

# Soluções da OBM N1

## Problema 1 - Escrito por Luiza Lanza

### item a)

A quantidade de jujubas dos dois garotos somadas é sempre constante e igual a  $300 + 300 = 600$  (quantidade inicial de jujubas de cada um). Como Arnaldo ganhou 39 pontos, ele perdeu  $100 - 39 = 61$  pontos. Seguindo as regras do jogo, ao final ele terá  $300 - 61 \cdot 2 + 39 \cdot 3 = 295$  jujubas.

Logo, Bernaldo terá no final  $600 - 295 = 305$  jujubas.

### item b)

Seja o número de partidas que Arnaldo ganhou igual a  $x$ . Logo, ele perdeu  $100 - x$  partidas. Assim, o saldo final de jujubas do Arnaldo é:

$$300 - 2 \cdot (100 - x) + 3 \cdot x = 300$$

$$300 - 200 + 2x + 3x = 300$$

$$5x = 200 \Rightarrow x = 40$$

Logo, Arnaldo terá vencido 40 partidas.

### item c)

Suponha que é possível, e para esse caso Arnaldo vence  $y$  partidas. Assim, o saldo final de jujubas do Arnaldo é:

$$300 - 2 \cdot (100 - y) + 3 \cdot y = 301$$

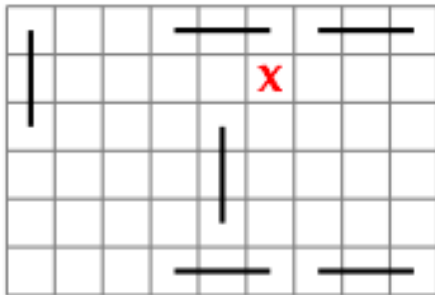
$$300 - 200 + 2y + 3y = 301$$

$$5y = 201 \Rightarrow y = 40,2$$

Logo, não é possível que Arnaldo termine com 301 jujubas, pois para isso deveria vencer 40,2 partidas, e o número de partidas vencidas é sempre inteiro.

## Questão 2 - Escrito por Maria Luisa e Caique Paiva

A figura a seguir mostra um tabuleiro  $6 \times 9$  dividido em quadradinhos  $1 \times 1$  que deve ser coberto com peças  $1 \times 3$  na horizontal ou na vertical de modo que cada peça cubra exatamente 3 quadradinhos. Já foram colocadas 4 peças na horizontal e 2 na vertical (as peças estão representadas de maneira simplificada).



a) Quantas peças são necessárias para completar a cobertura acima?

No tabuleiro  $6 \times 9$  temos 54 quadradinhos, se cada peça ocupa 3 quadradinhos precisaremos de 18 peças para cobrir o tabuleiro completamente. Já que 6 peças já foram colocadas, são necessárias 12 peças para completar a cobertura acima.

b) Existe um quadradinho marcado com a letra X. Só existe uma posição possível de uma peça  $1 \times 3$  para cobrir esse quadradinho de modo que seja possível completar o desenho e cobrir o tabuleiro totalmente. Indique onde essa peça deve ser colocada e explique o porquê dela ser a única possibilidade.

Vamos trabalhar com coordenadas. A casa  $(i, j)$  é a casa na coluna  $i$  e na linha  $j$ . Olhe para o quadrado  $4 \times 4$  formado pelas casas  $(6, 2), (9, 2), (9, 5), (6, 5)$ . Vamos ter que colocar pecinhas  $1 \times 3$  neles, e a quantidade de pecinhas incompletas dele vai ser no máximo 1, que é a pecinha que contém o X. Dito isso, como vamos cobrir 16 casinhas no final, então a pecinha incompleta vai ter tamanho 1 nesse  $4 \times 4$ . Ou seja, o  $1 \times 3$  na casinha do x vai ser um  $1 \times 3$  que cobre  $(4, 2), (5, 2), (6, 2)$ .

c) Existem quantas maneiras diferentes de completar a cobertura acima?

