OBOM Soluções - Nível 2

João Gilberti, Matheus Alencar, João Rafael

Questão 1

Escrito por João Rafael Veja que

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}-\frac{2}{a+c}=\frac{(a+c)(b+c)+(a+b)(a+c)-2(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=$$

$$=\frac{c^2+a^2-2b^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}=0,$$

pelo fato de que a^2, b^2 e c^2 estão em progressão aritmética. Isso implica diretamente o pedido. ■

Questão 2

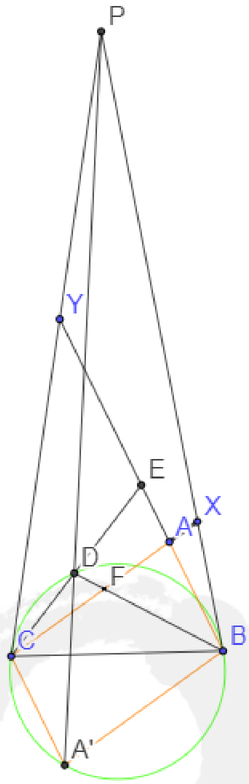
Suponha o contrário, ou seja, que para todo n, $F_{n+1}.a+F_n \mid F_{n+1}.b+F_n$. Daí, note que isso implica que $F_{n+1}.a+F_n \mid F_{n+1}.b+F_n-(F_{n+1}.a+F_n)=(b-a)F_{n+1}$.

Lema: $mdc(F_n,F_{n+1})=1$, para todo n.

Prova: Indução em n; com a base sendo trivial. Note que por Algoritmo de Euclides $(F_n,F_{n+1})=mdc(F_n,F_{n+1}-F_n)=(F_n,F_{n-1})$. Mas o último mdc vale 1, pela hipótese de indução, terminando assim o lema.

Voltando ao problema, perceba que $(F_{n+1},F_{n+1}.a+F_n)=mdc(F_{n+1},F_n)=1$, por Euclides novamente. Por fim, como $F_{n+1}.a+F_n \mid (b-a)F_{n+1}$, e o mdc entre o dividendo e F_{n+1} é 1, temos que $F_{n+1}.a+F_n \mid b-a$, para todo n. Mas conforme aumentamos n, F_n tende ao infinito, e se $b-a\neq 0$, teremos absurdo por tamanho, já que $b-a$ é constante. Logo, $b-a=0 \implies a=b$, um absurdo pois o enunciado fala $a\neq b$. ■

Questão 3



A condição dos dois ângulos somarem 180 deveria levar o aluno a ter a ideia de criar um paralelogramo na figura: Seja A' o ponto tal que $BA'CA$ é um paralelogramo. Note que $\angle BAC = \angle BA'C = 180 - \angle BDC$, daí, $A'BDC$ é cíclico. Mas mais do que isso, para o aluno que sabe o básico de geometria projetiva, a condição do produto igual implica que o quadrilátero $A'BDC$ é harmônico. $BA.BD = CA.CD \iff A'C.BD = A'B.CD \implies \dfrac{A'C}{A'B} = \dfrac{CD}{BD}$, pois $A'C = BA$ e $A'B = CA$.

Daí, a ciclicidade junto com essas razões iguais implica que $A'BDC$ é harmônico. Projetando por C do quadrilátero na reta BE nos dá que $C(A',D;B,C) = C(CA' \cap AB, E; B, CC \cap AB) = -1$, mas pelo paralelismo a interseção de CA' e AB é o ponto do infinito de AB (chame de L), e $CC \cap AB$ é o encontro da tangente por C a (DBC) com AB. Denote esse encontro por Y'. Note que como $(B,Y';E,L) = -1$, então E é ponto médio de BY', pois L é o ponto do infinito.

