

# Simulado OBMEP - Nível 3

Luiza Lanza, Andressa Farias e Maria Luisa Berbert

## 1 Questão 1

Geraldo possui duas caixas e algumas bolas coloridas. Na primeira caixa, há 7 bolas vermelhas, 5 pretas e 3 azuis. Na segunda caixa, há 10 bolas azuis, 3 pretas e 4 vermelhas.

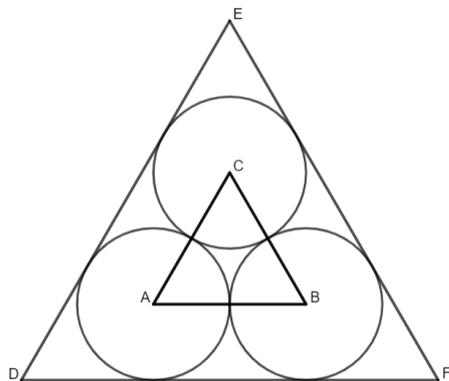
a) Geraldo tirou uma bola de cada caixa, qual é a probabilidade de ele ter tirado duas bolas azuis?

b) Geraldo percebeu que se ele colocasse uma bola vermelha da primeira caixa e retirasse aleatoriamente duas bolas, uma de cada caixa, a probabilidade de retirar duas bolas vermelhas aumentaria. Explique por que isso acontece.

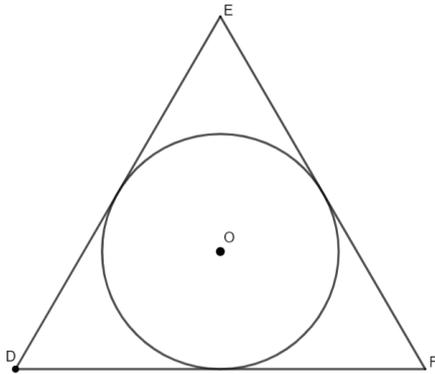
c) Geraldo retirou uma bola da primeira caixa, sem olhar, e colocou na segunda caixa. Depois, pegou uma bola aleatória da segunda caixa. Qual é a probabilidade de a segunda bola que ele pegou ser preta?

## 2 Questão 2

Considere o triângulo equilátero  $\triangle DEF$  no qual há três circunferências iguais tangentes entre si e tangentes aos lados do triângulo. O triângulo  $\triangle ABC$  é equilátero e têm como vértices os centros das três circunferências.



- a) Calcule a área do  $\triangle ABC$ .  
 b) Calcule a área do  $\triangle DEF$ .  
 c) Observe a figura abaixo, onde é representada a circunferência inscrita ao  $\triangle DEF$  (circunferência tangente à todos os lados do triângulo).



Calcule a razão entre a área dos círculos cujo o raio da circunferência é metade do lado do  $\triangle ABC$  e do círculo cujo a circunferência é inscrita ao  $\triangle DEF$ .

### 3 Questão 3

Andressa tem uma caixa com fichas 30 numeradas de 1 a 30. Muito interessada em probabilidade, ela calcula a chance de retirar cartas segundo alguns critérios de divisibilidade:

- a) Qual a probabilidade de Andressa tirar uma carta cujo o número é múltiplo de 5?  
 b) Qual a probabilidade de Andressa tirar duas cartas cujo a soma dos números escritos nas cartas é divisível por 5 (com reposição)?  
 c) Qual a probabilidade de Andressa tirar duas cartas cujo a soma dos quadrados dos números escritos nas cartas é divisível por 5 (com reposição)?

### 4 Questão 4

Denotamos por *triângulo n – sierpinski*, para  $n \in \mathbb{Z}$  a área dada pela seguinte operação:

1. Temos um triângulo equilátero  $ABC$  de lado 1. Assim, a área do *triângulo 1 – sierpinski* é igual à área do triângulo  $ABC$ ;

2. No segundo passo, marcamos o ponto médio de cada um dos lados do triângulo e depois ligamos os pontos, formando quatro novos triângulos equiláteros idênticos;
3. Desconsideramos a área do triângulo central, obtendo 3 triângulos equiláteros idênticos;
4. Repetimos o processo para cada um dos novos triângulos formados para encontrar o *triângulo 2 – sierpinski*;

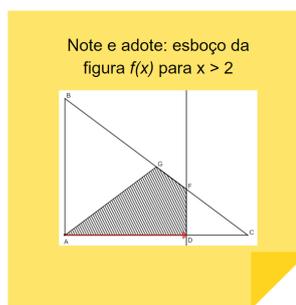
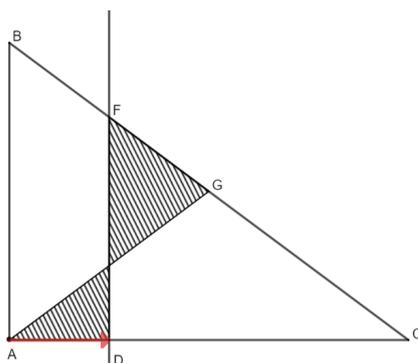
O *triângulo (n + 1) – sierpinski* é obtido a partir das operações anteriores para o *triângulo n – sierpinski*;



- a) Prove que a altura do triângulo  $ABC$  relativa à base  $AB$  é  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- b) Calcule a área do *triângulo 2 – sierpinski*.
- c) Calcule a soma das áreas de todos os triângulos *triângulo n – sierpinski*.

