Soluções da OBM N2

Questão 1 - Escrito por Maria Luisa

Um número inteiro positivo é dito vaivém quando, considerando a sua representação na base dez, o primeiro algarismo da esquerda para a direita é maior que o segundo, o segundo é menor que o terceiro, o terceiro é maior que o quarto e assim por diante, alternando maior e menor até o último algarismo. Por exemplo, 2021 é vaivém, pois $2 > 0e0 < 2e2 > 1$. O número 2023 não é vaivém, pois $2 > 0e0 < 2$, mas 2 não é maior do que 3. Por exemplo, 4253617 é um destes números. Mas 5372146 não é (2 é maior do que 1 e 1 é menor do que 4) e 2163457 também não é (4 é menor do que 5).

a)Existem quantos inteiros positivos vaivéns de 2000 até 2100?

Já que o intervalo é de 2000 a 2100, sabemos que os primeiros dois algarismos serão 2 e 0. Sabe-se que o terceiro algarismo deve ser maior do que o segundo, porém ao mesmo tempo maior que o quarto. Portanto, se o terceiro algarismo for 1 o quarto será 0, com essa lógica estabelecemos que se o terceiro algarismo for 2 o quarto pode ser 1 ou 0.

2 0 1 0
2 0 2 (1 ou 0)
2 0 3 (0, 1, 2)
2 0 4 (0, 1, 2, 3)
2 0 5 (0, 1, 2, 3, 4)
2 0 6 (0, 1, 2, 3, 4, 5)
2 0 7 (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)
2 0 8 (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)
2 0 9 (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)

Assim basta adicionar todos os casos. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ Portanto, existem 45 números vaivéns de 2000 até 2100.

b) b) Qual é o maior número vaivém sem algarismos repetidos?

Sabe-se que existem no máximo 10 algarismos distintos. Portanto, sabemos que o 9 será o denominador. O segundo algarismo deve ser o maior possivél dentro da regra dos números vaivém, portanto, deve ser o número 7. O terceiro algarismo é o número 8 pois é maior que 7. Em seguida, o quarto algarismo deve ser o 5 já que o quinto algarismo deve ser maior que ele. Logo, se seguirmos esse padrão o maior número vaivém sem algarismos repetidos é 9785634120.

c)Quantos números de 7 algarismos distintos formados pelos dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 são vaivéns?

Iremos dividir esse problema em dois casos. O primeiro caso consistirá em organizar todos os números onde o número 1 ficará no meio do número de 7 algarismos. Aqui são todas as possíveis combinações de três dígitos que ficarão na frente do algarismo 1 que estará posicionado no meio.

345 234
345 235
347 236
356 237
357 245
367 246
456 247
457 256
467 257
567 267

20 possíbilidades

Agora, desses três algarismos montaremos 2 vaivém. Também podemos montar 2 vaivém com outros 3 algarismos.

Portanto, o total número de números vaivém nesse caso é $20 * 2 * 2 = 80$

Por outro lado, o segundo caso constituí em o 1 estando na segunda posição do número de 7 algarismos. Onde o primeiro algarismo tem 6 possibilidades. E com os outros cinco algarismos formamos um vaivém que pode ser feito de 16 maneiras. Portanto, o total é $16 * 6 * 2 = 192$ Logo, a resposta será a soma dos dois casos que é $80 + 192 = 272$

Solução 2 - Escrito por Fábio Medeiros

Solução:
a) Note que sendo $n = \overline{abcd}$ um número satisfazendo o enunciado, $2 = a > b \Rightarrow b \in \{0, 1\}$. Se $b = 1 \Rightarrow n = 2100$ que não é vaivém. Logo, $b = 0$. Assim, $c > b = 0$ e $c > d$ então basta $\overline{cd}$ ser vaivém de dois algarismos ($c \neq 0$).