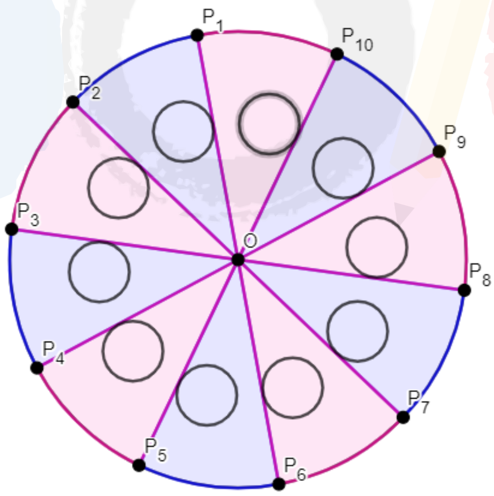
Agora, como E é ponto médio de BY', então Y' é o reflexo de B por E, que é Y. Portanto YB é tangente ao círculo mencionado. Analogamente ao projetarmos por B, ganhamos que CX é tangente ao círculo mencionado. Daí, P nada mais é que o encontro das tangentes ao círculo, o que, pelo teorema do bico, implica $PB = PC$. ■

NOTA: Uma abordagem mais simples também poderia ser feita após provar que DA' é simediana de ΔDCB (Isso é análogo à condição do quadrilátero ser harmônico) Pegando o ponto médio M de BC e provando que o quadrilátero $DCMF$ é cíclico e, analogamente, $BMDE$ é cíclico. Isso nos provaria que o ângulo $\angle FMB$ e o ângulo $\angle CME$ são iguais. Mas como ME e MF são bases médias, podemos passar esses ângulos para $\angle CBX$ e $\angle BCY$. Assim, também provaríamos que ΔPBC é isósceles

Questão 4

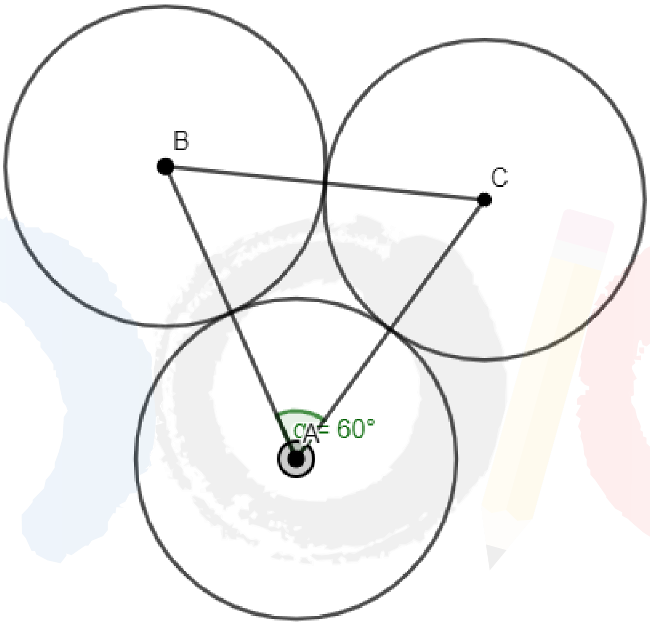
Escrito por Matheus Alencar

Uma ideia a se pensar nesse problema é explorar a simetria entre os jogadores. Vamos tentar fazer uma rotação de ângulo $\frac{360°}{n}$, ou seja, se o jogador 2 joga a moeda em um ponto P, o jogador 3, por O, rotaciona o centro P com o ângulo $\frac{360°}{n}$, e então o jogador 4 faz isso de novo, logo depois o jogador 5, e assim por diante, até todos os n jogadores terem rotacionado por sua vez:



Exemplo de rotação com $n = 10$

Então, vejamos que isso quase funciona, afinal, se o jogador 2 conseguiu colocar sua moeda e a mesa está toda radialmente simétrica, é porque podemos colocar pelos outros jogadores também! Mas tem um problema! se as moedas colocadas uma logo após a outra se tocarem, não cumprimremos nosso objetivo, mas quando isso acontece? É quando a moeda colocada pelo jogador 2 tiver sido colocada muito próxima do centro! Como podemos evitar essa quebra na nossa simetria? Bem, temos uma certa liberdade na primeira jogada. O que nos faz pensar: Por que não impedir uma certa distancia do centro logo no começo? Se o jogador 1, em sua primeira jogada, coloca uma moeda no centro da mesa, já conseguimos garantir uma certa distância, o que nos leva à pergunta: Quanta distância? Bem, tentemos colocar a moeda do jogador 2 O mais próximo possível do centro. qual será o maior ângulo de rotação possível entre duas circunferências que não são secantes entre si? Como quando colocamos as circunferências o mais próximo possível das outras obtemos os maiores ângulos, veja que se o jogador 2 coloca sua circunferência tangenciando a primeira do jogador 1, o ângulo da rotação terá que ser pelo menos 60°:



O triângulo ΔABC é equilátero, já que $AB = BC = CA = 2R$, onde R é o raio da moeda.

