Potência de Ponto

Caique Paiva

Julho 2023

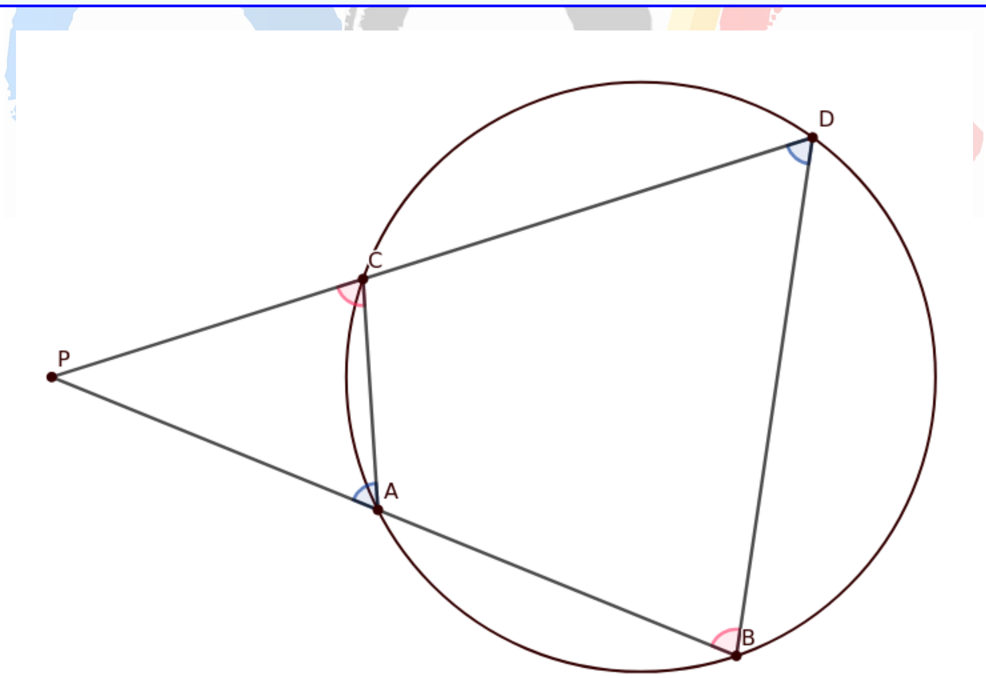
Quando começamos a estudar sobre circunferências, aprendemos principalmente sobre ângulos e como eles se comportam. Porém, por conta de semelhanças, sabebos que ângulos e lados estão conectados, então é natural ir atrás de mais teoremas envolvendos distâncias entre pontos, e é pra isso que potência de ponto serve!

§1 Introdução

Teorema 1.1

Seja P um ponto e Γ uma circunferência. Sejam r, s duas retas que passam por P e que interssectam Γ em A, B, C, D respectivamente. Temos que

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



Proof. Sabemos que $\angle PCA = \angle PBD$ e que $\angle PAC = \angle PDB$ pois o quadrilátero $ABCD$ é cíclico, portanto, $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ pelo caso ângulo-ângulo, então, temos que

$$\frac{PC}{PB} = \frac{PA}{PD} \implies PC \cdot PD = PA \cdot PB$$

$\square$

Além disso, a volta desse teorema também vale!

Teorema 1.2 (Volta da potência de ponto)
Seja A, B, C, D quatro pontos, e seja $P = AB \cap CD$. Se $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, então, $ABCD$ é ciclico

A prova é analoga a acima: Sabemos que $PA \cdot PB = PC \cdot PD \implies \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$, e além disso, $\angle APD = \angle BPC$, ou seja, $\triangle APC \sim \triangle DPB$, e então, $\angle PCA = \angle PBD$, o que implica que $ABCD$ é cíclico.

Então, com esses teoremas, podemos perceber que dado um ponto e uma circunferência, então para qualquer reta que passa por esse ponto e intersecta a circunferência, o produto das distância por P as intercessões é constante! Agora, antes de definir o que é uma potência de ponto, vamos olhar um caso específico desse teorema.

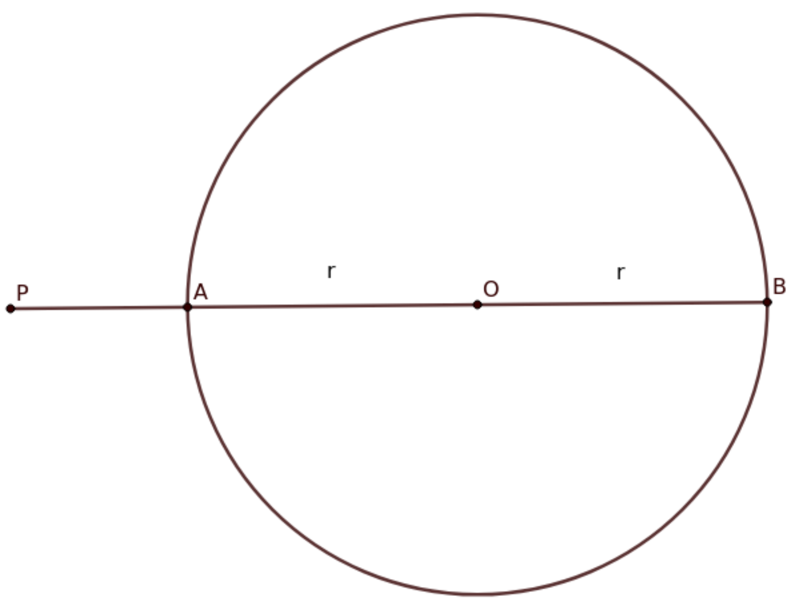
Lema 1.3
Seja P um ponto e Γ uma circunferência de centro O e raio r. Seja $\overline{PO} \cap \Gamma = A, B$. Temos que

$$\left|PO^2 - r^2\right| = PA \cdot PB$$

Proof. Vamos olhar dois casos:

- Caso 1: Se P está fora de Γ.

Então, isso significa que $PO > r$, então, queremos provar que $PO^2 - r^2 = PA \cdot PB$.