Para isso, se $c = 1$ temos 1 opção ($d = 0$), se $c = 2$ temos 2 opções ($d = 0$ ou $d = 1$), ..., se $c = 9$ temos 9 opções ($d = 0$, ..., $d = 8$). Portanto, existem $1 + 2 + ... + 9 = 45$ números vaivém nesse intervalo.

b) Vamos construir esse número M. Para isso M tem no máximo 10 algarismos (pois todos são distintos) $\Rightarrow M = \overline{abcdefghij}$. O maior número possível para a primeira posição é $a = 9$. Note que $b \neq 8$ se não $c > b = 8 \Rightarrow c = 9 = a$, absurdo! Logo o maior valor possível para b é 7. O maior valor possível para c é 8. Assim, $M = \overline{978defghij}$. Repetindo o processo,

$$d \neq 6 \Rightarrow d = 5, e = 6 \Rightarrow f \neq 4 \Rightarrow f = 3, g = 4 \Rightarrow h \neq 2 \Rightarrow h = 1, i = 2 \Rightarrow j = 0$$

Portanto, $M = \overline{9785634120}$.

c) Seja $n = \overline{abcdefg}$ um número dessa forma. Sabemos que

$$a > b < c > d < e > f < g$$

Portanto, como o algarismo 1 é o menor, ele deve estar em uma das posições b, d ou f.

- Se $d = 1$ então restam os algarismos 2, 3, 4, 5, 6, 7. Ou seja, basta $\overline{abc}$ e $\overline{efg}$ serem vaivém pois $c > d = 1$ e $e > d = 1$, então n seria vaivém. Para isso, dos 6 números restantes, temos $\binom{6}{3}$ trios $\{x, y, z\}$ para formarem $\overline{abc}$ e o menor deles será o b automaticamente. Temos duas opções para trocar a e c de lugar. Os outros três números restantes formarão $\overline{efg}$ e analogamente, temos duas opções para isso (o menor será f e podemos trocar e e g de lugar). Portanto, pelo princípio multiplicativo temos $\binom{6}{3} \cdot 2 \cdot 2 = 80$ números.

- Se $b = 1$ note que 2 só pode estar nas posições a, d ou f, pois todos os demais números são maiores do que ele.

  - Se $a = 2$ restam os números 3, 4, 5, 6, 7 e basta $\overline{cdefg}$ ser vaivém, pois $c > 1 = b$ e então n seria vaivém. Note que 3 é o menor dos que restaram, então deve estar na posição d ou f. Sem perda de generalidade, $d = 3$ (pois d e f são simétricos em $\overline{cdefg}$, então basta multiplicar o resultado por 2 ao final). Assim, restam 4 números. Temos $\binom{4}{3}$ trios de números para formar $\overline{efg}$ sendo que f será o menor deles e podemos trocar f e g de lugar. Portanto, temos $\binom{4}{3} \cdot 2 = 8$ opções. Como f pode ser 3 também, temos 16 números nesse caso.

– Se $d = 2$ então temos 5 números restando e

$$a > 1 < c > 2 < e > f < g$$

Então temos $\binom{5}{3}$ trios de número para comporem $\overline{efg}$ onde f será o menor deles e podemos trocar e e g de lugar. Note que dos dois números x,y que restaram, podemos colocá-los em $\{a,c\}$ ou $\{c, a\}$ pois ambos são maiores que 2. Assim, pelo princípio multiplicativo temos $\binom{5}{3} \cdot 2 \cdot 2 = 40$ números.