Assim, veja também que se o número de jogadores é no máximo 6, temos uma estratégia vencedora: Basta que o 1° Jogador jogue no meio e, em seguida, todos os jogadores joguem de acordo com a rotação dada pela estratégia abaixo. Mas e se o número de jogadores for pelo menos 7?

Lema: Podemos colocar no máximo 7 círculos de raio $\frac{R}{3}$ em uma circunferência de raio R (E precisrameos de pelo menos 2 para não poder colocar outro)

Se esse lema for verdade, basta ver que se o segundo jogador escolhe o raio da moeda para ser $\dfrac{R}{3}$, então ele necessariamente vai ganhar, pois não haverá espaço para todos os jogadores jogarem e a vez do segundo jogador voltar. Afinal, temos 8 jogadas até a segunda jogada do segundo jogador, pelo menos. Assim, provaremos o lema:

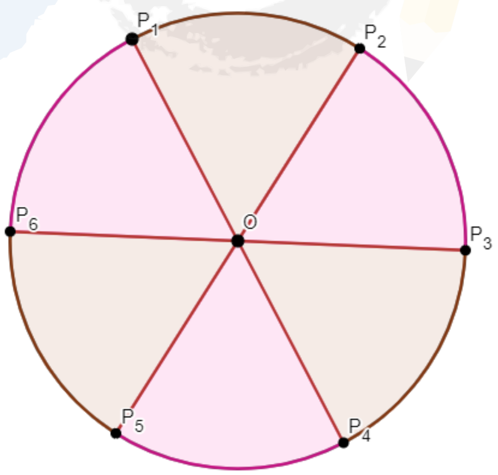
Prova: Veja que se duas circunferências de raio $\frac{R}{3}$ não se intersectam então seus centros distam por pelo menos $\frac{2R}{3}$. Além disso, como todas as circunferências estão totalmente contidas na mesa, todos os centros estão dentro da circunferência de raio $\frac{2R}{3}$ centrada no centro da mesa. Assim, queremos provar que dados 8 pontos em uma circunferência de raio $\frac{2R}{3}$, existem dois deles que distam menos que $\frac{2R}{3}$. Para provar isso, vejamos alguns casos:

Caso 1: Um dos pontos é o centro da circunferência:

Veja que, caso isso aconteça, todos os outros pontos estão na borda da mesma. Sabemos que o máximo de pontos com distância $\geq \frac{2R}{3}$ numa circunferência são 6 pontos (Basta dividir a circunferência num hexágono e ver que, caso $n > 6$, teríamos dois pontos no mesmo setor, ou seja, com distância $< \frac{2R}{3}$.

Caso 2: Nenhum dos pontos é o centro da circunferência:

Veja que, de novo, se dividirmos a cirunferência de raio $\frac{2R}{3}$ nos setores do hexágono,



Não podemos ter dois pontos no mesmo setor, porém veja que em tese poderíamos ter dois pontos nas pontas de cada setor (os vértices P_1 e P_2). Então vamos dividir os pontos de acordo com se eles estão em um dos segmentos OP_i ou num dos setores das circunferências (descontando suas retas) Veja que se um ponto está num setor, nenhum ponto pode estar em um dos segmentos ao seu lado, o mesmo vale para segmentos, se um ponto está em um segmento, então nenhum ponto pode estar em um dos setores ao seu lado. Por PCP nessas classificações de pontos, se tivermos pelo menos 7 pontos a ser colocados, teremos duas classificações consecutivas com um ponto. Assim, nos dando uma distância menor que $\frac{2R}{3}$. Assim, se $n > 6$, o segundo jogador tem a estratégia vencedora. Dessa forma, a resposta será que os jogadores tem a estratégia para fazer mathito perder se, e somente se, $n < 7$.

NOTA: Outros metódos poderiam ser usados para provar esse lema, por exemplo, podíamos provar que existiam P_1 e P_2 dentre os pontos na circunferência tais que $\angle P_1OP_2 < 60°$