD \to AB$ levando ao fato.

2.2 *Para você treinar!*

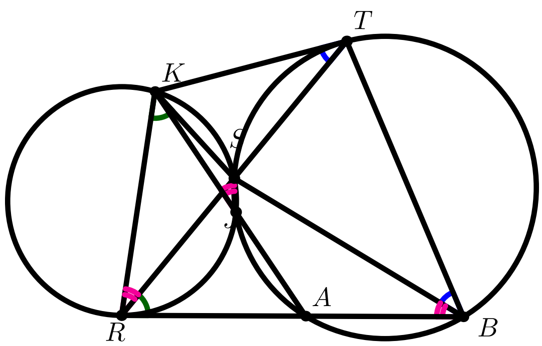
Os problemas a seguir são para você tentar, mas caso não consiga, a solução está logo abaixo!

3. ***(USAMO 2006)*** Seja $ABCD$ um quadrilátero e sejam E e F pontos nos segmentos AD e BC, respectivamente, tais que $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$. A reta FE encontra BA e CD em S e T, respectivamente. Prove que os circuncírculos dos triângulos SAE, SBF, TCF, e TDE passam por um ponto em comum.



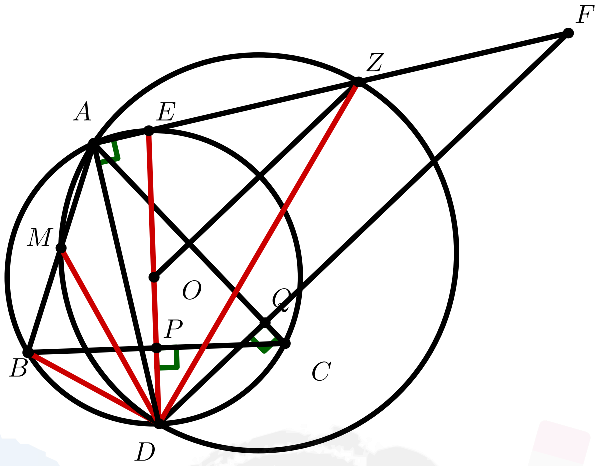
Solução: Seja M o miquel do quadrilátero ABCD. Assim, M é o centro da roto homotetia que leva AD em BC. Como $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} \Rightarrow E$ e F são correspondentes na semelhança de triângulos $\Rightarrow$ E é levado em F na roto homotetia. Portanto, M é o centro da roto homotetia que leva AE em BF. Portanto, como $S = AB \cap EF \Rightarrow M = (SAE) \cap (SBF)$. Analogamente, M é o centro da roto homotetia que leva ED em FC e $T = CD \cap EF \Rightarrow M = (TED) \cap (TFC)$. Desse modo, M está nos quatro círculos desejados.

4. ***(IMO 2017)*** Sejam R e S pontos distintos em uma circunferência Ω tais que RS não é um diâmetro. Seja ℓ a reta tangente à Ω por R. Seja T o ponto tal que S é o ponto médio do segmento RT. O ponto J é escolhido no arco menor RS de Ω tal que o circuncírculo Γ do triângulo JST intersecta ℓ em dois pontos distintos. Seja A o ponto de interseção de Γ e ℓ que é mais próximo de R. A reta AJ intersecta Ω novamente em K. Prove que KT é tangente à Γ.



Note que $\angle SKR = \angle SRB$, pois RB é tangente à Ω. Além disso, $\angle SRK = \angle SJK = \angle SBA$, pois $\#SJAB$ é cíclico. Portanto, $\triangle SRK \to \triangle SBR$. Isso nos lembra nosso **Lema Útil** visto acima: S leva $RK \to BR$ e S é o ponto médio de $RT \Rightarrow S : KT \to TB$ pelo item 2 do lema e assim $\angle STK = \angle SBT \Rightarrow KT$ é tangente à Γ.