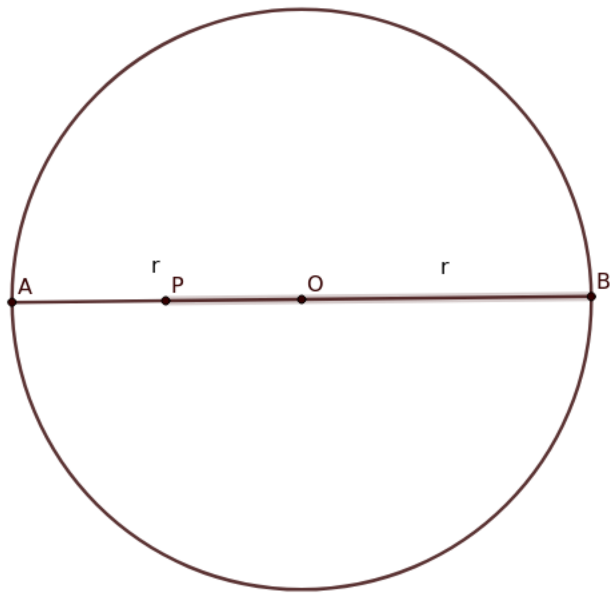


Veja que

$$PO^2 - r^2 = (PO - r)(PO + r) = (PO - AO)(PO + BO) = PA \cdot PB$$

- Caso 2: Se P está dentro de Γ.

Então, isso significa que $PO \leq r$, então, queremos provar que $r^2 - PO^2 = PA \cdot PB$.



Logo, temos que

$$r^2 - PO^2 = (r - PO)(r + PO) = (AO - PO)(BO + PO) = AP \cdot BP$$

$\square$

Com isso, podemos partir para a definição de potência de ponto!

§2 Definição

Definição 2.1. Dado uma circunferência Γ e um ponto P, definimos como

$$Pot_{\Gamma}P = PO^2 - r^2$$

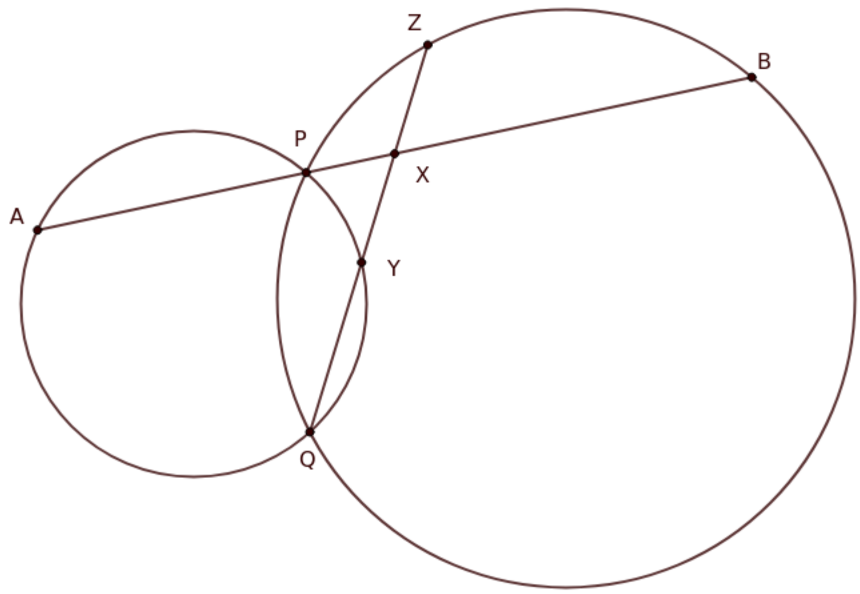
Pelos lemas acima, sabemos que para qualquer reta l que passa por P e intersecta Γ em pontos A, B, temos que $|Pot_{\Gamma}P| = PA \cdot PB$. Em particular, se pegarmos as retas tangentes a P por Γ, e chamarmos a intercessões de X, Y, temos que $|Pot_{\Gamma}P| = PX \cdot PX = PY \cdot PY$, logo $PX = PY$ (Chamamos esse lema de "teorema do bico").

Antes de continuar a teoria, vamos mostrar como isso pode ser aplicado em alguns problemas.

§2.1 Problemas

Exemplo 2.2

Dois círculos Γ_1, Γ_2 se intersectam em P, Q. Uma reta passando por P intersecta Γ_1, Γ_2 em A, B respectivamente. Se X é o ponto médio de AB e QX intersecta Γ_1, Γ_2 em Y, Z respectivamente, prove que X é o ponto médio de YZ.



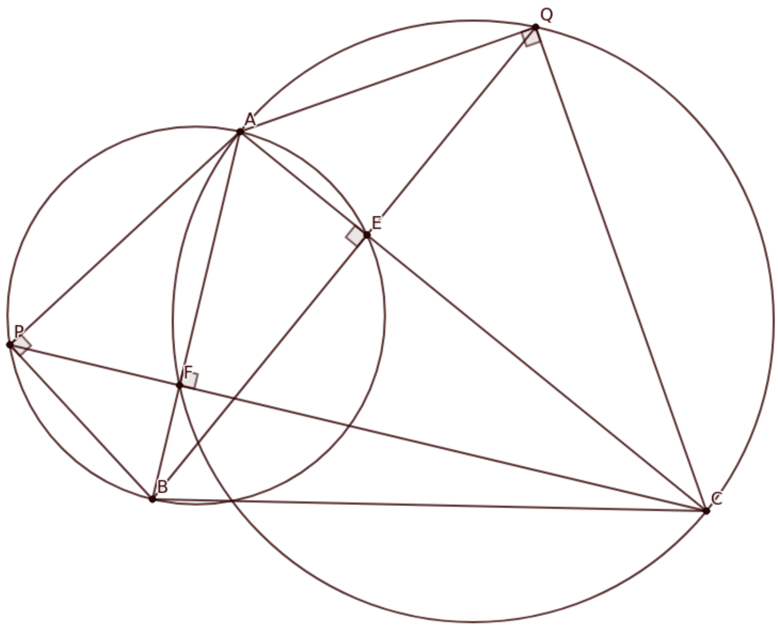
Vamos olhar a potência de ponto de X para as duas circunferências.

$$|Pot_{\Gamma_1}X| = XA \cdot XP = XY \cdot XQ$$
$$|Pot_{\Gamma_2}X| = XP \cdot XB = XQ \cdot XZ$$

Mas, temos que $XA = XB$, então $XA \cdot XP = XB \cdot XP$, logo $XY \cdot XQ = XZ \cdot XQ \implies XY = XZ$, e então X é ponto médio de YZ.

Exemplo 2.3 (OBM 1998)

Seja ABC um triângulo e E, F os pés das alturas por B, C respectivamente. Faça $(ADB) \cap CE = P$ e $(AEC) \cap BD = Q$. Prove que $AP = AQ$



Primeiro, veja que $\angle APB = 90$, pois $APBE$ é cíclico, então $\angle APB + \angle BEA = 180 \implies \angle APB = 90$. Analogamente $\angle AQC = 90$.