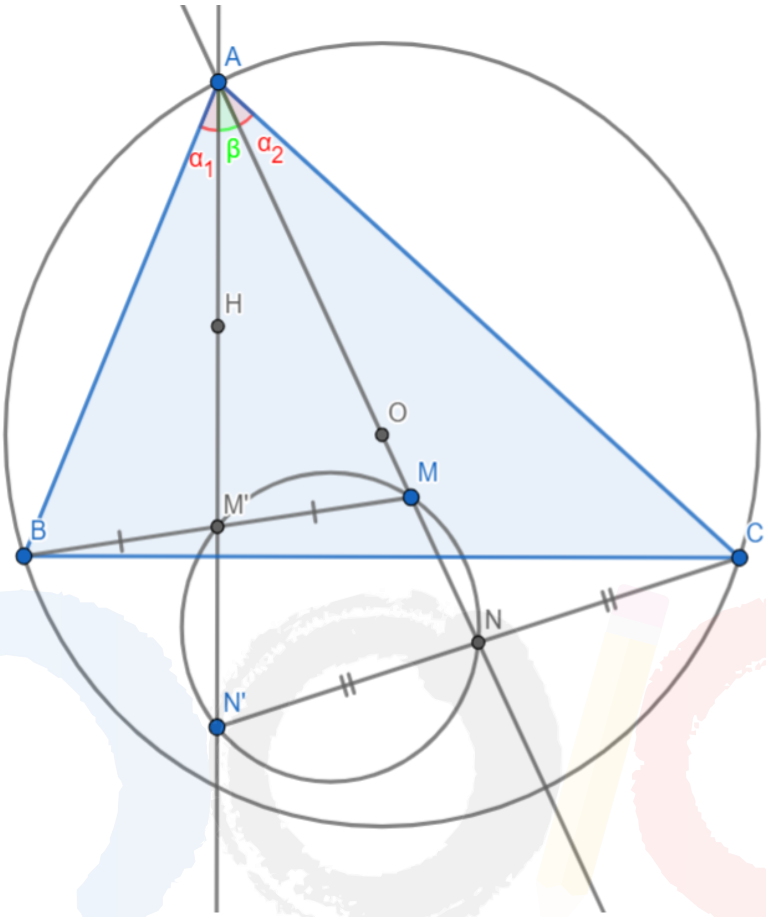
– Se $f = 3$ é análogo ao caso anterior, pois d e f são simétricos em $\overline{cdefg}$. Portanto, temos mais 40 números

Assim, temos 96 números nesse caso.

- Se $f = 2$ é análogo a $b = 2$ pois b e f são simétricos em $\overline{abcdefg}$. Desse modo, temos mais 96 números.

Portanto, concluímos achando $80 + 96 + 96 = 272$ números possíveis.

Problema 2 - Escrito por Levi Branco



Perceba que $\angle BAH = 90° - \hat{B} = \angle AOC$
Seja $\angle BAH = \alpha_1$, $\angle HAO = \beta$ e $\angle AOC = \alpha_2$ assim como na figura acima!

Por ceviana qualquer em ΔABM com referência a AM' , temos:

$$\frac{AB}{AM} \cdot \frac{sen\ \alpha_1}{sen\ \beta} = \frac{BM'}{M'M} = 1 \implies \frac{sen\ \alpha_1}{sen\ \beta} = \frac{AM}{AB}$$

Mas , por ceviana qualquer em $\Delta CAN'$ em relação a AN , temos:

$$\frac{AC}{AN'} \cdot \frac{sen\ \alpha_2}{sen\ \beta} = \frac{NC}{N'N} = 1 \implies \frac{sen\ \alpha_2}{sen\ \beta} = \frac{AN'}{AC}$$

Mas como $\alpha_1 = \alpha_2 \implies \frac{sen\ \alpha_1}{sen\ \beta} = \frac{sen\ \alpha_2}{sen\ \beta} \implies \frac{AM}{AB} = \frac{AN'}{AC}$ ☺

Assim , como $\angle BAM = \angle CAN'$ e $\frac{AM}{AB} = \frac{AN'}{AC} \implies \Delta BAM \sim \Delta CAN$ (LAL)

Finalmente , pela semelhança , $\angle AMB = \angle AN'C \implies \angle M'N'N + \angle M'MN = 180° \implies (M'MNN')$ é cíclico e terminamos $\ddot\smile$

Problema 3 - Escrito por Levi Félix

3. Seja n um inteiro positivo. Mostre que existem inteiros $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nem todos iguais, satisfazendo

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 0 \\ x_1 + x_2^2 + x_3 + \ldots + x_n = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3^3 + \ldots + x_n = 0 \\ \vdots \\ x_1^2 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n^2 = 0 \end{cases}$$

se, e somente se, $2n-1$ é composto.

Veja que, para quaisquer $1 \leq i,j \leq n$ distintos tais que $x_i \neq x_j$,

$$x_i^2 + x_j + \sum_{k \neq i,j} x_k = x_j^2 + x_i + \sum_{k \neq i,j} x_k = 0 \Rightarrow (x_i - x_j)(x_i + x_j) = (x_i - x_j) \Rightarrow x_j = 1 - x_1$$

Logo, os inteiros $x_1, x_2, \ldots x_n$ só assumem dois valores distintos que somam 1, digamos c e $1-c$.