5. (APMO 2017) Seja ABC um triângulo com $AB < AC$. Seja D o ponto de interseção da bissetriz interna do $\angle BAC$ com (ABC). Seja Z a interseção da mediatriz de AC com a bissetriz externa do $\angle BAC$. Prove que o ponto médio de AB está no circuncírculo de ADZ.



Solução: Seja M o ponto de interseção de (ADZ) com AB. Seja E o ponto de interseção da bissetriz externa do $\angle BAC$ com (ABC). Note que $\angle EAD = 90°$, pois é o ângulo formado entre as duas bissetrizes. Logo, $O \in ED$. Por construção de roto homotetia, D é o centro que leva BM em EZ ($BM \cap EZ = A$ e $(AMZ) \cap (ABE) = D$). Como A está na reta BM, podemos considerar o correspondente de A nessa transformação: seja $F \in EZ$ esse ponto (tal que D leva A em F). Sejam $P = DE \cap BC$ e $Q = DF \cap AC$. Assim, como DBA é roto homotético de DEF: $\angle QCP = \angle ACB = \angle ADB = \angle FDE = \angle QDP \Rightarrow \#PQDC$ é cíclico $\Rightarrow \angle CQD = \angle CPD = 90°$, pois ED é mediatriz de BC. Assim, DF e OZ são perpendiculares a AC $\Rightarrow DF \parallel OZ$ e O é o ponto médio de ED $\Rightarrow OZ$ é base média $\Rightarrow Z$ é ponto médio de EF. Voltando à roto homotetia, sabemos que $DBA \to DEF$ e $M \to Z$. Como Z é ponto médio de EF $\Rightarrow$ M é o ponto médio de AB.

2.3 Instruções finais

Ao realizar problemas de geometria, indícios de roto homotetia e dicas de como usá-la são:

- Dois círculos se intersectando em X e Y duas retas se intersectam em X $\Rightarrow Y$ é o centro que leva uma reta na outra (usamos isso em todos os problemas acima!).
- Segmentos que apresentam pontos neles com mesma razão (esses pontos são levados um no outro na roto homotetia).
- Se você tiver triângulos semelhantes e um ângulo de 90° a ser provado, vale a pena traçar as alturas desses triângulos (como no primeiro exemplo da IMO 1985).
- Sempre considere a semelhança automática ao ter uma roto homotetia!

A seguir deixamos mais uns problemas para você pensar.

3 Problemas Extras

Dicas e soluções dos problemas a seguir estão logo abaixo. Divirta-se!

1. (Euclid 2014) Sejam ABC e CDE dois triângulos equiláteros com B, C e D colineares e A e E no mesmo semiplano de BC. Sejam M e N os pontos médios de BE e AD. Prove que o triângulo MNC é equilátero.

2. (TST Cone Sul 2022/4) Seja ABCD um quadrilátero convexo tal que $\angle ABC = \angle ADC = 135°$. Sejam M e N pontos nas semirretas AB e AD, respectivamente, tais que $\angle MCD = \angle NCB = 90°$. As circunferências circunscritas aos triângulos AMN e ABD se intersectam em A e K. Prove que $\angle AKC = 90°$.

3. (USAMO 2013/7) Seja ABC um triângulo. Os pontos P, Q, R estão nos lados BC, CA, AB respectivamente. Sejam ω_A, ω_B, ω_C os circumcírculos dos triângulos AQR, BRP, CPQ, respectivamente. Sejam as interseções de AP com ω_A, ω_B, ω_C os pontos X, Y, Z, respectivamente, prove que $YX/XZ = BP/PC$.

4. (Amistoso Brasil-Irã/2) O círculo ω tem centro A e passa por B e C. O círculo Γ tem centro B e passa por C. Seja PQ um diâmetro variável de Γ. As retas CP e CQ intersectam ω novamente em D e E, respectivamente. As retas PQ e DE se intersectam em R. Sejam O_1 e O_2 os circuncentros de PRD e QRE. Prove que o ponto médio de O_1O_2 é um ponto fixo no plano.