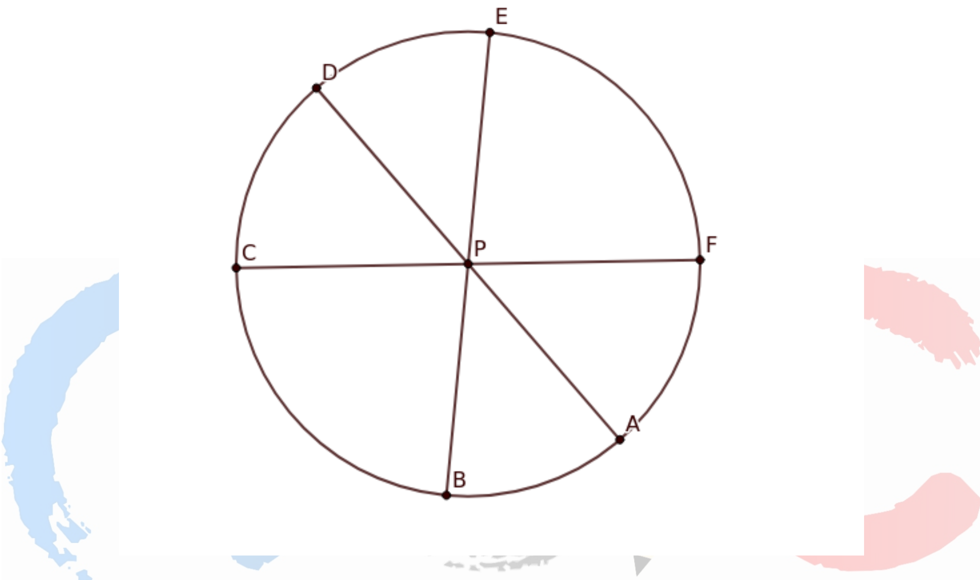
Com isso, veja que $\triangle APF \sim \triangle ABP$, pois $\angle PAF = \angle BAP$, e $\angle AFP = \angle APB$. Então, temos que

$$\frac{AP}{AF} = \frac{AB}{AP} \implies AP^2 = AF \cdot AB$$

E analogamente, $AQ^2 = AE \cdot AC$, então, $AP = AQ \iff AP^2 = AQ^2 \iff AF \cdot AB = AE \cdot AC$, e isso é verdade, pois $\angle BFC = \angle BEC = 90$, então o quadrilátero $BFEC$ é cíclico, então, $\left|Pot_{(BFEC)}A\right| = AF \cdot AB = AE \cdot AC$, como queriamos provar.

Exemplo 2.4

Seja Γ um círculo e P um ponto no interior dele. Suponha que existam três cordas de mesmo comprimento que passam por P. Prove que P é o centro da circunferência.



Vamos nomear os bois. Seja AD, BE, CF essas 3 cordas, e faça $a = |PA|, b = |PB|, \cdots, f = |PF|$. Veja que a, b, c, d, e, f vão ser 6 números reais positivos. Logo, temos que

$$a + d = b + e = c + f$$

$$|Pot_\Gamma P| = ad = be = cf$$

Logo, olhando para o polinômio de segundo grau $P(x) = x^2 - (a+d)x + ad$, sabemos que as raizes desse polinômio são a, d. Agora, olhando para o polinômio de segundo grau $Q(x) = x^2 - (b+e)x + be$, temos que as raizes desse polinômio são b, e, mas $a + d = b + e$ e $ad = be$, então $P(x) = Q(x)$, e então eles tem as mesmas raizes, logo $a = b$ e $d = e$ ou $a = e$ e $d = b$. Podemos supor sem perda de generalidade que $a = b$ e $d = e$.

Analogamente, vamos supor sem perda de generalidade que $a = c$ e $d = f$, então, temos que $PA = PB = PC$, logo, P é o circuncentro de ABC, que é o circuncentro de Γ, logo, P é o circuncentro de Γ.

§3 Eixo Radical

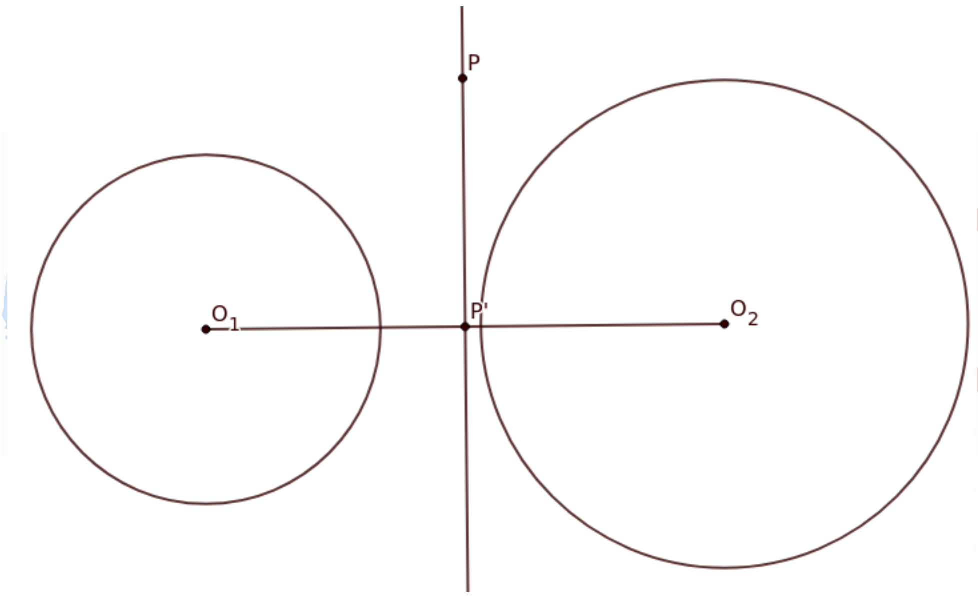
Agora que definimos o que é uma potência de ponto, é natual se perguntar, quando que temos igualdades? Essa pergunta tem uma resposta muito elegante, então vamos estudar ela!

Definição 3.1 (Eixo Radical)**.** Dado duas circunferências Γ_1, Γ_2, definimos como o **eixo radical** dessas duas circunferências o local geométrico dos pontos P tal que

$$Pot_{\Gamma_1} P = Pot_{\Gamma_2} P$$

Esse local geométrico é uma reta perpendicular aos dois centros.

Bem, vamos provar isso! Seja O_1, r_1 o centro e o raio de Γ_1 e O_2, r_2 o centro e o raio de Γ_2. Primeiro, vamos provar que todo ponto no eixo radical tem a mesma projeção em O_1O_2. Seja P um ponto no eixo radical e P' a projeção de P em O_1O_2. Se provarmos que $|O_1P'|$ e $|O_2P'|$ é constante, ou seja, essa distância não depende de P, então isso prova que P' é fixo, e que todos os pontos tem a mesma projeção.