Veja que vamos ter que ter um  $1 \times 3$  nas casa  $(2, 1), (2, 2)$  e  $(2, 3)$ , pois algum  $1 \times 3$  tem que cobrir o  $(2, 1)$ , e o único que cobre é esse. Mesmo argumento para temos um na casa  $(3, 1), (3, 2), (3, 3)$ .

Já sabemos pelo item anterior que vai ter um  $1 \times 3$  nas casinhas  $(4, 2), (5, 2), (6, 2)$ . Feito isso, também vamos precisar de um  $1 \times 3$  nas casas  $(4, 3), (4, 4), (4, 5)$ . Então, sobrou um  $3 \times 3$  para preenchermos, e um  $4 \times 4$  sem uma casa da ponta.

Para o  $3 \times 3$ , podemos preencher de 2 maneiras, ou com 3  $1 \times 3$  deitados, ou com



os 3 em pé.

Agora para o  $4 \times 4$ , temos 4 possibilidades. Olhando somente para o  $4 \times 4$ , se tivermos um  $1 \times 3$  cobrindo a primeira linha, então temos que resolver para um  $3 \times 4$ , que tem 3 maneiras de resolver:

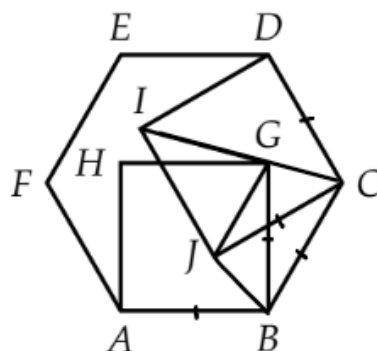
- Se colocarmos um  $1 \times 3$  cobrindo a primeira coluna toda, então falta resolver para um  $3 \times 3$ , que tem 2 possibilidades.
- Caso contrario, então temos que colocar 3  $1 \times 3$  na horizontal, que nesse caso só tem 1 possibilidade.

Então, caso não coloquemos o  $1 \times 3$  na primeira linha, então, temos que colocar 3  $1 \times 3$  na vertical, e nesse caso só resta 1 possibilidade, o que nos dá no total 4 possibilidade.

No final, temos  $2 \cdot 4 = 8$  possibilidades.



### Problema 3 - Escrito por Luiza Lanza



#### item a)

O  $\angle BCI = \angle BCD - \angle ICD$ . Como o  $\angle BCD$  é um ângulo interno do hexágono regular,  $\angle BCD = 120^\circ$ . O  $\angle ICD$  é a diagonal e bissetriz do ângulo interno do quadrado, portanto, vale  $\frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ . Logo,  $\angle BCI = 120^\circ - 45^\circ = 75^\circ$ . Observe que o  $\triangle BCG$  é isósceles, pois  $AB = BG$  e  $AB = BC$ , logo  $BG = BC$ . Como  $\angle GBC = \angle ABC - \angle ABG = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$ , os dois ângulos da base são congruentes e somados medem  $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ . Logo,  $\angle BCG = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$ .

$$\therefore \angle BCG = \angle BCI = 75^\circ$$

□

#### item b)

Como já foi demonstrado no item a), I, G e C são colineares. Logo,  $\angle JIG = \angle JIC = 45^\circ$  (metade do ângulo interno do quadrado).

Analogamente ao item a), fica provado que B, J e H são colineares, pois BH é bissetriz do ângulo interno do quadrado e  $JC = CD$ ;  $BC = CD \Rightarrow JC = BC$ . O  $\angle BCJ = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$ , como  $\triangle CJB$  é isósceles  $\therefore \angle CBJ = \angle CJB = 75^\circ$ .

Logo, concluímos que os triângulos  $\triangle BCG$  e  $\triangle CJB$  são congruentes, pois tem dois três ângulos iguais e o lado BC oposto à  $75^\circ$  em comum. Isso implica que  $BC \parallel JG$ , pois as alturas dos triângulos relativas à base BC que passam pelos vértices J e G são congruentes.