5. (IMO 2014/4) Sejam P e Q pontos no segmento BC de um triângulo acutângulo ABC tais que $\angle PAB = \angle BCA$ e $\angle CAQ = \angle ABC$. Sejam M e N pontos em AP e AQ, respectivamente, tais que P é o ponto médio de AM e Q de AN. Prove que, sendo D o ponto de interseção de BM e CN, D está no circuncírculo de ABC.

6. (USA TSTST 2012) Seja ABC um triângulo e Ω seu circuncículo. Sejam D e L as interseções da bissetriz interna do $\angle BAC$ com BC e Ω, respectivamente. Seja M o ponto médio de BC. O circuncírculo de ADM intersecta AB e AC em P e Q. Seja N o ponto médio de PQ e H o pé da perpendicular de L em ND. Prove que ML é tangente ao circuncículo de HMN.

7. (Irã TST 2010/5) Os círculos W_1 e W_2 se intersectam em P e K. Seja XY a tangente comum aos dois círculos que é mais próxima de P e $X \in W_1$, $Y \in W_2$. A reta XP intersecta W_2 novamente em C e YP intersecta W_1 em B. Seja A o ponto de interseção de BX e CY. Prove que, sendo Q o segundo ponto de interseção dos circuncírculos de ABC e AXY então $\angle QXA = \angle QKP$.

8. (ISL 2006/G9) Os pontos A_1, B_1, C_1 são escolhidos nos lados BC, CA, AB do triângulo ABC, respectivamente. Os circuncírculos dos triângulos AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 intersectam o circuncírculo de ABC novamente nos pontos A_2, B_2, C_2 respectivamente ($A_2 \neq A$, $B_2 \neq B$, $C_2 \neq C$). Os pontos A_3, B_3, C_3 são os simétricos de A_1, B_1 e C_1 pelos lados BC, CA, AB, respectivamente. Prove que os triângulos $A_2B_2C_2$ e $A_3B_3C_3$ são semelhantes.

3.1 Dicas

1. Considere a roto homotetia que leva $BA \to ED$ ou $BE \to AD$ (semelhança automática. Pontos que dividemo segmento na mesma razão são mapeados!

2. Considere os pés das perpendiculares de C à AB e AD.

3. Considere a roto homotetia que leva YZ em BC.

4. Considere o centro de roto homotetia que leva PQ em ED.

5. Considere K o ponto médio de AD e tente mostrar que a configuração é a mesma do Lema Útil.

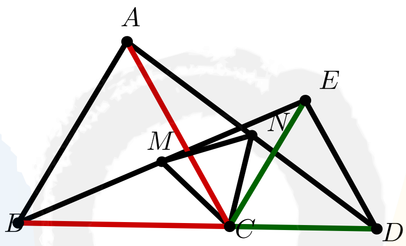
6. O centro da roto homotetia que leva PB em QC é o ponto médio do arco maior BC.

7. Ache o centro de roto homotetia que leva $CX \to YB$. Use semelhança automática e ganhe as informações sobre a nova construção do centro de roto homotetia da semelhança automática.

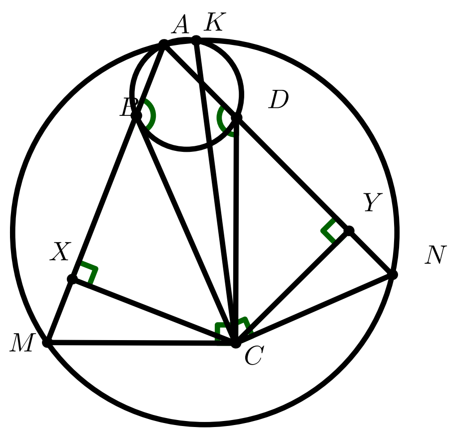
8. Ache o centro da roto homotetia que leva $C_1B_1 \to BC$. Use razões.