Suponha que k dessas entradas sejam c e as $n-k$ restantes, $1-c$. Logo, pelo enunciado, temos

$$c^2 + (k-1)c + (n-k)(1-c) = 0 \Rightarrow c^2 - (n-2k+1)c + n - k = 0$$

Como c é um valor inteiro, olhando isso como uma equação do 2° grau em c, temos que seu delta deve ser um quadrado perfeito, ou seja, sendo x um inteiro não negativo,

$$(n-2k+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (n-k) = x^2 \iff 2n-1 = (n-2k)^2 - x^2 = (n-2k-x)(n-2k+x)$$

Logo, se $2n-1$ é um número primo, temos duas possibilidades:

i) $n-2k-x = 1 \Rightarrow n-2k+x = 2x+1 \Rightarrow 2n-1 = 2x+1 \Rightarrow n = x+1$. Mas, novamente, $n-2k-x = 1 \Rightarrow k = 0$, absurdo, já que não podemos ter todos os valores iguais a $1-c$ pelo enunciado.

ii) $n-2k+x = -1 \Rightarrow n-2k-x = -2x-1 \Rightarrow 2n-1 = 2x-1 \Rightarrow n = x+1$. Substituindo em $n-2k-x = 1-2x$, temos $1-2k = -1-2x \Rightarrow k = x+1 = n$. Mas k não pode ser igual a n, pois pelo enunciado não podemos ter todos os valores iguais a c. Contradição!

Assim, se existem tais inteiros $x_1, \dots, x_n$, $2n-1$ é composto. Provemos agora a volta da proposição:

Se $2n-1$ é composto, seja $2n-1 = ab$ com $a,b > 1$ inteiros positivos. Queremos uma solução para k inteiro com $0 < k < 2n$ para o sistema $n - 2k + x = a$, $n - 2k - x = b$. Somando e subtraindo as duas equações, temos $k = \frac{2n-a-b}{4}$ e $x = \frac{a-b}{2}$. Como a,b são ímpares já que $2n-1$ é ímpar, x é sempre inteiro. Logo, devemos garantir que $4 \mid 2n - a - b$. Separemos em casos:

i) Se n é par: $n = 2y \Rightarrow 2n - 1 = 4y - 1 = ab \Rightarrow ab \pmod 4$, já que -1 não é resíduo quadrático módulo 4. Logo, $\{a,b\} = \{1,3\}$ em mod $4 \Rightarrow 4 \mid -a-b \Rightarrow 4 \mid 4y - a - b = 2n - a - b$. Ou seja, $k \in \mathbb{Z}$.

ii) Se n é ímpar: $n = 2y + 1 \Rightarrow 2n - 1 = 4y + 1 = ab \Rightarrow a \equiv b \pmod 4$ já que $ab \equiv 1 \pmod 4$. Logo, $-a - b \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow 4 \mid 4y + 2 - a - b = 2n - a - b$. Ou seja, $k \in \mathbb{Z}$.

E por último, veja que $0 < k < 2n \iff 0 < \frac{2n-a-b}{4} < 2n \iff -2n < a+b < 2n$, o que é verdade já que a,b são inteiros positivos e $a + b < ab = 2n - 1 < 2n$.

Logo, se $2n-1$ é composto, existem tais $x_1, \dots, x_n$ e acabamos.

Problema 4 - Escrito por Fernando

Enunciado. Determine o menor inteiro k para o qual existem inteiros positivos a,b,c, dois a dois distintos, tais que