Pelo Teorema das Retas Paralelas Cortadas por uma Transversal, temos que

$\angle IGJ = \angle ICB = 75^\circ$ . Por fim, como a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ ,  $\angle IJG = 180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ$ .

Logo:

$$\angle JIC = 45^\circ$$

$$\angle IGJ = 75^\circ$$

$$\angle IJG = 60^\circ$$

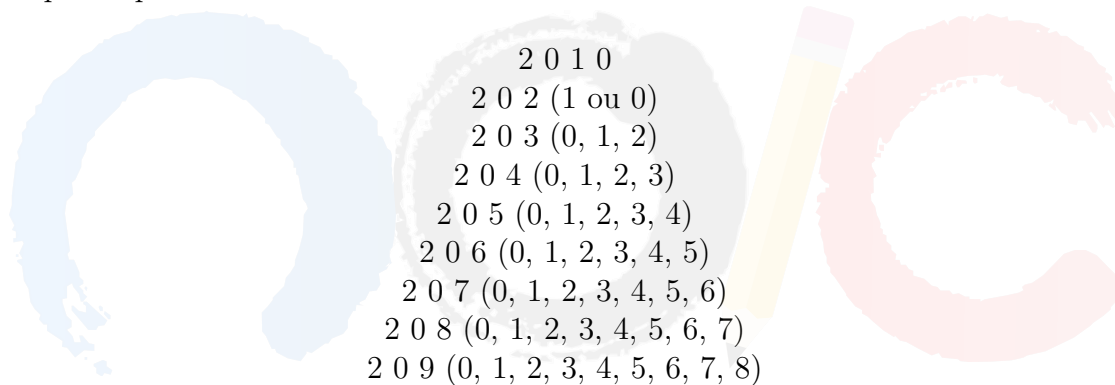


## Questão 4 - Escrito por Maria Luisa

Um número inteiro positivo é dito vaivém quando, considerando a sua representação na base dez, o primeiro algarismo da esquerda para a direita é maior que o segundo, o segundo é menor que o terceiro, o terceiro é maior que o quarto e assim por diante, alternando maior e menor até o último algarismo. Por exemplo, 2021 é vaivém, pois  $2 > 0$ ,  $0 < 2$ ,  $2 > 1$ . O número 2023 não é vaivém, pois  $2 > 0$ ,  $0 < 2$ , mas 2 não é maior do que 3. Por exemplo, 4253617 é um destes números. Mas 5372146 não é (2 é maior do que 1 e 1 é menor do que 4) e 2163457 também não é (4 é menor do que 5).

a) Existem quantos inteiros positivos vaivéns de 2000 até 2100?

Já que o intervalo é de 2000 a 2100, sabemos que os primeiros dois algarismos serão 2 e 0. Sabe-se que o terceiro algarismo deve ser maior do que o segundo, porém ao mesmo tempo maior que o quarto. Portanto, se o terceiro algarismo for 1 o quarto será 0, com essa lógica estabelecemos que se o terceiro algarismo for 2 o quarto pode ser 1 ou 0.



|                                   |
|-----------------------------------|
| 2 0 1 0                           |
| 2 0 2 (1 ou 0)                    |
| 2 0 3 (0, 1, 2)                   |
| 2 0 4 (0, 1, 2, 3)                |
| 2 0 5 (0, 1, 2, 3, 4)             |
| 2 0 6 (0, 1, 2, 3, 4, 5)          |
| 2 0 7 (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)       |
| 2 0 8 (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)    |
| 2 0 9 (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) |

Assim basta adicionar todos os casos.  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$  Portanto, existem 45 números vaivéns de 2000 até 2100.

b) Qual é o maior número vaivém sem algarismos repetidos?

