Soluções da OBM N3

Problema 1 - Escrito por Caique Paiva

Esse é um problema de construção, um problema onde a dificuldade dele parte de achar um exemplo que resolva o problema. Normalmente tem 2 tipos de problemas de construção, os que nos dão condições muito limitadas e difíceis de trabalhar, e os que nos dão pouquíssimas condições, e a dificuldade dele está em não se perder com tantos exemplos possíveis. Esse problema é do segundo tipo.

Uma ideia padrão para esse tipo de problema é você tentar criar mais condições para te ajudar a achar o exemplo! Vamos fazer isso. Veja a segunda condição do problema

$$a_n + a_{2n} + \cdots + a_{2023n} = 0$$

Seria muito bom se nós pudéssemos colocar esses n dos índices em evidência. Então, vamos tentar construir uma sequência que tem essa propriedade! Ou seja, nosso exemplo vai seguir a seguinte condição:

$$a_{mn} = a_m a_n \forall n, m \in \mathbb{N}$$

Com isso, a segunda condição se torna:

$$a_n + a_{2n} + \cdots + a_{2023n} = a_n a_1 + a_n a_2 + \cdots a_n a_{2023} = 0$$
$$\implies a_n(a_1 + a_2 + \cdots + a_2 023) = 0$$

E como $a_n \neq 0$ para todo n, só precisamos que $a_1 + a_2 + \cdots + a_2 023 = 0$. Agora, veja que, pela condição do $a_m a_n = a_{mn}$, temos primeiro que $a_1 = 1$, pois $a_1^2 = a_1 \to a_1 = 1$, e a segunda coisa é que, se escolhermos os valores de a_p com p primo, a sequência já vai estar bem definida! Dito isso, e sabendo que 2017 é primo, vamos construir a seguinte sequência:

$$\begin{cases} a_p = 1 & \forall p \text{ primo, diferente de } 2017 \\ a_{mn} = a_m a_n & \forall m, n \in \mathbb{N} \\ a_{2017} = -2022 \end{cases}$$

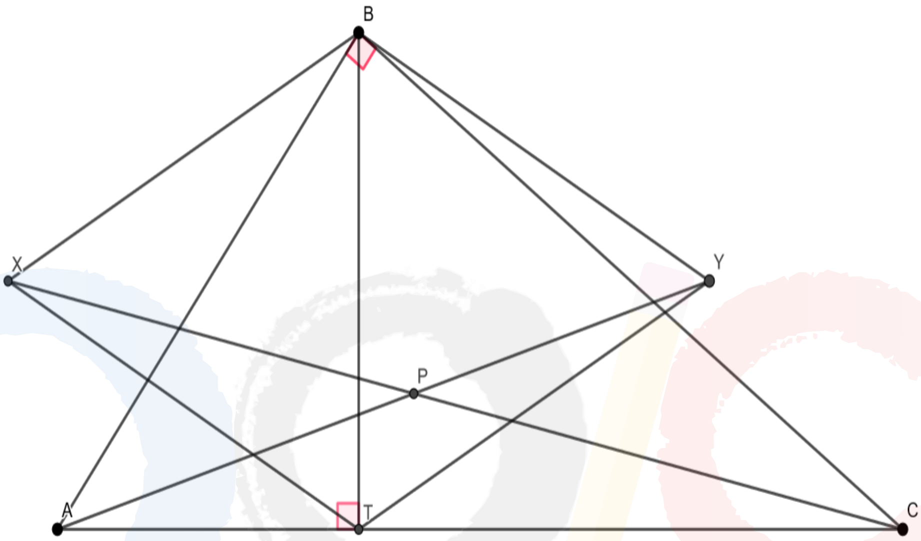
Como falamos acima, essa sequência está bem definida, e além disso, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2023} = 0$, pois para todo $i \leq 2023, i \neq 2017$, temos que $a_i = 1$, e $a_{2017} = -2022$.