## 5 Questão 5

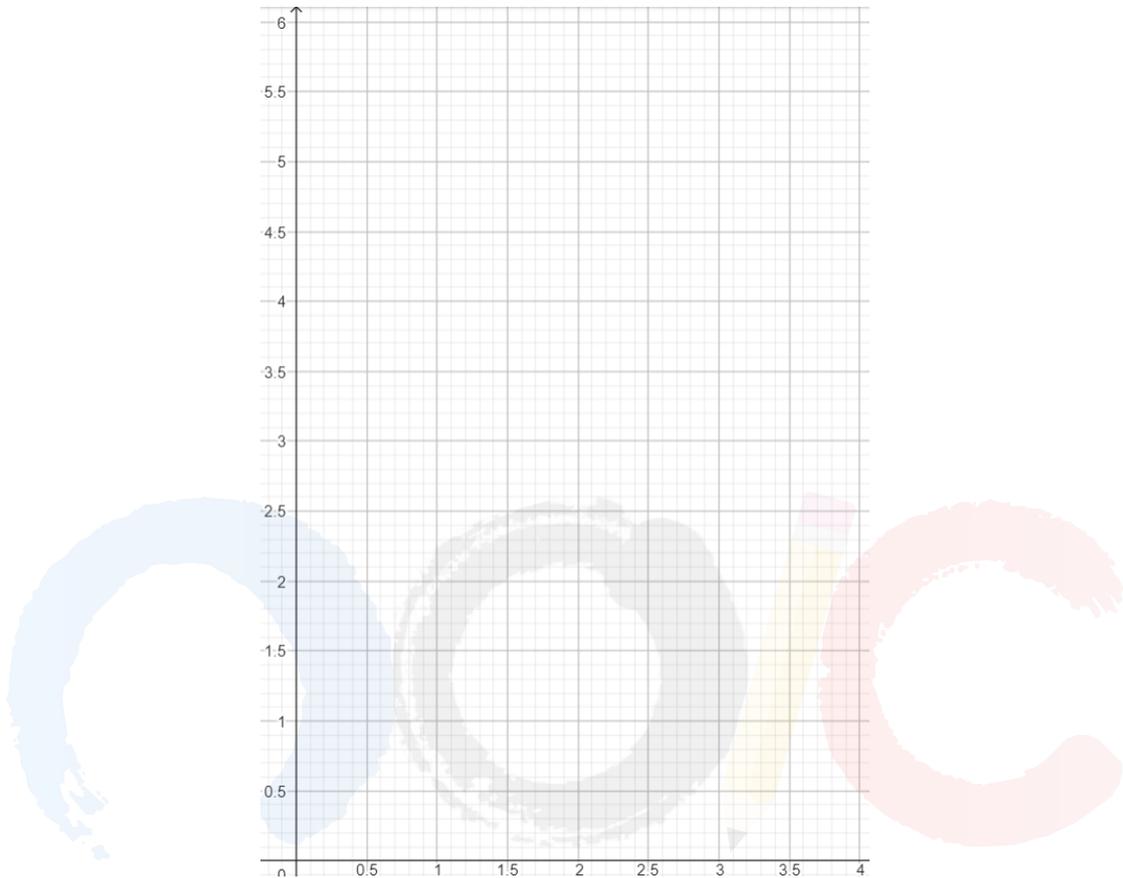
O triângulo  $ABC$ , retângulo em  $A$ , tem medidas de lado  $AB=3$  e  $BC=4$ . O ponto  $D$  está sobre a reta  $AC$  e o ponto  $F$  é a interseção da reta perpendicular à  $AC$  com a reta  $BC$ , de forma que dado um valor  $0 \leq x \leq 4$ , denotamos por  $f(x)$  a área da figura  $ADFG$ , conforme a figura abaixo:



- a) Calcule  $f(1)$ ,  $f(2)$  e  $f(3)$ .
- b) Qual é a função  $f(x)$  que descreve a área da figura  $ADFG$  quando  $0 \leq x \leq 2$ ?

E a função  $f(x)$  para quando  $2 < x \leq 4$ ?

c) Esboce o gráfico da função  $f(x)$ .



## 6 Questão 6

Daniel possui uma caixa escura com bolinhas numeradas de 1 a 2023, de forma que não é possível verificar qual o número da bolinha antes de retirá-la, sendo retiradas ao acaso.

- Retirando uma bolinha ao acaso, qual a probabilidade de esta seja um múltiplo de 17? E de 119?
- Qual o número mínimo de bolinhas que Daniel precisa retirar para garantir que pelo menos duas delas possuem números que somados são divisores de 2023?
- Dado um número  $n < 2023$ , qual o número mínimo de bolinhas que Daniel



precisa retirar para garantir que pelo menos duas delas possuem números que somados são divisíveis por  $n$ ?