Primeiro, temos que

$$\begin{cases} PO_1^2 = PP'^2 + P'O_1^2 \\ PO_2^2 = PP'^2 + P'O_2^2 \end{cases}$$

por pitágoras, então, subtraindo as duas equações:

$$PO_1^2 - PO_2^2 = P'O_1^2 - P'O_2^2 \Longrightarrow PO_1^2 - r_1^2 - (PO_2^2 - r_2^2) = (P'O_1 + P'O_2)(P'O_1 - P'O_2) + r_2^2 - r_1^2$$

$$\Longrightarrow 0 = O_1O_2(P'O_1 - P'O_2) + r_2^2 - r_1^2 \Longrightarrow P'O_1 - P'O_2 = \frac{r_1^2 - r_2^2}{O_1O_2}$$

Mas, sabemos que $P'O_2 = O_1O_1 - P'O_1$, logo

$$P'O_1 = \frac{r_1^2 - r_2^2 + O_1O_2}{2O_1O_2}$$

Nunca falei que ia ser uma formula boa kk... Mas o que importa é que, dada as duas circunferências, todos os termos do lado direito são constantes, ou seja, $P'O_1$ é constante, o que implica que todos os pontos no eixo radical estão na mesma reta perpendicular a O_1O_2!

Então, para acabar essa prova, precisamos provar que todos os pontos nessa reta estão no eixo radical. Vou deixar como exercício para o leitor, porém a ideia é fazer essa conta toda, só que ao contrário (Ou seja, começando a formula de $P'O_1$, chegarmos até no passo que $PO_1^2 - r_1^2 - (PO_2^2 - r_2^2) = (P'O_1 + P'O_2)(P'O_1 - P'O_2) + r_2^2 - r_1^2$).

Certo, temos esse monte de conta para definir a reta, tem alguma maneira melhor de definir ela? Sim!

Lema 3.2

Dadas duas circunferências Γ_1, Γ_2 que se intersectam em P, Q, o eixo radical delas é PQ.

A prova é bem simples. Sabemos que $Pot_{\Gamma_1} P = 0$, pois P está na circunferência, e $Pot_{\Gamma_2} P = 0$, logo P está no eixo radical. Analogamente, Q também está. Como o eixo radical é uma reta, temos que PQ é o eixo radical.

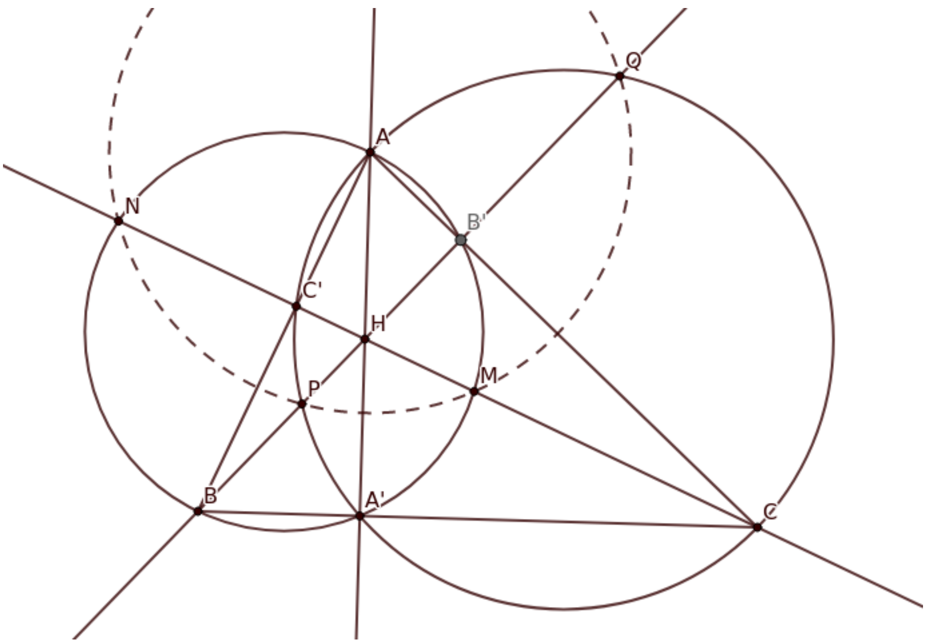
Perfeito, agora porque que isso é útil? Tem várias aplicacões, sendo a mais comum dela: Se provarmos que 3 pontos estão no mesmo eixo radical, logo eles são colineares. Então, isso se torna uma arma muito útil em provar colinearidades. Vamos ver alguns problemas para ficar mais claro.

§3.1 Problemas

Exemplo 3.3

Um triângulo ABC é dado no plano. O círculo com diâmetro AB intersecta a altura CC' e seu prolongamento nos pontos M, N, e o círculo de diâmetro AC intersecta a altura BB' em P, Q. Prove que M, N, P, Q são concíclicos.

Também defina AA' para ser a outra altura e H o ortocentro.



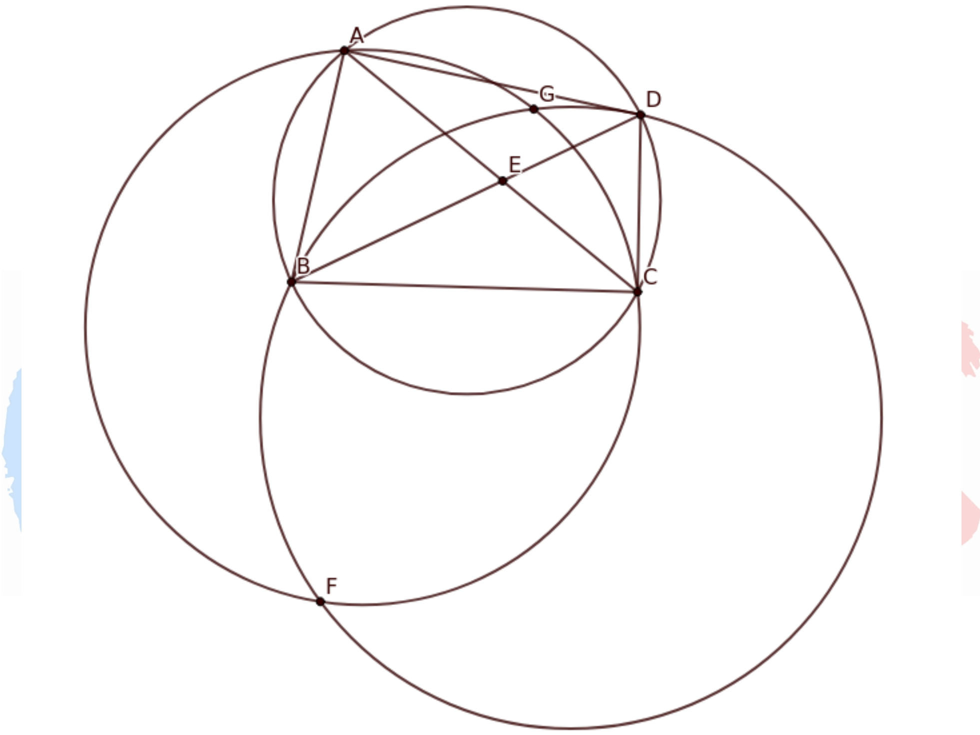
Sabemos que $(ABA'B')$ e $(ACA'C')$ são as circunferências de diametro AB, AC respectivamente (Pois $\angle AA'B = \angle AB'B = 90$ e $\angle AA'C = \angle AC'C = 90$). Portanto, temos que AA' vai ser o eixo radical dessas duas circunferências. Em particular, vamos ter que