Problema 2 - Escrito por João Vitor

Seja ABC um triângulo retângulo em B, com altura BT, T sobre a hipotenusa AC. Construa os triângulos equiláteros BTX e BTY de modo que X esteja no mesmo semiplano que A com relação a BT no e Y esteja no mesmo semiplano que C com relação a BT. O ponto P é a interseção de AY e CX. Prove que

$$PA \cdot BC = PB \cdot CA = PC \cdot AB$$

.



Note que, por simetria, se mostrarmos que

$$PC \cdot BA = PB \cdot CA$$

, deve valer também a igualdade $PA \cdot BC = PB \cdot CA$, o que conclui o problema.

Por relações métricas no triângulo retângulo,

$$BT^2 = AT \cdot TC$$
$$\implies TX \cdot TY = AT \cdot TC$$
$$\implies \frac{TX}{TC} = \frac{TA}{TY}.$$

Como $\angle XTC = \angle ATY = 150°$, temos $XTC \sim ATY$ por LAL. Daí $\angle TXC = TAY$, o que implica que $ATPX$ é cíclico.

Assim, CB é tangente ao circuncírculo de BPX, pois

$$CP \cdot CX = CT \cdot CA = CB^2,$$

sendo a primeira igualdade por potência de ponto e a segunda por relacões métricas no triângulo retângulo. Consequentemente $CBX \sim CPB$, e daí

$$\frac{PC}{PB} = \frac{BC}{BX} = \frac{BC}{BT} = \frac{CA}{BA}$$

concluindo a solução.

Problema 3 - Escrito por Matheus Alencar

Ao pensar em problemas de jogos, é muito comum tentar achar uma simetria entre os jogadores, e esse problema não é nada diferente disso. Por ser um problema 3, é comum que você se assuste antes de pensar nele, mas saiba que não há nada a temer nesse problema, mesmo sendo o "mais difícil da prova": Vamos dividir o problema em dois casos, quando n é par, e quando n é ímpar:

Caso 1: n é par

Vamos provar que SpaceZ consegue ganhar nesse caso. Divida os possíveis tamanhos de colônias em pares de números consecutivos:

$$(1,2); (3,4); (5,6); \ldots$$

Se SpaceY fizer uma jogada do tipo (i) e fizer uma nova colônia de $k \in$ humanos, basta que spaceZ faça uma colônia com o número que foi pareado com k de colônias, seja tal número $= f(k)$. Assim, como há no máximo um número par de colônias, SpaceZ sempre vai poder fazer essa jogada quando SpaceY a fizer.

Quando SpaceY fizer uma jogada do tipo (ii), diminuindo uma colônia de k seres humanos para k' habitantes, basta que SpaceZ passe a colônia com $f(k)$ elementos para $f(k')$ elementos. Assim, SpaceZ sempre poderá fazer uma jogada quando SpaceY jogar, então SpaceZ não falirá primeiro

Caso 2: n ímpar

Vamos provar que SpaceY ganha. Basta que SpaceY faça primeiro uma colônia de uma pessoa, então copie a estratégia de SpaceZ para n par, dessa vez, com os pares sendo