Sabe-se que existem no máximo 10 algarismos distintos. Portanto, sabemos que o 9 será o denominador. O segundo algarismo deve ser o maior possível dentro da regra dos números vaivém, portanto, deve ser o número 7. O terceiro algarismo é o número 8 pois é maior que 7. Em seguida, o quarto algarismo deve ser o 5 já que o quinto algarismo deve ser maior que ele. Logo, se seguirmos esse padrão o maior número vaivém sem algarismos repetidos é 9785634120.

c) Quantos números de 7 algarismos distintos formados pelos dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 são vaivéns?



Iremos dividir esse problema em dois casos. O primeiro caso consistirá em organizar todos os números onde o número 1 ficará no meio do número de 7 algarismos. Aqui são todas as possíveis combinações de três dígitos que ficarão na frente do algarismo 1 que estará posicionado no meio.

345 234  
345 235  
347 236  
356 237  
357 245  
367 246  
456 247  
457 256  
467 257  
567 267

20 possibilidades

Agora, desses três algarismos montaremos 2 vaivém. Também podemos montar 2 vaivém com outros 3 algarismos.

Portanto, o total número de números vaivém nesse caso é  $20 * 2 * 2 = 80$

Por outro lado, o segundo caso constitui em o 1 estando na segunda posição do número de 7 algarismos. Onde o primeiro algarismo tem 6 possibilidades. E com os outros cinco algarismos formamos um vaivém que pode ser feito de 16 maneiras. Portanto, o total é  $16 * 6 * 2 = 192$  Logo, a resposta será a soma dos dois casos que é  $80 + 192 = 272$

## Solução 2 - Escrito por Fábio Medeiros

**Solução:**

a) Note que sendo  $n = \overline{abcd}$  um número satisfazendo o enunciado,  $2 = a > b \Rightarrow b \in \{0, 1\}$ . Se  $b = 1 \Rightarrow n = 2100$  que não é vaivém. Logo,  $b = 0$ . Assim,  $c > b = 0$  e  $c > d$  então basta  $\overline{cd}$  ser vaivém de dois algarismos ( $c \neq 0$ ).

Para isso, se  $c = 1$  temos 1 opção ( $d = 0$ ), se  $c = 2$  temos 2 opções ( $d = 0$  ou  $d = 1$ ), ..., se  $c = 9$  temos 9 opções ( $d = 0, \dots, d = 8$ ). Portanto, existem  $1 + 2 + \dots + 9 = 45$  números vaivém nesse intervalo.

b) Vamos construir esse número  $M$ . Para isso  $M$  tem no máximo 10 algarismos (pois todos são distintos)  $\Rightarrow M = \overline{abcdefghij}$ . O maior número possível para a primeira posição é  $a = 9$ . Note que  $b \neq 8$  se não  $c > b = 8 \Rightarrow c = 9 = a$ ,



absurdo! Logo o maior valor possível para  $b$  é 7. O maior valor possível para  $c$  é 8. Assim,  $M = \overline{978defghij}$ . Repetindo o processo,

$$d \neq 6 \Rightarrow d = 5, e = 6 \Rightarrow f \neq 4 \Rightarrow f = 3, g = 4 \Rightarrow h \neq 2 \Rightarrow h = 1, i = 2 \Rightarrow j = 0$$

Portanto,  $M = \overline{9785634120}$ .

c) Seja  $n = \overline{abcdefg}$  um número dessa forma. Sabemos que

$$a > b < c > d < e > f < g$$

Portanto, como o algarismo 1 é o menor, ele deve estar em uma das posições  $b$ ,  $d$  ou  $f$ .