$$a^2 = bc \quad \text{e} \quad k = 2b + 3c - a.$$

Resposta. O menor valor de k é 9.
Solução. Tome a qualquer. Para minimizar k, sabendo que $b \neq c$, temos que $b > c$, pois a igualdade $a^2 = bc$ é simétrica em relação a b e c. Logo, $b > a > c$. Assim, $k = 2b + 3c - a \geq 2b + 3c - (b - 1) = b + 3c + 1$. Logo, $k \geq b + 3c + 1$. Basta encontrar os menores valores para b e c:
$a = 1 \implies b = c = 1$, absurdo pois $b \neq c$.
$a = 2 \implies b = 4, c = 1$ e então $k = 9$.
$a = 3 \implies b = 9, c = 1$ e então $k \geq 9 + 3 \cdot 1 + 1 = 13$.
$a = 4 \implies (b,c) = (8,2)$ ou $(b,c) = (16,1)$. Em qualquer caso, $k > b + 1 \geq 9$.
$a \geq 5$ nos diz que $b \geq 6$, e então $k \geq b + 3c + 1 \geq 6 + 3 + 1 = 10$.
Logo, o menor valor de k é 9, e ocorre para $(a,b,c) = (2,4,1)$.

Problema 5 - Escrito por João Lemos

Enunciado: Um inteiro $n \geq 3$ é *fabuloso* se existe algum inteiro $1 < a < n$ tal que $a^n - a$ é múltiplo de n. Encontre todos os inteiros fabulosos.
Resposta. Todos os n que não são potências de 2 são fabulosos.
Solução. Dividimos o problema em duas partes:

Parte 1. Vamos fazer alguns casos particulares de n, e ver se encontramos algo para realizar o caso geral.
Para $n = 3$, só podemos ter $a = 2$, que de fato funciona.
Para $n = 4$, temos $a = 2$ ou $a = 3$, e nenhum deles funciona.
Para $n = 5$, testando $a = 2,3,4$, vemos que todos funcionam. De fato, todos os primos funcionam pelo Teorema de Fermat.
Para $n = 8$, podemos testar e verificar que nenhum número funciona. Entretanto, vamos procurar algo mais geral: se $8|a^8 - a = a(a^7 - 1)$, ou 8 divide a ou 8 divide $a^7 - 1$, já que esses números são coprimos. Como $a < 8$, temos que $8|a^7 - 1$, mas

$$a^7 - 1 = (a-1)(a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1),$$

e $a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ é ímpar. Logo, $8|a - 1$, e isso nos daria $a = 1$, absurdo.
Para $n = 9$, note que $9|8^9 - 8$. Em geral, para n ímpar, temos que $n|(n-1)^n - (n-1)$, pois $(n-1)^n - (n-1) \equiv (-1)^n + 1 \equiv (-1) + 1 \equiv 0 \pmod{n}$. Portanto, todos os ímpares são fabulosos.
Como último caso particular, façamos $n = 12$. Vamos analisar todos os casos possíveis, com o objetivo de encontrar algum que nos dê alguma ideia de como resolver o caso geral.
Queremos determinar se existe $1 < a < 12$ tal que $12|a^{12} - a$. Para isso, precisamos que $4|a^{12} - a$ e $3|a^{12} - a$. Então, ou 4 divide a ou 4 divide $a^{11} - 1$, sendo que este último caso nos daria $4|a - 1$, já que, para todo $t > 0$ ímpar,

$$a^t - 1 = (a-1)(a^{t-1} + a^{t-2} + \ldots + a + 1), \qquad ()$$

sendo que $a^{t-1} + a^{t-2} + \ldots + a + 1$ é ímpar. Logo, $4|a$ ou $4|a - 1$. Então, existe um inteiro k tal que $a = 4k$ ou $a = 4k + 1$, e, como $a < 12$, $k < 3$. Testando os possíveis valores de a, que são 4,5,8,9, obtemos $a = 4{,}9$ como soluções.
Assim, já sabemos que para todo n ímpar há solução. Além disso, nos casos mais trabalhosos ($n = 8{,}12$), o resultado visto em (

), junto com a parte par de n, foram bastante úteis para reduzir a quantidade de casos que temos de analisar. Isso é bom, já que, para os valores de n que não funcionam, devemos analisar todas as possibilidades. Finalmente, vamos ao caso geral.