$$(2,3); (4,5); \ldots$$

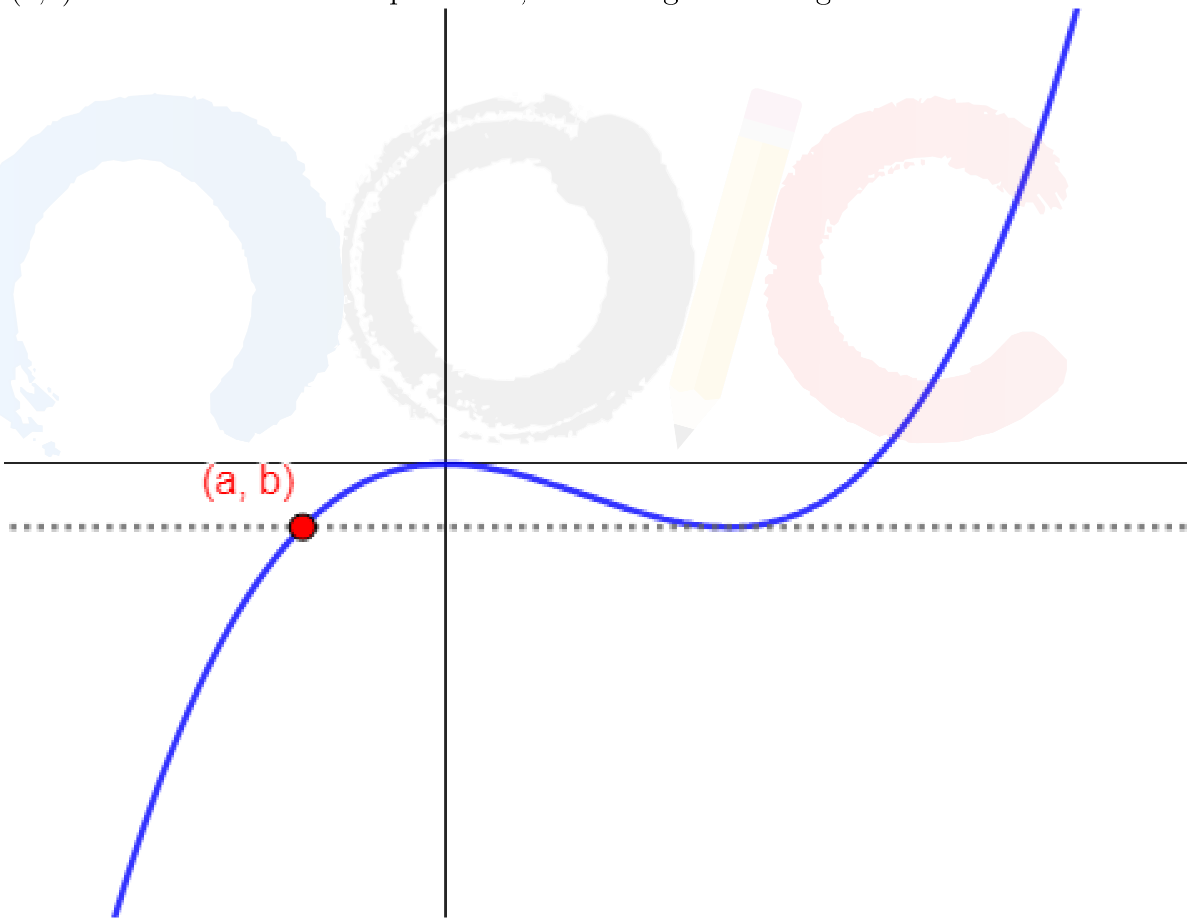
Problema 4 - Escrito por Luca Zanardi

Teremos:

$$\begin{cases} x^2 - x = yz \ (1) \\ y^2 - y = xz \ (2) \\ z^2 - z = xy \ (3) \end{cases}$$

De (1), teremos que $\frac{x^2-x}{y} = z$. De (2), $\frac{y^2-y}{x} = z$. Daí, $\frac{x^2-x}{y} = \frac{y^2-y}{x} \implies x \cdot (x^2 - x) = y \cdot (y^2 - y)$. Analogamente, obtemos então que $x^3 - x^2 = y^3 - y^2 = z^3 - z^2$. Como x, y, z são distintos entre si, a função $f(t) = t^3 - t^2$ deve assumir 3 valores distintos.

Como as raízes de f são 0 e 1 (com 0 sendo raiz dupla), a função irá crescer até o ponto (0,0), tangenciar o eixo x na origem, descer um pouco e crescer novamente até (1,0) e continuar subindo a partir daí, como no gráfico a seguir:



Assim, note que, para que $f(t)$ assuma 3 valores diferentes, $f(t)$ não pode estar abaixo (ou igual) à linha pontilhada, ou só haveria 1 (ou 2, no caso de igualdade) valor de t produzindo $f(t)$. O mesmo vale para (igual ou) acima do eixo x.