- Se  $d = 1$  então restam os algarismos 2, 3, 4, 5, 6, 7. Ou seja, basta  $\overline{abc}$  e  $\overline{efg}$  serem vaivém pois  $c > d = 1$  e  $e > d = 1$ , então  $n$  seria vaivém. Para isso, dos 6 números restantes, temos  $\binom{6}{3}$  trios  $\{x, y, z\}$  para formarem  $\overline{abc}$  e o menor deles será o  $b$  automaticamente. Temos duas opções para trocar  $a$  e  $c$  de lugar. Os outros três números restantes formarão  $\overline{efg}$  e analogamente, temos duas opções para isso (o menor será  $f$  e podemos trocar  $e$  e  $g$  de lugar). Portanto, pelo princípio multiplicativo temos  $\binom{6}{3} \cdot 2 \cdot 2 = 80$  números.
- Se  $b = 1$  note que 2 só pode estar nas posições  $a$ ,  $d$  ou  $f$ , pois todos os demais números são maiores do que ele.
  - Se  $a = 2$  restam os números 3, 4, 5, 6, 7 e basta  $\overline{cdefg}$  ser vaivém, pois  $c > 1 = b$  e então  $n$  seria vaivém. Note que 3 é o menor dos que restaram, então deve estar na posição  $d$  ou  $f$ . Sem perda de generalidade,  $d = 3$  (pois  $d$  e  $f$  são simétricos em  $\overline{cdefg}$ , então basta multiplicar o resultado por 2 ao final). Assim, restam 4 números. Temos  $\binom{4}{3}$  trios de números para formar  $\overline{efg}$  sendo que  $f$  será o menor deles e podemos trocar  $f$  e  $g$  de lugar. Portanto, temos  $\binom{4}{3} \cdot 2 = 8$  opções. Como  $f$  pode ser 3 também, temos 16 números nesse caso.
  - Se  $d = 2$  então temos 5 números restando e

$$a > 1 < c > 2 < e > f < g$$

Então temos  $\binom{5}{3}$  trios de número para comporem  $\overline{efg}$  onde  $f$  será o menor deles e podemos trocar  $e$  e  $g$  de lugar. Note que dos dois números  $x, y$  que restaram, podemos colocá-los em  $\{a, c\}$  ou  $\{c, a\}$  pois ambos são maiores que 2. Assim, pelo princípio multiplicativo temos  $\binom{5}{3} \cdot 2 \cdot 2 = 40$  números.





- Se  $f = 3$  é análogo ao caso anterior, pois  $d$  e  $f$  são simétricos em  $\overline{cdefg}$ . Portanto, temos mais 40 números

Assim, temos 96 números nesse caso.

- Se  $f = 2$  é análogo a  $b = 2$  pois  $b$  e  $f$  são simétricos em  $\overline{abcdefg}$ . Desse modo, temos mais 96 números.

Portanto, concluímos achando  $80 + 96 + 96 = 272$  números possíveis.



## Problema 5 - Escrito por Fábio Medeiros

**Problema:** Dados  $n$  pontos distintos no plano existem  $\frac{n(n-1)}{2}$  pares de pontos. Encontre todos os inteiros positivos  $n$ , com  $n \geq 3$ , para os quais existe um conjunto de  $n$  pontos no plano tais que para cada inteiro  $d$  do conjunto  $\{1, 2, \dots, \frac{n(n-1)}{2}\}$  existe um par de pontos com a distância igual a  $d$ .

**Solução:** Primeiramente, vamos provar o seguinte fato:

**Lema:** Se tal configuração existe para  $n$  pontos, então todos são colineares.

**Demonstração:** Suponha que não. Tome os pontos  $A$  e  $B$  tais que a distância entre eles seja 1. Se existe  $C$  fora, seja  $CA = x \neq CB = y$ . Por desigualdade triangular no  $\triangle ABC$  temos

$$x + 1 > y, \quad y + 1 > x$$

E como  $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow x + 1 \geq y + 1, \quad y + 1 \geq x + 1 \Rightarrow x = y$$

absurdo!

Agora, vamos mostrar que para  $n \geq 5$  não existe tal configuração. Suponha, por absurdo, que exista e seja  $\frac{n(n-1)}{2} = S$ . Se existe tal configuração para  $n$  pontos em uma reta, tome os dois mais externos  $P_1$  e  $P_n$  (tais que todos os outros pontos estão no segmento  $P_1P_n$ ). Assim,  $P_1P_n = S$ .