$$HM \cdot HN = -Pot_{(ACA'C')}H = -Pot_{(ABA'B')}H = HP \cdot HQ$$

, e então, pela volta da potência de ponto, $MNPQ$ é ciclico, como queriamos provar.

Exemplo 3.4 (Banco Cone-sul)

Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico e E a intercessão das diagonais AC, BD. Se F é um ponto qualquer e as circunferências Γ_1, Γ_2 circunscritas a FAC e a FBD se intersectam novamente em G. Prove que E, F, G são colineares



Veja que FG é o eixo radical de Γ_1 e Γ_2, logo, se provarmos que E está no eixo radical de Γ_1 e Γ_2, o problema acabou. Mas

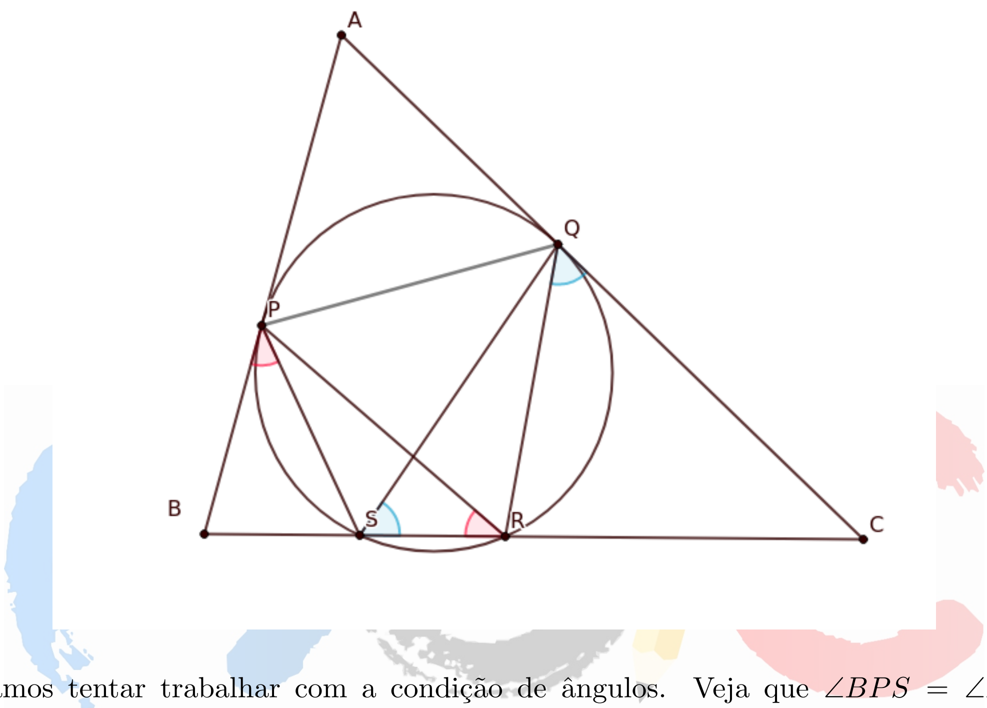
$$-Pot_{\Gamma_1}E = EA \cdot EC = -Pot_{(ABCD)}E = EB \cdot ED = -Pot_{\Gamma_2}E$$

Logo, E está no eixo radical de Γ_1, Γ_2.

Exemplo 3.5 (USAJMO 2012 P1)

Dado um triângulo ABC, seja P, Q pontos em AB, AC, respectivamente, tal que $AP = AQ$. Seja S, R pontos distintos em BC de modo que S está entre B e R, $\angle BPS = \angle PRS$ e $\angle CQR = \angle QSR$. Prove que P, Q, R, S são concíclicos.

Certo, como você pode ver, os dois problemas acima foram mais aplicações diretas de eixo radical. Esse problema já é um pouco diferente. Primeiro, vamos ver a figura (Recomendo você tentar desenhar também).

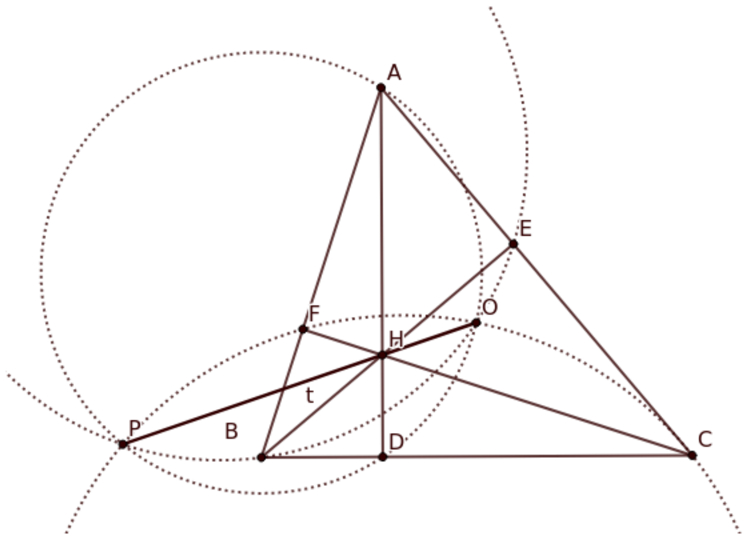


Vamos tentar trabalhar com a condição de ângulos. Veja que $\angle BPS = \angle PRS$ implica que, se olharmos a circunferência (PSR), temos que AB é tangente a mesma. Analogamente, AC é tangente a (QSR). Agora, queremos provar que a circunferência (PSR) é igual a circunferência (QSR), então, vamos supor por absurdo que elas não são.