3.2 Soluções

1. Note que C é o centro da rotação que leva $AB \to DE$, pois $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ (você também pode fazer a construção do centro de roto-homotetia e ver que dá no mesmo). Por semelhança automática $C : BE \to AD$. Assim, $C : M \to N$ então $C : BM \to AN \Rightarrow$ semelhança automática $C : AB \to MN \Rightarrow \triangle CBA$ é semelhante ao $\triangle CMN \Rightarrow$ CMN é equilátero.

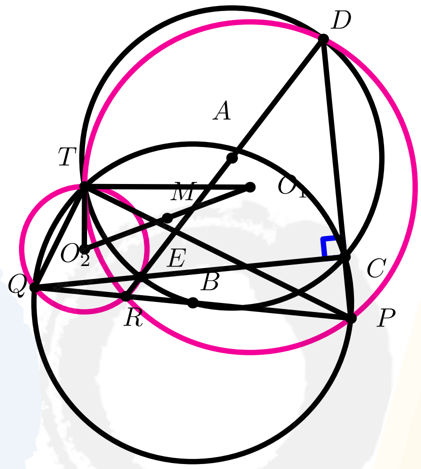


2. Note que os triângulos CMD e CDN são semelhantes, pois $\angle CBM = \angle CDN = 45°$ e $\angle BCM = 90° - \angle DCB = \angle NCD$. A construção do centro da roto homotetia que leva $BM \to ND$ é: $BM \cap ND = A$ e $(ABD) \cap (AMN) = K$. Logo, K é esse centro. Isso nos motiva a traçar X e Y os pés das perpendiculares de C à AB e AD, respectivamente. Pela semelhança: $\dfrac{BX}{XM} = \dfrac{DY}{YN}$. Assim, K leva $X \to Y$. Portanto, K leva $BX \to DY$ e pela construção do centro, sabemos que $BX \cap DY = A \Rightarrow (ABD) \cap (AXY) = K \Rightarrow K \in (AXY)$ e esse círculo possui diâmetro AC. Logo, $\angle AKC = 90°$

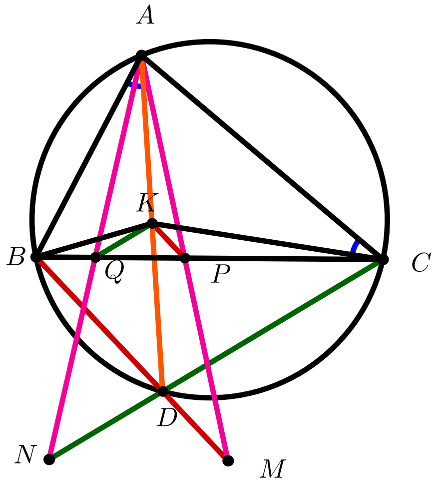


3. AOPS

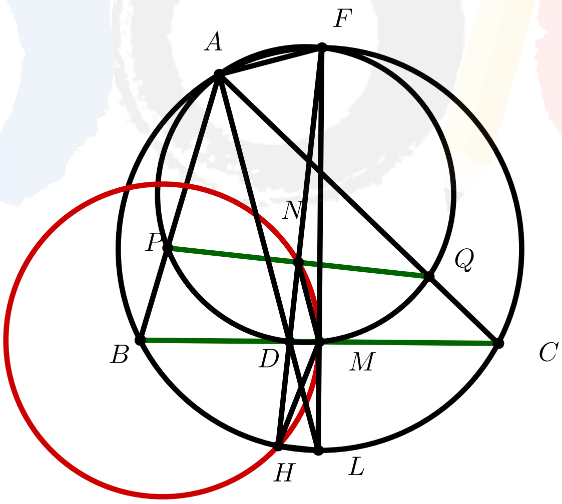
4. Note que D, A, E são colineares, pois $\angle DCE = 180 - ^\circ - \angle QCP = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow DE$ é diâmetro de ω. Seja T o miquel do quadrilátero $\#RECP$. Assim, $T = \omega \cap \Gamma$. Note que T é o centro da roto homotetia que leva $DE \to QP$, pois $DE \cap QP = R$ e $(REQ) \cap (RDP) = T$. Por semelhança automática, $T : QR \to PD \Rightarrow T : \triangle TQR \to \triangle TPD \Rightarrow T : O_1 \to O_2$ nessa roto homotetia. Portanto, novamente por semelhança automática, $T : O_1O_2 \to PQ \Rightarrow T : B \to M$. Como T e B são fixos, basta provar que o ângulo de rotação e a razão dessa transformação são fixos, pois aí M será fixo. O α de rotação é $\angle QTO_2 = \dfrac{180^\circ - \angle TO_2Q}{2} = 90^\circ - \angle TRQ = 90^\circ - \angle TDP = 90^\circ - \angle TDC$ e $\angle TDC$ é fixo, pois representa o arco $\overset{\frown}{TC}$ em ω. Sabemos também que a razão de semelhança é $\dfrac{RQ}{RO_2} = 2\sin(\angle TRQ)$ por lei dos senos e como acabamos de ver esse ângulo é fixo. Portanto, M é fixo no plano.