Devemos ter dois pontos com distância  $P_iP_j = S - 1$  e como todos os demais estão dentro de  $P_1P_n$ , se nenhum entre  $P_i$  e  $P_j$  é  $P_1$  ou  $P_n$  (s.p.g  $P_i$  está mais a esquerda que  $P_j$ ) então  $S > P_1P_j = P_1P_i + P_iP_j = P_1P_i + S - 1 \geq S$ , absurdo! Logo, s.p.g, sabemos que  $P_j = P_n$  e então  $P_i = P_2$  onde  $P_1P_2 = 1, P_2P_n = S - 1$ . Temos a seguinte configuração:



Onde  $A$  e  $B$  são tais que  $BP_n = 1 = P_2A$  e então  $A$  e  $B$  não podem ser mais selecionados, se não repetiríamos uma distância. Deve aparecer a distância  $S-2$ . Note que  $BP_2 = S - 2 = AP_n$  então  $P_2$  e  $P_n$  não podem estar envolvidos nela, pois se não  $A$  ou  $B$  apareceriam. Se  $P_1$  também não aparece nela, os pontos  $P_iP_j = S - 2$  estão no intervalo  $AB \leq S - 3$ , absurdo! Logo,  $P_1P_{n-1} = S - 2, P_{n-1}P_n = 2$  e  $P_2P_{n-1} = S - 3$  e temos a seguinte figura:



Onde  $P_2C = 2$ ,  $DP_{n-1} = 2$ ,  $EP_{n-1} = 1$  então C, D e E não podem ser escolhidos se não repetimos tamanhos.

Devemos ter dois pontos com distância  $S - 4$  (note que  $S - 4 > 2 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} > 6$  fato para  $n \geq 5$  e então a distância  $S - 4$  ainda não apareceu). Note que  $P_1D = P_2E = AP_{n-2} = S - 4$  e se  $P_iP_j = S - 4$  e  $P_i, P_j$  estão dentro de CD, temos  $S - 7 = CD \geq P_iP_j = S - 4$ , absurdo. Logo, o segmento com  $S - 4$  deve envolver  $P_n$ . Então  $P_3P_n = S - 4$  e  $P_2P_3 = 3$ . Assim temos a figura a seguir:



Até agora, temos distâncias 1, 2, 3, 4, S-6, S-4, S-3, S-2, S-1, S. Sejam F e G tais que  $P_3F = 1$  e  $GP_{n-1} = 3 \Rightarrow F$  e  $G$  não podem ser escolhidos.

Devemos ter dois pontos com distância  $S - 5$  (note que  $S - 5 > 4 \frac{n(n-1)}{2} > 9$  fato para  $n \geq 5$  então a distância  $S - 5$  não apareceu). Perceba que  $P_1G = P_2D = P_3B = CP_{n-1} = FP_n = S - 5$  então a distância S-5 não pode envolver nenhum dos pontos já existentes. Portanto,  $P_iP_j = S - 5$  com  $P_i$  e  $P_j$  entre F e G  $\Rightarrow S - 10 = FG \geq P_iP_j = S - 5$ , absurdo! (Perceba que a configuração  $P_1P_2P_3P_{n-1}P_n$  não funciona para  $n = 5$  pois nessa configuração não aparece a distância 5).

Portanto, resta  $n \leq 4$ .

- $n = 2$ : Tome os pontos A, B com  $AB = 1$ .
- $n = 3$ : Tome os pontos A, B e C colineares nessa ordem com  $AB = 1, BC = 2 \Rightarrow AC = 3$ .
- $n = 4$ : Tome os pontos A, B, C e D colineares nessa ordem com  $AB = 1, BC = 3, CD = 2 \Rightarrow AC = 4, BD = 5, AD = 6$ .

Assim, os  $n$  que satisfazem o enunciado são 2, 3 e 4.