Por conta da condição de lados ($AP = AQ$), temos que $Pot_{(QSR)}A = AQ^2 = AP^2 = Pot_{(PSR)}A$, portanto, A está no eixo radical de (PSR) e (QSR), que é SR, que é BC, então A está em BC, o que é um absurdo, pois ABC é um triângulo. Portanto, (PSR) e (QSR) são a mesma circunferência, como queriamos provar.

Exemplo 3.6

Seja ABC um triângulo e AD, BE, CF as alturas desse triângulo. Seja O o circuncentro de ABC. Prove que $(AOD), (BOE), (COF)$ se intersectam além de O.



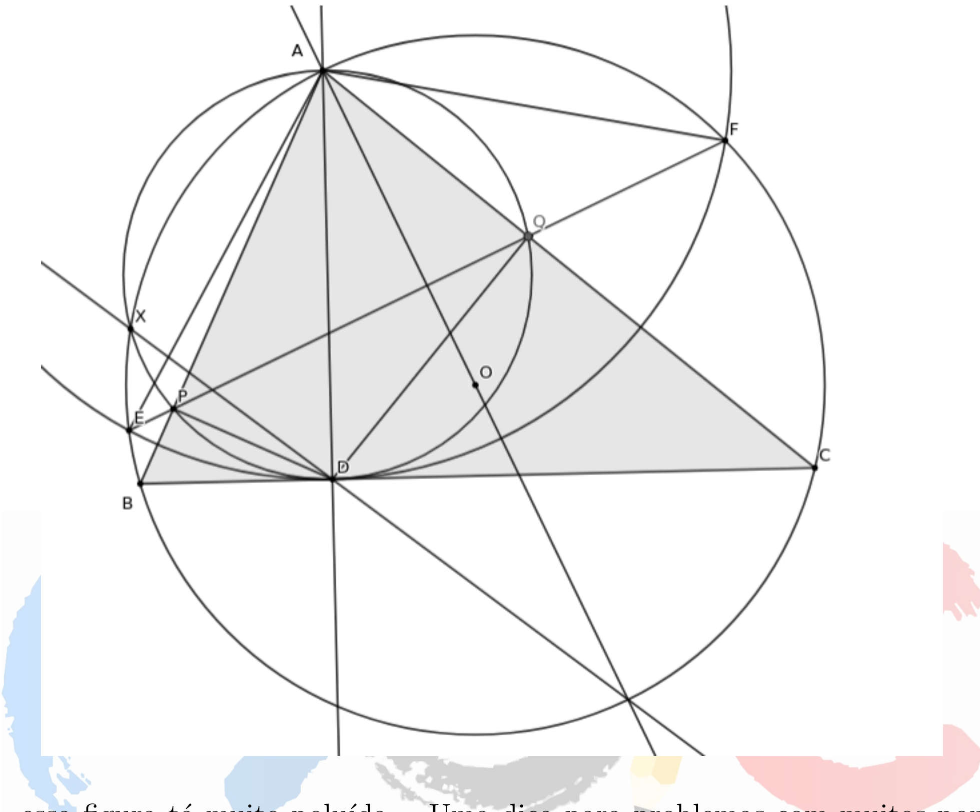
Veja que

$$Pot_{(AOD)}O = Pot_{(BOE)}O = Pot_{(COF)}O = 0$$

e, como $(BFEC)$ é cíclico, temos que $HB \cdot HE = HC \cdot HF$. Analogamente, $HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF \to Pot_{(AOD)}H = Pot_{(BOE)}H = Pot_{(COF)}H$. Portanto, OH é o eixo radical de $(AOD), (BOE)$ e $(BOE), (COF)$ e de $(COF), (AOD)$. Portanto, seja P a intercessão de $(AOD), (BOE)$, logo, ele está em OH, ou seja, ele está no eixo radical de $(BOE), (COF)$, mas $Pot_{(BOE)}P = 0$, então P está em (COF).

Exemplo 3.7 (OBM 2019 P3 N2)

Seja ABC um triângulo de centro O. Seja D o pé da altura de A por BC. Seja E, F pontos em (ABC) de modo que $AD = AE = AF$. Seja P, Q as intercessões de EF em AB, AC, respectivamente. Seja X a intercessão de (APQ) com (ABC) $(X \neq A)$. Prove que XD e AO se interssectam em (ABC).

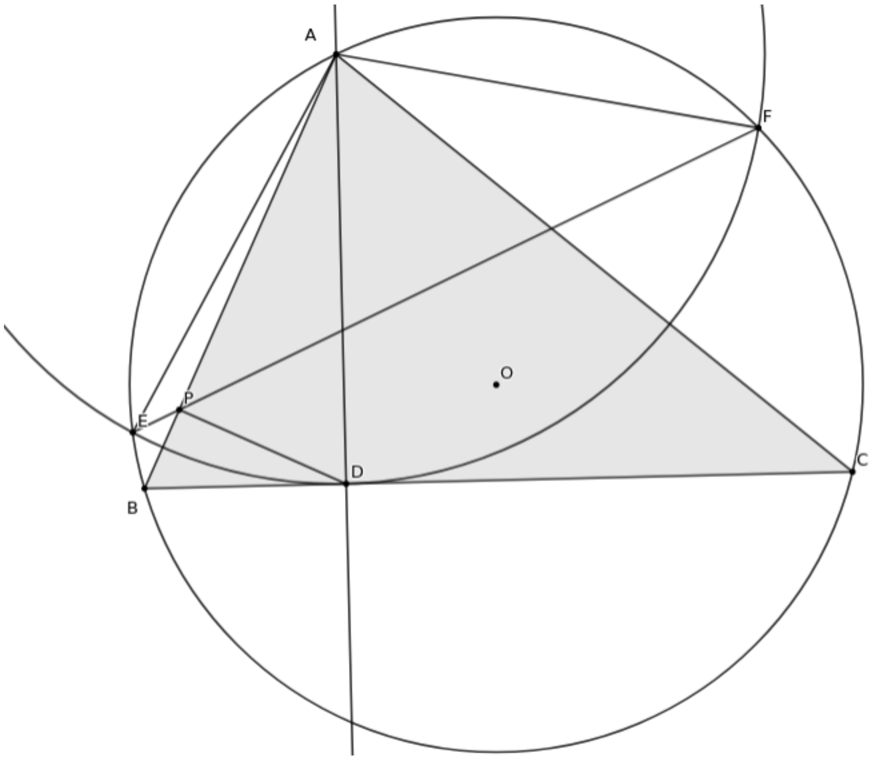


Tá, essa figura tá muito poluída... Uma dica para problemas com muitos pontos é tentar excluir alguns da figura, e é isso que nós vamos fazer!

