

Simulado OBMEP - Nível 3

Luiza Lanza, Andressa Farias e Maria Luisa Berbert

1 Questão 1

Geraldo possui duas caixas e algumas bolas coloridas. Na primeira caixa, há 7 bolas vermelhas, 5 pretas e 3 azuis. Na segunda caixa, há 10 bolas azuis, 3 pretas e 4 vermelhas.

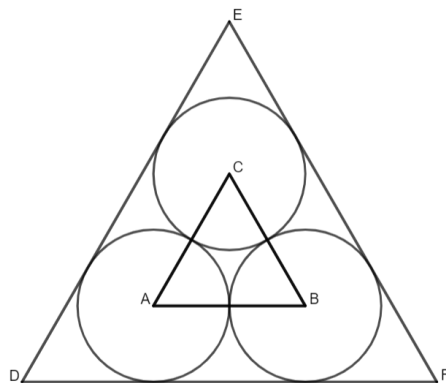
a) Geraldo tirou uma bola de cada caixa, qual é a probabilidade de ele ter tirado duas bolas azuis?

b) Geraldo percebeu que se ele colocasse uma bola vermelha da primeira caixa e retirasse aleatoriamente duas bolas, uma de cada caixa, a probabilidade de retirar duas bolas vermelhas aumentaria. Explique por que isso acontece.

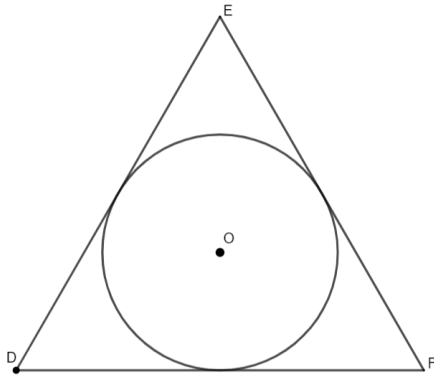
c) Geraldo retirou uma bola da primeira caixa, sem olhar, e colocou na segunda caixa. Depois, pegou uma bola aleatória da segunda caixa. Qual é a probabilidade de a segunda bola que ele pegou ser preta?

2 Questão 2

Considere o triângulo equilátero $\triangle DEF$ no qual há três circunferências iguais tangentes entre si e tangentes aos lados do triângulo. O triângulo $\triangle ABC$ é equilátero e têm como vértices os centros das três circunferências.



- a) Calcule a área do $\triangle ABC$.
 b) Calcule a área do $\triangle DEF$.
 c) Observe a figura abaixo, onde é representada a circunferência inscrita ao $\triangle DEF$ (circunferência tangente à todos os lados do triângulo).



Calcule a razão entre a área dos círculos cujo o raio da circunferência é metade do lado do $\triangle ABC$ e do círculo cujo a circunferência é inscrita ao $\triangle DEF$.

3 Questão 3

Andressa tem uma caixa com fichas 30 numeradas de 1 a 30. Muito interessada em probabilidade, ela calcula a chance de retirar cartas segundo alguns critérios de divisibilidade:

- a) Qual a probabilidade de Andressa tirar uma carta cujo o número é múltiplo de 5?
 b) Qual a probabilidade de Andressa tirar duas cartas cujo a soma dos números escritos nas cartas é divisível por 5 (com reposição)?
 c) Qual a probabilidade de Andressa tirar duas cartas cujo a soma dos quadrados dos números escritos nas cartas é divisível por 5 (com reposição)?

4 Questão 4

Denotamos por *triângulo n – sierpinski*, para $n \in \mathbb{Z}$ a área dada pela seguinte operação:

1. Temos um triângulo equilátero ABC de lado 1. Assim, a área do *triângulo 1 – sierpinski* é igual à área do triângulo ABC ;

2. No segundo passo, marcamos o ponto médio de cada um dos lados do triângulo e depois ligamos os pontos, formando quatro novos triângulos equiláteros idênticos;
3. Desconsideramos a área do triângulo central, obtendo 3 triângulos equiláteros idênticos;
4. Repetimos o processo para cada um dos novos triângulos formados para encontrar o *triângulo 2 – sierpinski*;

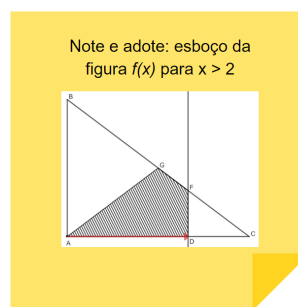
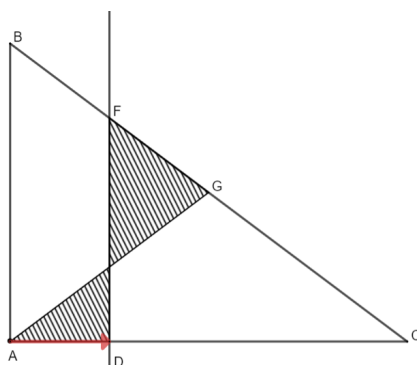
O *triângulo (n + 1) – sierpinski* é obtido a partir das operações anteriores para o *triângulo n – sierpinski*;



- a) Prove que a altura do triângulo ABC relativa à base AB é $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- b) Calcule a área do *triângulo 2 – sierpinski*.
- c) Calcule a soma das áreas de todos os triângulos *triângulo n – sierpinski*.