Note que se $t \geq 1$, só haverá 1 valor de t para cada $f(t)$ (ou 2, se $t = 1 \implies f(t) = 0 \iff t = 0$ ou 1, (e precisamos de 3 valores diferentes para x, y, z)). Dessa forma, $x, y, z < 1$.

Agora, basta descobrir o valor a (coordenada x no ponto vermelho da imagem) no qual se $t \leq a$, $f(t)$ assume apenas 1 ou 2 valores (1 valor se $t < a$, 2 valores se $t = a$ (nesse caso, os 2 valores seriam b e a coordenada x do ponto de tangência da reta pontilhada com $f(t)$). Seja (c, d) as coordenadas de tal ponto de tangência. Note que $f'(t) = 3x^2 - 2x$. Assim, como a reta pontilhada é horizontal, $f'(c) = 0 \implies 3c^2 - 2c = 0 \implies c \cdot (3c - 2) = 0$. Como $c \neq 0 \implies c = \frac{2}{3}$. Dessa maneira, $d = f(c) = f(\frac{2}{3}) = -\frac{4}{27}$. Assim, $b = d = -\frac{4}{27}$.

Como o problema pede para provar que $x, y, z > -\frac{1}{3}$, somos inclinados a provar que $a = -\frac{1}{3}$. Testando, vemos que, de fato, $f(-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} = -\frac{4}{27}$. Assim, para todo $t \leq -\frac{1}{3}$, $f(t)$ não assume 3 valores distintos. Dessa forma, $-\frac{1}{3} < x, y, z < 1$, como queríamos demonstrar.

Problema 5 - Escrito por Matheus Alencar

Vamos provar que a resposta é $m = 88$. A parte boa desse problema é que as duas estratégias são construídas por meio de algoritmos gulosos (em que pegamos o melhor pro momento sempre). O que acontece se Banana sempre tira o maior bloco possível de casas verdes? Seja A_i o bloco de de $a_i \in_{\geq 0}$ casas verdes que aparecem antes da i-ésima casa branca do tabuleiro no momento (note que o importante aqui é ser seguido de exatamente uma casa branca, possivelmente $a_i = 0$). Sabemos que $|A_i| = a_i + 1$. Suponha que no momento existam exatamente $d - 1$ casas brancas e seja a_d o tamanho do bloco de casas verdes depois da última casa branca. Sabemos que

$$a_1 + 1 + a_2 + 1 + a_3 + 1 + \cdots + a_{d-1} + 1 + a_d = 2024 \implies 2024 - d + 1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_d$$

$\implies \exists\ i$ tal que $a_i \geq \dfrac{2025 - d}{d}$ (por que em qualquer grupo de reais, algum deles é maior que a média de todos)

Assim, Se Banana sempre jogar no bloco de maior número de verdes consecutivas, teremos sempre que o número de brancas após sua jogada será sempre, pelo menos,

$$\frac{2025-d}{d}+d-1=\frac{2025}{d}+d-2 \overset{MA-MG}{\geq} 2\sqrt{2025}-2=88$$

Logo, se $m<88$, Ana nunca conseguirá ganhar.

Se $m = 88$, vamos dividir o tabuleiro em 44 tabuleiros 1×45 e um tabuleiro 1×44:

1×45	1×45	$\cdots$	1×44

Nessa separação, A jogada de Ana, a cada momento será desfazer a última jogada de Banana, e pintar a casa branca mais a esquerda de cada um dos 45 retângulos de verde.

Por que isso funciona?

