OBOM Soluções - Nível 1

Caique Paiva, Matheus Alencar, João Rafael

Questão 1

Escrito por Matheus Alencar
Vejamos que um número é divisível por 18 se, e somente se ele é divisível por 2 e 9, mas lembremos dos critérios de divisibilidade por 2 e 9:

- Um número é divisível por 2 se, e somente se ele é par
- Um número é divisível por 9 se, e somente a soma dos seus algarismos é múltipla de 9.

Assim, vejamos que se um número possui 1,2,3,4 e 5 na sua representação decimal e é divísivel por 9, a soma dos seus algarismos é pelo menos $1+2+3+4+5 = 15$ e é múltipla de 9. Ou seja, pelo menos 18. E que se esse mesmo número é divisível por 9 ele termina em um número par. Vamos provar que esse menor número possível é 123354:

Veja que se a soma dos algarismos for maior que 18 esse número tem, pelo menos, 7 algarismos. Já que se ele tivesse 6 algarismos, a soma dos algarismos seria no máximo $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 9 = 24 < 27$. Assim, esse número já seria maior que 123354.

Veja que isso também implica que os algarismos do menor número possível são 1,2,3 duas vezes,4 e 5. Pois são com esses algarismos que sua soma seria 18. Logo, basta que achemos o menor número par com esses algarismos, que é 123354, porque, se organizarmos os algarismos na ordem em que eles crescem, obteremos o menor número possível (basta ver que se trocarmos dois algarismos em ordem contrária à crescência diminuiríamos o número).

Questão 2

Temos que

$$a_n a_{n-2} = a_{n-1}^2 + a_{n-1}a_{n-2} \implies$$
$$\frac{a_n a_{n-2}}{a_{n-2}a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}^2 + a_{n-1}a_{n-2}}{a_{n-2}a_{n-1}}$$
$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} + 1$$

Portanto defina $q_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ para todo $n \geq 2$, logo $q_2 = 1$, portanto

$$q_n = q_{n-1} + 1$$

Logo, q_n vai ser uma P.A de razão 1, portanto

$$q_n = q_2 + (n-2) \cdot 1 = n - 1$$

Portanto

$$a_n = a_{n-1}(n-1)$$

Então

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1}(n-1) \\ a_{n-1} = a_{n-2}(n-2) \\ \cdots \\ a_3 = 2a_2 \end{cases} \implies a_n a_{n-1} \cdots a_3 = a_{n-1} \cdots a_2 (n-1) \cdots 2$$

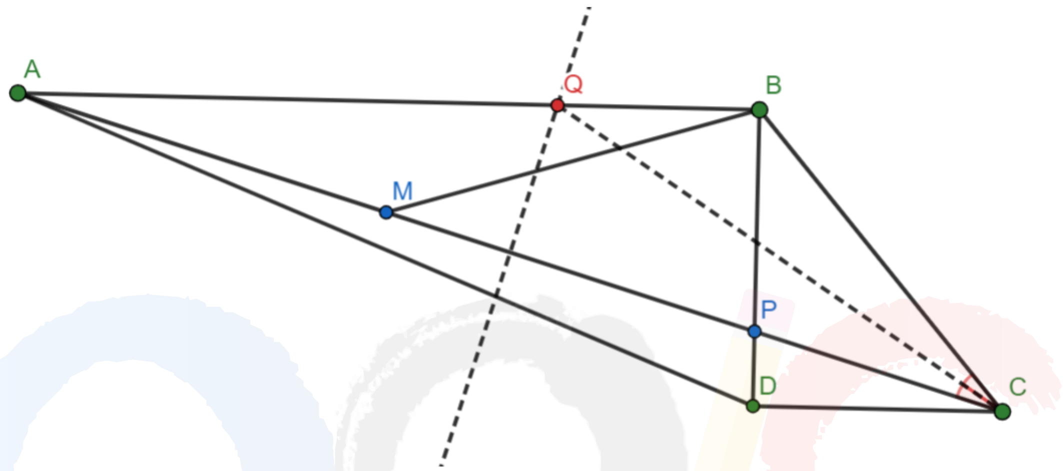
$$\implies a_n = 3 \cdot (n-1)!$$

Questão 3

Escrito por João Rafael

Seja M o ponto médio de AP. Como o triângulo ABP é retângulo, sabemos que a mediana relativa a hipotenusa é igual ao dobro da hipotenusa e portanto

$$MB = MA = \frac{AP}{2} = BC.$$



Concluímos que BMC é isósceles e portanto $\angle BMC = \angle BCM$. Além disso, olhando para o ângulo externo, temos que

$$\angle BCA = \angle BMC = \angle BAM + \angle ABM = 2\angle BAC$$

. Finalmente, se Q é a interseção da bissetriz de $\angle ACB$ com AB, como $\angle QCA = \frac{\angle BCA}{2} = \angle BAC = \angle QAC$, concluímos que o triângulo QAC é isósceles, e portanto Q está na mediatriz de AC, como queríamos demonstrar. ■

Questão 4

Vamos reduzir ao problema para a linguagem de grafos. Temos n vértices numerados de $1, 2, \cdots, n$ e m arestas. Para cada vértice i, defina a_i um valor que é 0 ou 1, onde $a_i = 1$ se uma cidade tem mais de 1 milhão de habitantes, e 0 caso contrario.

Primeiro, vamos pegar uma árvore geradora do grafo, e, para toda aresta fora da árvore geradora, vamos remover ela do grafo. Com isso, basta resolvermos o problema para o caso em que o grafo é uma árvore.

Para provar isso, vamos fazer indução!

- Caso Base: $n = 1$, trivial, pois como a soma de a_i tem que ser par, $a_1 = 0$.
- Hipótese: Suponha que, para toda árvore com $n - 1$ vértices, conseguimos resolver o problema caso a soma dos a_i seja par.
- Passo indutivo: Vamos resolver para n vértices.

Pegue uma folha da árvore. Seja v essa folha. Caso $a_v = 0$, remova a aresta que liga ela para o pai dela, e então, sobra uma árvore com $n - 1$ vértices, que sabemos como resolver pela hipótese!

Agora, caso $a_v = 1$, deixe a aresta que liga v para o pai dela, então, seja p o pai de v, logo, veja que queremos resolver o problema com $n - 1$ vértices, mas a_p agora é igual a $a_p - 1 \pmod 2$, então, como $a_v = 1$, temos que a soma dos a_i continua par, e então, o passo indutivo segue.

Então, por indução, podemos resolver para árvores.