Primeiro, com uma figura boa, é fácil de conjecturar que $\angle DPA = \angle DQA = 90$, agora, suponha que isso é verdade, isso acaba o problema? É sempre bom se fazer essa pergunta, pois quando temos várias conjecturas num problema, isso nos ajuda a priorizar quais conjecturas tentar provar primeiro.

Bem, se $\angle DPA = \angle DQA = 90$, então $APDQ$ é cíclico, com AD diâmetro dessa circunferência. Então, seja $T = AO \cap (ABC)$ logo temos que $\angle AXT = 90$ pois AT é diâmetro. Por outro lado, $\angle AXD = 90$, pois AD é diâmetro, portanto, $X - D - T$, ou seja, AO e XD se interssectam em (ABC) (Essa é uma outra técnica muito boa. Quando queremos provar que 2 retas concorrrem em uma circunferência, vale a pena pegar a intercessão de uma reta com a circunferência e provar que a outra reta passa por esse ponto. Normalmente é mais fácil provar colinearidades do que concorrências).

Perfeito, com isso, se provarmos que $\angle DPA = \angle DQA = 90$, o problema acabou. Agora, veja que a definição de P, Q depende de E, F, D, e eles só dependem de A, B, C, ou seja, não precisamos mais nem de O e nem de X na figura! Vamos fazer outra figura então:



Tirei Q também pois a próxima parte da prova não usa ele. Vamos fazer um argumento de ponto fantasma! Redefina P para ser o pé da altura de D em AB no triângulo ADB. Vamos provar que P, E, F são colineares. Analogamente, isso vai provar que Q, E, F são colineares.

Veja que, como $AD = AE = AF$, então A é centro de (DEF). Dito isso, veja que EF é eixo radical de (ABC) com (DEF). Vamos provar que P está nesse eixo radical! Veja que

$$Pot_{(ABC)}P = Pot_{(DEF)}P \iff PA \cdot PB = AD^2 - AP^2 \iff PA(AB - AP) = AD^2 - AP^2$$

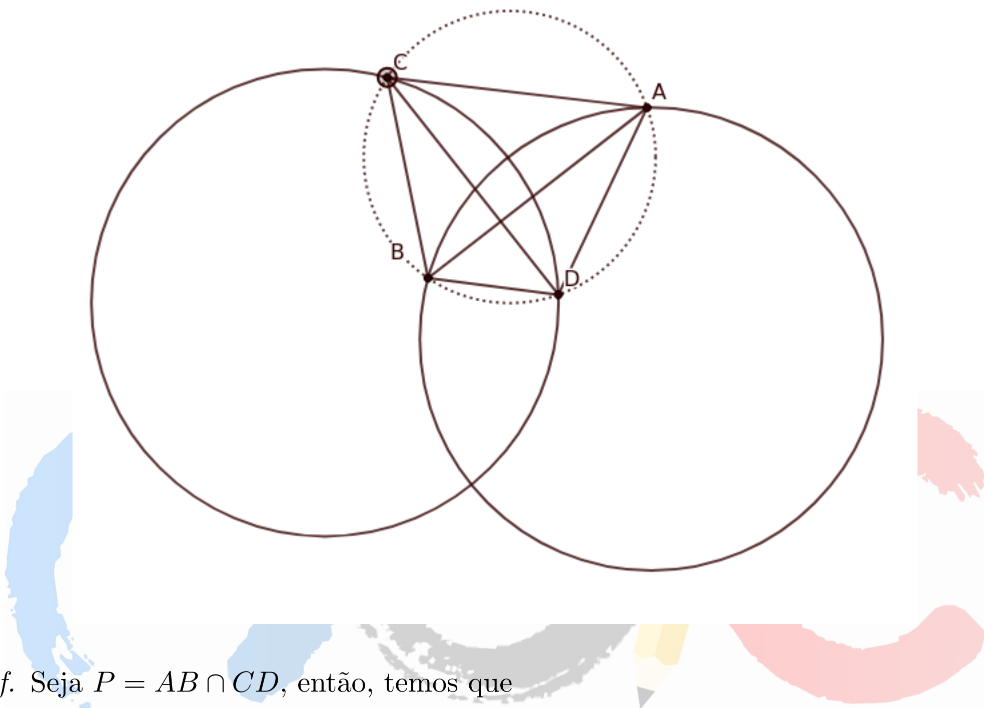
$$\iff PA \cdot AB - PA^2 = AD^2 - AP^2 \iff PA \cdot AB = AD^2$$

O que é verdade! Por semelhança nos triângulos $\triangle PAD \sim \triangle DAB \implies \frac{AP}{AD} = \frac{AD}{AB} \implies AP \cdot AB = AD^2$ $\blacksquare$

§4 Centro Radical

Vamos generalizar o eixo radical mais um pouco, dessa vez para 3 circunferências.

Teorema 4.1 (Existência do centro radical)
Seja w_1, w_2 duas circunferências, e A, B dois pontos em w_1 e C, D dois pontos em w_2. Temos que $ABCD$ é cíclico se, e somente se, AB, CD se intersectam no eixo radical.



Proof. Seja $P = AB \cap CD$, então, temos que

$$(ABCD) \text{ cíclico} \iff PA \cdot PB = PC \cdot PD \iff Pot_{w_1}P = Pot_{w_2}P$$

Ou seja, P está no eixo radical de w_1, w_2. □

A parte mais legal desse teorema é que ele prova que os 3 eixos radicais de 3 circunferências se intersectam! Isso te lembra de alguma coisa? Podemos afirmar que esse teorema é uma generalização da existência de um circuncêntro! Vamos provar isso

Exemplo 4.2
Prove que, para todo triângulo ABC, existe um ponto O de modo que $OA = OB = OC$.