Basicamente, vejamos que, a cada rodada, ela aumenta em 1 casa verde, cada um dos retângulos e que, nas primeiras 43 rodadas, o máximo de casa que Banana poderá deletar, são exatamente 43 casas, então, na rodada seguinte, com certeza Ana colocará, no máximo, $43 + 45$ casas verdes. Agora, na 44ª rodada, Ana já terá completado o último retângulo, então, em sua próxima rodada, Ana vai desfazer a jogada de Banana, colocando 44 casas verdes, e aumentará cada um dos 44 retângulos ainda não completamente preenchidos em 1 casa, completando-os. Assim, fazendo 88 pinturas e completando o tabuleiro, como queríamos.

Problema 6 - Escrito por João Ferreira

Para k inteiro positivo, seja $p(k)$ o menor primo que não divide k. Dado um inteiro positivo a, defina a sequência infinita a_0, a_1, $\ldots$ por $a_0 = a$ e, para $n > 0$, a_n é o menor inteiro positivo com as seguintes propriedades:

- a_n ainda não apareceu na sequência, ou seja, $a_n \neq a_i$ para $0 \leq i < n$;
- $a_{(n-1)}^{a_n} - 1$ é múltiplo de $p(a_{n-1})$.

Prove que todo inteiro positivo aparece como termo da sequência, ou seja, para todo inteiro positivo m existe n tal que $a_n = m$.

Suponha por absurdo que existem inteiros positivos que nunca aparecem na sequência. Seja p_i o i-ésimo número primo. Seja também $T(i) = \prod_{j=1}^{i} p_j$.

Lema: Existem finitos termos da sequência que não são divisíveis por p_i, para todo i.

Prova: Suponha que existem primos que não dividem infinitos termos da sequência. Seja p_i o menor deles. Olhemos para o ponto em que $T(i-1)$ divide todos os termos da sequência.

Como existem finitos restos $\pmod{p_i}$, existe um deles, r, que aparece infinitas vezes na sequência. Seja d a ordem de $r \pmod{p_i}$.

Sempre que temos $a_n \equiv r \pmod{p_i}$, a_{n+1} é o menor múltiplo de d que ainda não apareceu na sequência. Assim, todos os múltiplos de d aparecem na sequência. Em especial, aparecem infinitos mútliplos da forma $dT(i-1)k$, onde $k \equiv (dT(i-1))^{-1} \pmod{p_i}$, pois $\text{mdc}(dT(i-1), p_i) = 1$.

Note então que $p(dT(i-1)k) = p_i$ e que $dT(i-1)k \equiv 1 \pmod{p_i}$, o que implica que o termo da sequência que vem depois de $dT(i-1)k$ é o menor inteiro positivo que ainda não apareceu, pois $ord_{p_i} 1 = 1$. Como isso ocorre infinitas vezes, todos os inteiros positivos aparecem na sequência, absurdo! Assim concluímos a demonstração do lema.

Tome agora um i e um inteiro N tal que $T(i) \nmid a_N$, $T(i-1) \mid a_n$ para todo $n \geq N$ e $T(i) \mid a_n$ para todo $n > N$. Seja d a ordem de $a_N \pmod{p_i}$. Escreva $a_{N+1} = dp_i^{\alpha} T(i-1)k$, com $p_i \nmid k$.

Sabemos que todos os múltiplos de d menores que a_{N+1} já foram cobertos em algum momento. Em especial, o número $dT(i-1)l$, com $l \equiv (dT(i-1)^{-1}) \pmod{p_i}$, $1 \leq l < p_i$. Como $p(dT(i-1)l) = p_i$ e $dT(i-1)l \equiv 1 \pmod{p_i}$, o termo da sequência que veio logo depois desse número era o menor inteiro positivo que ainda não tinha aparecido na sequência. Dado que existem infinitas escolhas para

$$i$$

, todos os inteiros positivos aparecem na sequência, absurdo!

Portanto nossa suposição inicial era falsa e todo inteiro positivo aparece na sequência, concluindo a solução.