5. (Figura na próxima página) Seja D o ponto em (ABC) tal que AD é simediana. Seja K o ponto médio de AD. Sabemos pelo Lema Útil que $K : BA \to AC$. Vamos provar que $BM \cap CN = D \in (ABC)$ e estamos feitos. Note que, por base média no $\triangle AND : KQ \parallel ND$ e no $\triangle AMD : KP \parallel MD$. Assim, basta provar que $KQ \parallel CD$, pois então D, N e C são colineares e analogamente D, M e B também são. Para isso, note que $KQ \parallel CD \Leftrightarrow \angle KQP = \angle QCD = \angle BAD = \angle BAK \Leftrightarrow \#ABQK$ é cíclico. Mas $\angle AKB = \angle AQB = \angle QAC + \angle QCA = B + C = 180^\circ - A$. Entretanto, $\angle AKB = \alpha$ de rotação e é o ângulo orientado formado pelas retas BA e AC que é $\alpha = 180^\circ - A$. Portanto, $\angle AKB = \angle AQB \Rightarrow \#ABQK$ é cíclico e concluímos o problema.



6. Seja F o ponto médio do arco maior BC. Como o ângulo formado pelas bissetrizes interna e externa é de 90° $\Rightarrow \angle FAD = 90° = \angle FMD \Rightarrow \#FADM$ é cíclico. Portanto, F é o centro da roto homotetia que leva $BP \rightarrow QC$ pois $BP \cap QC = A$ e $(APQ) \cap (ABC) = F$. Por semelhança automática, $F : PQ \rightarrow BC$. Assim, como $FB = FC \Rightarrow FP = FQ$ e D é o ponto médio do arco menor PQ, pois está na bissetriz do $\angle PAQ$. Assim, F, N e D são colineares. Como FL é diâmetro de $\Omega \Rightarrow H \in \Omega \Rightarrow H = \Omega \cap FD$. Como $\angle LHD = \angle LMD = 90° \Rightarrow \#LMDH$ é cíclico. Note que ML é tangente à (HMN) $\Leftrightarrow \angle HNM = \angle LMH = \angle LDH \Leftrightarrow LD \parallel MN$. Perceba que isso é verdade, pois $N \rightarrow M$ na roto homotetia (são ambos pontos médios dos segmentos) e $D \rightarrow L$ (são ambos pontos médios dos circuncírculos). Assim, $\triangle FNM$ é semelhante ao $\triangle FDL \Rightarrow NM \parallel DL$.



7. AOPS

8. AOPS

4 Referências

Foram usados como referência os seguintes materiais:

- Spiral Similarity - Howard Halim
- On a special center of spiral similarity - Jafet Baca
- AOPS - Art of Problem Solving

Espero que tenha gostado do material! Qualquer dúvida ou sugestão, você pode encaminhar para mfcfabio22@gmail.com.