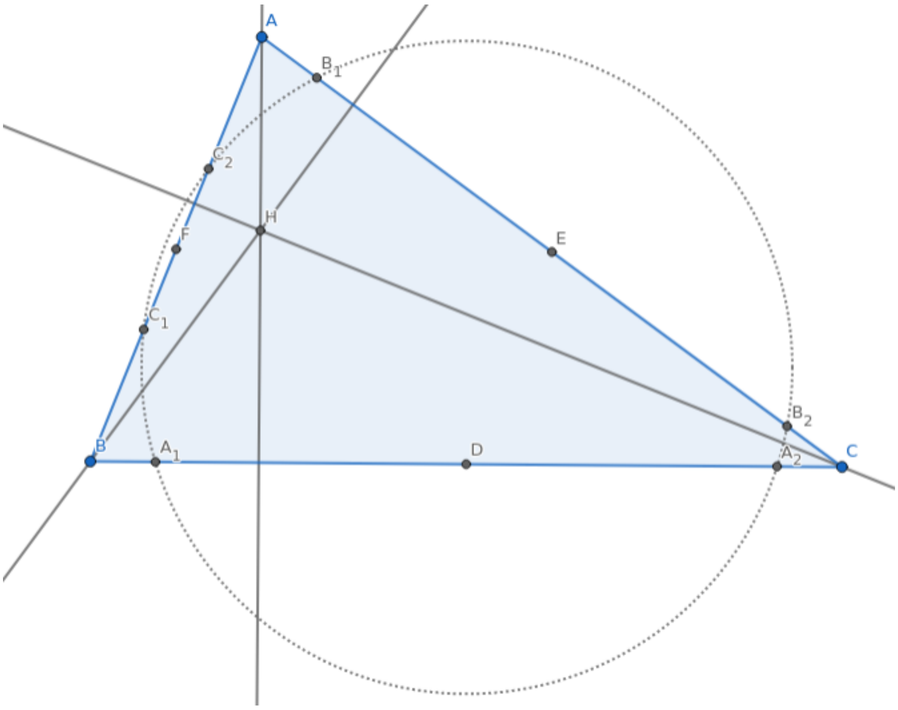
Essa aqui é a aplicação mais bonita de potência de ponto e eixo radicais. Vamos refletir um pouco: O que define uma circunferência? Um ponto e um raio. Ou seja, se pegarmos um ponto P qualquer, esse ponto é uma circunferência de raio 0! Legal, mas qual é a graça disso?

Vamos ver os pontos A, B, C como circunferências de raio 0. Então, o eixo radical de A, B é a mediatriz de AB (Pois a mediatriz é perpendicular a AB, e passa pelo ponto médio M de AB, e $Pot_A M = MA^2 - 0^2 = MB^2 - 0^2 = Pot_B M$, logo M está no eixo radical)! E, pelo teorema acima, temos que os 3 eixos radicais dessa circunferências concorrem! Então, as 3 mediatrizes de AB, BC, CA concorrem, e esse ponto vai ser o circuncentro de ABC.

Incrível! Essa ideia é chamada de "circuneferências de raio 0", e tem várias aplicações incríveis. Agora, vamos ver algumas aplicações de centros radicais.

Exemplo 4.3 (IMO 2008 P1)

Seja H o ortocentro do triângulo ABC. O círculo Γ_A centrado no ponto médio de BC e passando por H interssecta BC em A_1, A_2. Defina B_1, B_2, C_1, C_2 de maneira similar. Prove que os seis pontos $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ são concíclicos.



Seja D, E, F os pontos médios de BC, CA, AB. Suponha que $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ não sejam concíclilos. Veja que $EF \parallel BC$, que $H \in (C_1C_2H)$ e $H \in (B_1B_2H)$, então o eixo radical dessas duas circunferências passa por H e é perpendicular a reta que liga os centros delas, que é DE, portanto vai ser perpendicular a BC também! Logo, o eixo radical dessas duas circunferências é a altura de A por BC, então, $C_1C_2B_1B_2$ é cíclico, pois

$$AC_1 \cdot AC_2 = BB_1 \cdot BB_2$$

Já que A está no eixo radical. Analogamente, $A_1A_2B_1B_2$ e $A_1A_2C_1C_2$ são cíclicos também. Com isso, suponha que a circunferência não seja a mesma, então, veja que o eixo radical de $A_1A_2B_1B_2$ e de $A_1A_2C_1C_2$ é a própria reta $A_1A_2 = BC$! Analogamente, AC e AB também são os eixos radicais dessas circunferências, então, por centro radical, precisamos que AB, AC, BC concorram, absurdo!

§5 Problemas Propostos

Os problemas **NÃO ESTÃO** em ordem de dificuldade. Pense em todos, bons estudos :)

Problema 1: (IMO 2006) Seja ABC um triângulo com incentro I. Um ponto P no interior de ABC satisfaz $\angle PBA + \angle PCA = \angle PCB + \angle PBC$, Prove que $AP \geq AI$ e que a igualdade ocorre se $P = I$.

Problema 2: (USAMO 1997) Seja ABC um triângulo. Construa pontos D, E, F fora do triângulo de modo que BCD, CAE, ABF são isosceles. Prove que as retas que passam por A, B, C perpendiculares a EF, FD, DE, respectivamente, são perpendiculares.

Problema 3: (IMO SL 2009) Seja ABC um triângulo. O incirculo de ABC toca os lados AB, AC nos pontos Z, Y, respectivamente. Seja G o ponto onde as linhas BY e CZ se encontram, e seja R, S pontos de forma que os dois quadriláteros $BCYR$ e $BCSZ$ sejam paralelogramos. Prove que $GR = GS$.

Problema 4: (EGMO 2019) Seja ABC um triângulo com incentro I. A circunferência passando por B e tangente a AI intersecta o lado AB novamente em P. A circunferência passando por C e tangente a AI em I intersecta o lado AC novamente em Q. Prove que PQ é tangente ao incírculo de ABC.

Problema 5: (IMO 2010) Seja P um ponto no triângulo ABC. As retas AP, BP, CP intersectam novamente em (ABC) em K, L, M. A tangente a (ABC) por C intersecta AB em S. Mostre que $SC = SP$ implica $MK = ML$.

Problema 6: (Iran TST 2011) Num triângulo acutângulo ABC, $\angle ABC > \angle ACB$. Seja M o ponto médio de BC e E, F as alturas por B, C. Seja K, L os pontos médios de ME, MF, e T um ponto em KL tal que $TA \parallel BC$. Prove que $TA = TM$.

Problema 7: (IMO 3009) Seja ABC um triângulo com circuncentro O. Os pontos P, Q estão nos lados AC, AB. Seja K, L, M os pontos médios dos segmentos BP, CQ, PQ. Seja Γ a circunferência passando por KLM. Suponha que PQ é tangente a Γ. Prove que $OP = OQ$.

Problema 8: (USAMO 1990) Um triângulo acutângulo ABC é dado no plano. O círculo com diâmetro AB interssecta a altura CC' nos pontos M, N, e o círculo com diâmetro AC intersecta a altura BB' e seu prolongamento em P, Q. Mostre que $MNPQ$ é cíclico.

Referências:

- Material de potência de ponto do Davi Lopes
- Material de potência de ponto do POTI
- Livro do Evan Chen (EGMO)
- Mathlinks