5 Questão 5

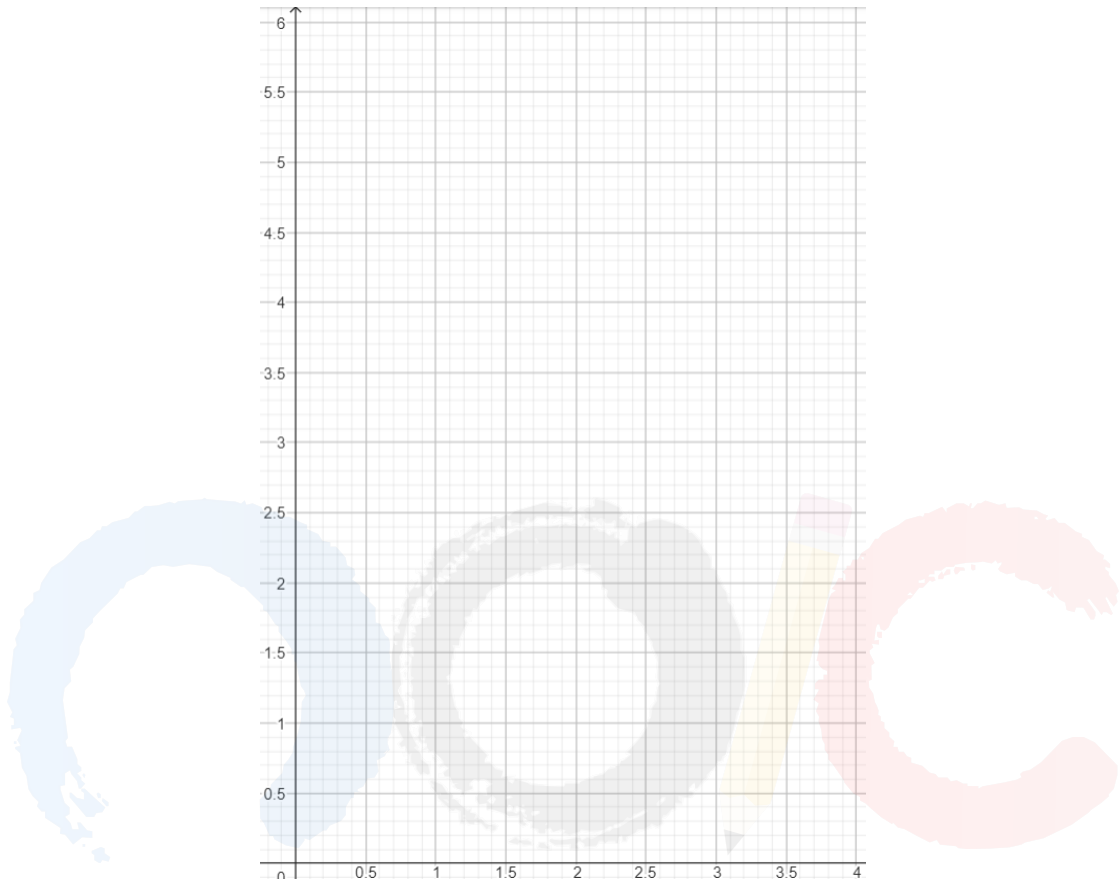
O triângulo ABC , retângulo em A , tem medidas de lado $AB=3$ e $BC=4$. O ponto D está sobre a reta AC e o ponto F é a interseção da reta perpendicular à AC com a reta BC , de forma que dado um valor $0 \leq x \leq 4$, denotamos por $f(x)$ a área da figura $ADFG$, conforme a figura abaixo:



- a) Calcule $f(1)$, $f(2)$ e $f(3)$.
- b) Qual é a função $f(x)$ que descreve a área da figura $ADFG$ quando $0 \leq x \leq 2$?

E a função $f(x)$ para quando $2 < x \leq 4$?

c) Esboce o gráfico da função $f(x)$.



6 Questão 6

Daniel possui uma caixa escura com bolinhas numeradas de 1 a 2023, de forma que não é possível verificar qual o número da bolinha antes de retirá-la, sendo retiradas ao acaso.

- Retirando uma bolinha ao acaso, qual a probabilidade de esta seja um múltiplo de 17? E de 119?
- Qual o número mínimo de bolinhas que Daniel precisa retirar para garantir que pelo menos duas delas possuem números que somados são divisores de 2023?
- Dado um número $n < 2023$, qual o número mínimo de bolinhas que Daniel



precisa retirar para garantir que pelo menos duas delas possuem números que somados são divisíveis por n ?