Parte 2. Terminando o problema.
Como já sabemos que todos os ímpares funcionam, vamos supor que n é par, e então existem inteiros $k > 0$ e m, com m ímpar, tais que $n = 2^k m$.
Caso exista a tal que $n|a^n - a$, devemos ter $2^k|a^n - a$ e, então, $2^k|a$ ou $2^k|a^{n-1} - 1$, já que esses números são coprimos. Como $n - 1$ é ímpar, sabemos de (

) que $2^k|a^{n-1} - 1 \implies 2^k|a - 1$. Portanto, $2^k|a$ ou $2^k|a - 1$. Logo, existe um inteiro s tal que $a = 2^k s$ ou $a = 2^k s + 1$, e $s < m$. Assim, se $m = 1$ (e n for uma potência de 2), não obtemos nenhuma solução, pois teríamos $s < 1$, sendo que $s = 0 \implies a \leq 1$, absurdo. Logo, $m \geq 3$.
Assim, basta que exista um inteiro $1 \leq s < m$ tal que $m|(2^k s)^n - (2^k s)$ ou $m|(2^k s + 1)^n - (2^k s + 1)$. Por outro lado, como m é ímpar, o conjunto

$$\{0, 2^k, 2^k \cdot 2, \ldots, 2^k(m - 1)\}$$

é um sistema completo de resíduos módulo m. Portanto, escolha s de modo que $2^k s \equiv 1 \pmod m$, e então claramente temos $m|(2^k s)^n - (2^k s)$, além de que $2^k s > 1$ pois $s \geq 1$ e $k > 0$. Outra possível construção seria tomar s de modo que $2^k s \equiv -1 \pmod m$, e então $m|(2^k s + 1)^n - (2^k s + 1)$ também. Disso segue que, se n for par, então n não é potência de 2. Isso termina o problema.

Problema 6 - Escrito por Matheus Alencar

Vamos provar que a resposta é $m = 88$. A parte boa desse problema é que as duas estratégias são construídas por meio de algoritmos gulosos (em que pegamos o melhor pro momento sempre). O que acontece se Banana sempre tira o maior bloco possível de casas verdes? Seja A_i o bloco de de $a_i \in_{\geq 0}$ casas verdes que aparecem antes da i-ésima casa branca do tabuleiro no momento (note que o importante aqui é ser seguido de exatamente uma casa branca, possivelmente $a_i = 0$). Sabemos que $|A_i| = a_i + 1$. Suponha que no momento existam exatamente $d-1$ casas brancas e seja a_d o tamanho do bloco de casas verdes depois da última casa branca. Sabemos que

$$a_1+1+a_2+1+a_3+1+\cdots+a_{d-1}+1+a_d = 2024 \implies 2024-d+1 = a_1+a_2+\cdots+a_d$$

$\implies \exists\ i$ tal que $a_i \geq \dfrac{2025-d}{d}$ (por que em qualquer grupo de reais, algum deles é maior que a média de todos)

Assim, Se Banana sempre jogar no bloco de maior número de verdes consecutivas, teremos sempre que o número de brancas após sua jogada será sempre, pelo menos,

$$\frac{2025-d}{d} + d - 1 = \frac{2025}{d} + d - 2 \overset{MA-MG}{\geq} 2\sqrt{2025} - 2 = 88$$

Logo, se $m < 88$, Ana nunca conseguirá ganhar.

Se $m = 88$, vamos dividir o tabuleiro em 44 tabuleiros 1×45 e um tabuleiro 1×44:

1×45	1×45	$\cdots$	1×44

Nessa separação, A jogada de Ana, a cada momento será desfazer a última jogada de Banana, e pintar a casa branca mais a esquerda de cada um dos 45 retângulos de verde.

Por que isso funciona?

Basicamente, vejamos que, a cada rodada, ela aumenta em 1 casa verde, cada um dos retângulos e que, nas primeiras 43 rodadas, o máximo de casa que Banana poderá deletar, são exatamente 43 casas, então, na rodada seguinte, com certeza Ana colocará, no máximo, $43 + 45$ casas verdes. Agora, na 44ª rodada, Ana já terá completado o último retângulo, então, em sua próxima rodada, Ana vai desfazer a jogada de Banana, colocando 44 casas verdes, e aumentará cada um dos 44 retângulos ainda não completamente preenchidos em 1 casa, completando-os. Assim, fazendo 88 pinturas e completando o tabuleiro, como queríamos.